Fonctions sinus et cosinus

Ce que dit le programme :

Fonctions sinus et cosinus	• Connaître la dérivée des fonctions sinus et cosinus. • Connaître quelques propriétés de ces fonctions, notamment parité et périodicité. • Connaître les représentations graphiques de ces fonctions.	On fait le lien entre le nombre dérivé de la fonction sinus en 0 et la limite en 0 de $\frac{\sin x}{x}$ En dehors des exemples étudiés, aucun développement n'est attendu sur les notions de périodicité et de parité. On fait le lien entre les résultats obtenus en utilisant le cercle trigonométrique et les représentations graphiques des fonctions $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin x$.

I. Parité et périodicité d'une fonction

1.1) Fonctions paires

Définition 1.

Soit D un intervalle ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$. On dit que D est symétrique par rapport à zéro ou que D est centré en zéro, si et seulement si :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$: [$x \in D$ ssi $-x \in D$]

Exemples.

$\mathbb{R}$, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, $[-\pi ; +\pi]$, $\mathbb{R} \setminus \{-1 ; +1\}$ sont symétriques par rapport à zéro.

$\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, [1 ;+∞[ne sont pas symétriques par rapport à zéro.

Définition 2.

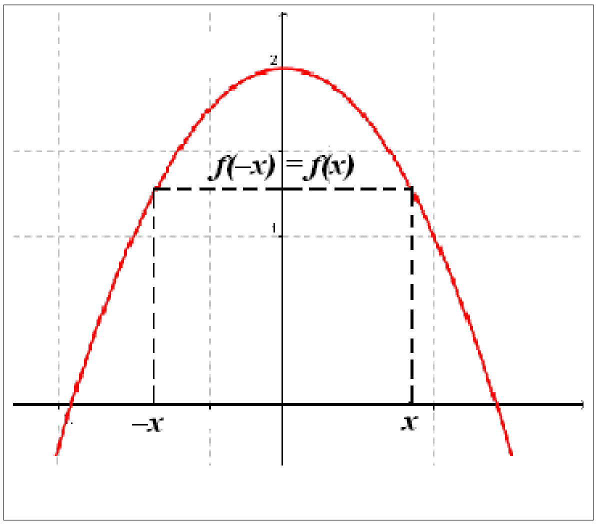
Soit D un intervalle ou une réunion d'intervalles $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur D. On dit que f est ***paire*** lorsque les 2 conditions suivantes sont vérifiées :

1°) le domaine de définition D est symétrique par rapport à zéro ;

2°) et pour tout $x \in D$: [$f(-x) = f(x)$]

Théorème 1.

Dans un repère orthogonal (ou orthonormé), la courbe représentatative d'une fonction paire est *symétrique par rapport à l'axe des ordonnées*.



Exemple :(modèle)

La fonction carrée $x \rightarrow x^2$ définie sur $\mathbb{R}$ est une fonction paire car $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à zéro et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

1.2) Fonctions impaires

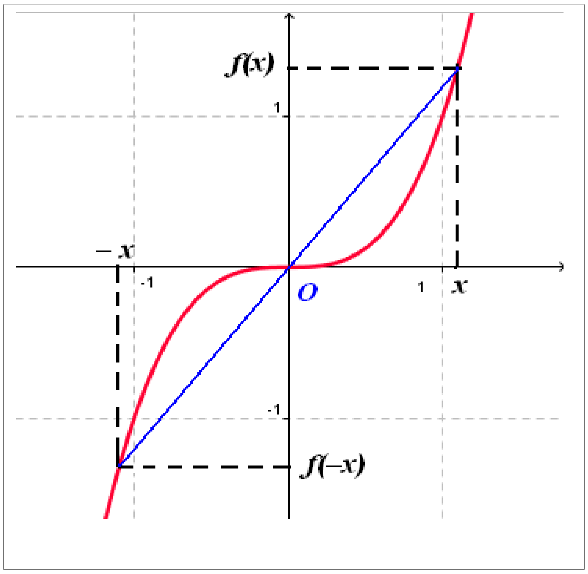
Définition 3.

Soit D un intervalle ou une réunion d'intervalles $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur D. On dit que f est ***impaire*** lorsque les 2 conditions suivantes sont vérifiées :

1°) le domaine de définition D est symétrique par rapport à zéro ;
2°) et pour tout $x \in D$: [$f(-x) = -f(x)$]

Théorème 2.

Dans un repère orthogonal (ou orthonormé), la courbe représentatative d'une fonction paire est *symétrique par rapport à l'origine O du repère*.



Exemple :(modèle)
La fonction cube $x \to x^3$ définie sur $\mathbb{R}$ est une fonction impaire car
$D_f = \mathbb{R}$ est symétrique par rapport à zéro et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$$

Remarque : Si une fonction est paire ou impaire, on réduit le domaine d'étude à la partie positive de D_f. La courbe de f peut alors se construire *par symétrie* par rapport à l'axe des ordonnées ou par rapport à l'origine O du repère.

1.3) Fonctions périodiques

Définition 4.

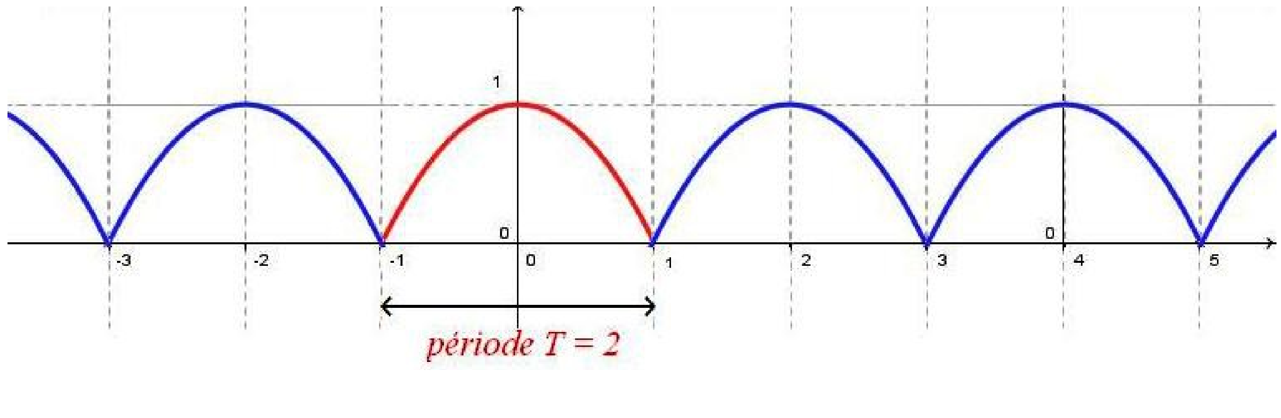
Soit D un intervalle ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur D et $T \in \mathbb{R}$ un nombre réel donné. On dit que f est ***périodique** de **période T*** lorsque les 2 conditions suivantes sont vérifiées :

1°) Pour tout $x \in \mathbb{R}$: [$x \in D$ ssi $x + T \in D$]
2°) et pour tout $x \in D$: [$f(x+T) = f(x)$]

Remarque : Pour construire la courbe d'une fonction périodique f de période $T \in \mathbb{R}$, on construit (une portion de) la courbe sur un intervalle de longueur T, puis *on duplique indéfiniment* cette portion à droite et à gauche.

On dit qu'on a réduit le domaine d'étude à un intervalle de longueur T de D_f.

Exemple.
Pour construire sur $\mathbb{R}$ la fonction périodique de période T = 2 et définie pour $x \in [-1\,;+1]$ par : $f(x) = 1 - x^2$, il suffit de construire la courbe de f sur un intervalle de longueur une période, ici $[-1\,;+1]$, puis dupliquer indéfiniment.



II. Fonctions trigonométriques

2.1) Rappels et définitions

Dans un repère orthonormé (O ; I , J) du plan, soit M un point quelconque du cercle trigonométrique C(O; 1) tel que la mesure en *radians* de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$ soit égale à x *radians*. On dit que M est le *point associé* à x sur le cercle C(O; 1).

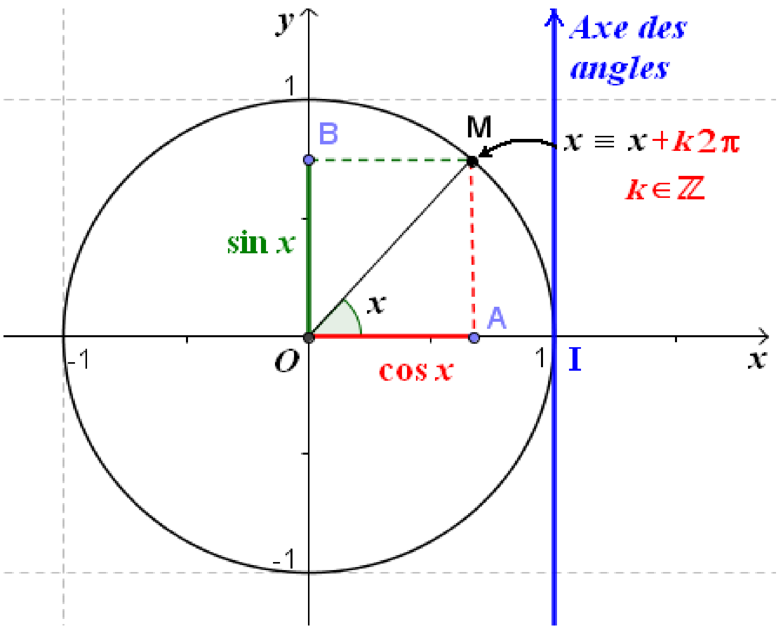
Définition 1.

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan, soit x un nombre réel et M le point associé à x sur C(O; 1). Alors

- le **cosinus de x**, noté **cos x**, désigne l'abscisse du point M ;
- le **sinus de x**, noté **sin x**, désigne l'ordonnée du point M.

On définit ainsi deux fonctions, **cos** et **sin** sur $\mathbb{R}$ comme suit :

$$\cos : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \cos x \end{array} \quad \text{et} \quad \sin : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sin x \end{array}$$



2.2) Propriétés

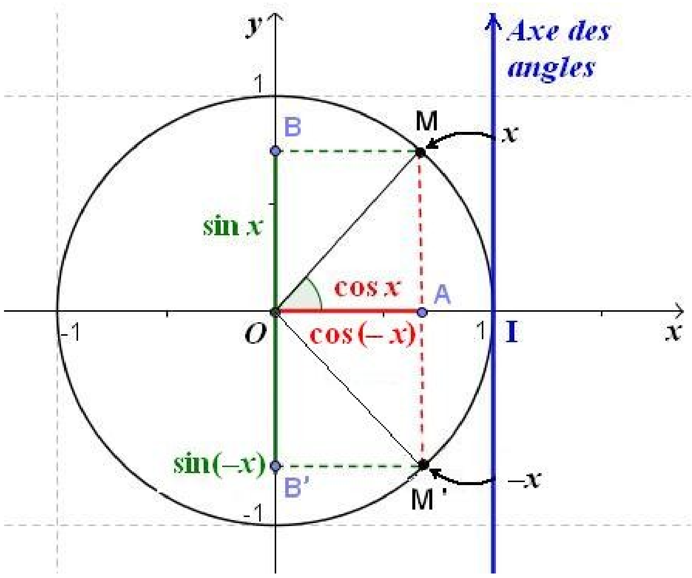
Propriété 1.

Les fonctions cosinus et sinus sont *définies* et ***continues*** sur tout $\mathbb{R}$. De plus :

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$: **cos (–*x*) = cos *x*.** Donc la fonction cosinus est ***paire***.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$: **sin (–*x*) = – sin *x*.** Donc la fonction sinus est ***impaire***.

Par conséquent, dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan,

- La courbe de la fonction ***cosinus*** *est symétrique par rapport à l'axes des ordonnées*. Donc, on peut réduire son intervalle d'étude à $[0 ; +\infty[$.
- La courbe de la fonction ***sinus*** *est symétrique par rapport à l'origine O* du repère. Donc, on peut aussi réduire son intervalle d'étude à $[0 ; +\infty[$.



Soit M un point quelconque du cercle trigonométrique tel que la mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$ soit égale à *x radians*. On peut lui associer une *famille de nombres réels* de la forme $x + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, qui correspondent au *même point* M du cercle trigonométrique.

Propriété 2.

Les fonctions cosinus et sinus sont ***périodiques*** de ***période*** $T = 2\pi$.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\cos(x + 2\pi) = \cos x$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\sin(x + 2\pi) = \sin x$.

En effet; les nombres x et $x + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, correspondent au *même point* M du cercle trigonométrique. Donc x et $x + k2\pi$ ont exactement le même cosinus en abscisse et le même sinus en ordonnée.

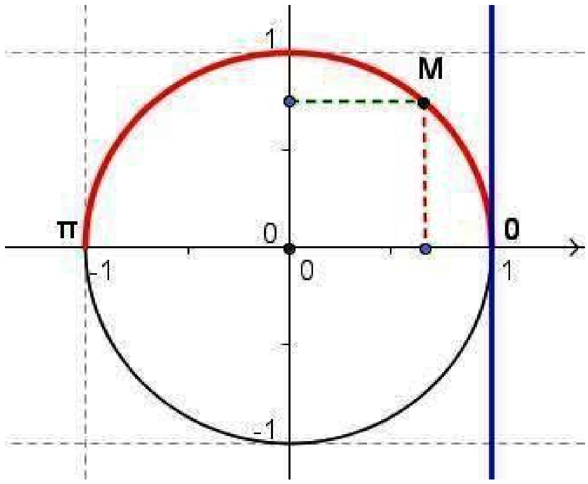
Par conséquent, dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan, on peut réduire l'intervalle d'étude des fonctions cosinus et sinus à un intervalle de longueur $T = 2\pi$. Par exemple, $D = [-\pi ; +\pi]$.

Propriété 3.

Les fonctions cosinus et sinus sont ***dérivables*** sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$[\cos(x)]' = -\sin x$$
$$[\sin(x)]' = \cos x$$

En effet ; les démonstrations nécessitent l'utilisation des formules trigonométriques vues en classe de 1ère S. (*A admettre* !)



Ces deux fonctions sont périodiques de période $T = 2\pi$, on peut restreindre l'étude à l'intervalle $[-\pi ; +\pi]$. Et comme la fonction cosinus est paire et la fonction sinus est impaire, on peut encore restreindre l'étude à la partie positive de cet intervalle, c'est-à-dire, à $I = [0 ; \pi]$.

Par lecture graphique sur le cercle trigonométrique, on peut déterminer le signe de sin x et de cos x. Ce qui nous permet de déterminer le signe de la dérivée de ces deux fonctions sur $I = [0 ; \pi]$. On obtient les tableaux de variations suivants :

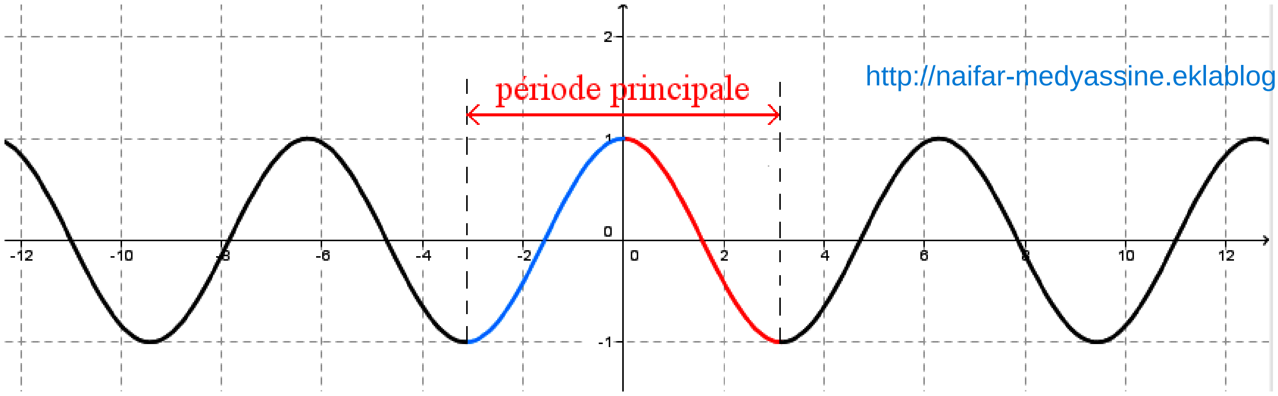
x	0		π
$\cos'(x)$	0	$-$	0
$\cos x$	1	$\searrow$	-1

et

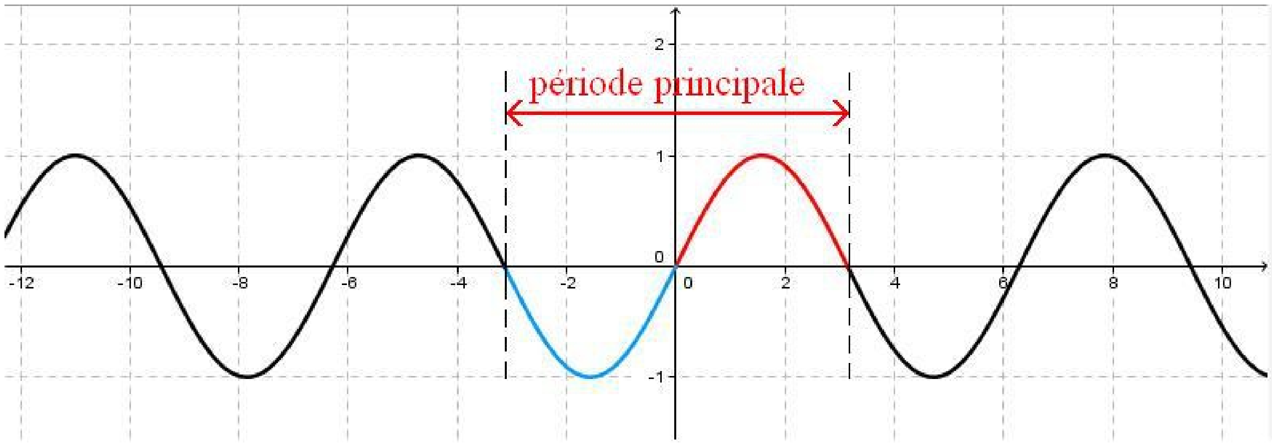
x	0		$\pi/2$		π
$\sin'(x)$		$+$	0	$-$	
$\sin x$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Construction des courbes :

Pour construire sur $\mathbb{R}$ une fonction périodique de période $T = 2\pi$ et définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \cos x$ ou $g(x) = \sin x$, il suffit de construire la courbe de f et de g sur un intervalle de longueur la moitié d'une période, ici $[0 ; +\pi]$, puis prendre le symétrique par rapport à Oy pour cosinus (fonction paire) ou par rapport à l'origine O pour sinus (fonction impaire) pour obtenir une période ; puis dupliquer indéfiniment à droite et à gauche par périodicité.



La fonction cosinus est périodique et paire,
sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées



La fonction sinus est périodique et impaire,
sa courbe est symétrique par rapport à l'origine O du repère

2.3) Dérivées de fonctions composées avec cos et sin

Propriété 1.

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors les fonctions composées $f:x\to\cos(u(x))$ et $g:x\to\sin(u(x))$ sont définies et dérivables sur I et : $[\cos(u)]'=-u'\times\sin(u)$ et $[\sin(u)]'=u'\times\cos(u)$

Pour tout $x\in I$: $f'(x)=-u'(x)\times\sin(u(x))$ et $g'(x)=u'(x)\times\cos(u(x))$.

Exemples.

1°) Si $u(x)=ax+b$, les fonctions $f:x\to\sin(ax+b)$ et $g:x\to\cos(ax+b)$ sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=a\times\cos(ax+b)=a\cos(ax+b)$, et $g'(x)=-a\times\sin(ax+b)=-a\sin(ax+b)$.

2°) Soit f la fonction définie par : $f(x)=\sin(3x^2+5)$
On pose $u(x)=3x^2+5$, alors $u'(x)=6x$. La fonction composée définie par $f(x)=\sin(u(x))$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=u'\times\cos(u)=6x\cos(3x^2+5)$.

3°) Soit f la fonction définie par : $f(x)=\cos(\sqrt{x})$

On pose $u(x)=\sqrt{x}$, alors u est définie sur $[0;+\infty[$ et dérivable sur $]0;+\infty[$ et $u'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$. La fonction composée définie par $f(x)=\cos(u(x))$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $f'(x)=-u'\times\sin(u)=\frac{-1}{\sqrt{x}}\sin(\sqrt{x})$.

4°) Soit f la fonction « tangente » définie par : $f(x)=\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$

Les deux fonctions cos et sin sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$. Donc la fonction tangente est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ privé de tous les points où le cosinus est nul. $x\in D_{\tan}$ (ssi) $x\neq\pi/2+k\pi, k\in\mathbb{Z}$. Donc $D_{\tan}=\mathbb{R}\setminus\{\pi/2+k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$.

La fonction tangente est impaire et périodique de période π [*à vérifier*] et pour tout $x\in D_{\tan}$: tan x s'écrit sous la forme $u(x)\,/\,v(x)$, avec $u(x)=\sin x$, donc $u'(x)=\cos x$ et $v(x)=\cos x$, donc $v'(x)=-\sin x$. Par conséquent :

$$f'(x)=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{\cos x\times\cos x-\sin x\times(-\sin x)}{(\cos x)^2}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{(\cos x)^2}=\frac{1}{(\cos x)^2}$$

ou bien en séparant les deux termes du numérateur, on obtient :

$$f'(x)=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$$

2.4) Calcul d'une limite particulière.

Propriété 1.

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}$$

Démonstration

On sait par définition qu'une fonction f est dérivable en a si et seulement si :

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$$

Soit f la fonction définie par $f(x)=\sin x$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc en particulier en 0. De plus $f'(x)=\cos x$, $f(0)=\sin 0=0$ et $f'(0)=\cos 0=1$.

Par suite :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin 0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=\cos 0=1.$$

CQFD.

On peut généraliser ce modèle de démonstration à toutes les formes 0/0 avec au dénominateur $x-a$ *. Par exemple :*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}\ ,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}\ ,\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}\ ,\quad \lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}\ ,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$$

A vous de jouer ...et amusez-vous avec $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{\sin(5x)}$ *Cherchez l'astuce...*

III. Exemples d'étude de fonctions

Exemple 1.

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\cos(2x)+1$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.
a) Montrer que f est périodique de période $T=\pi$.
b) Étudier la parité de f.
c) En déduire l'intervalle d'étude I de f.
d) Étudier le sens de variation de f.
e) Construire C_f sur I puis sur $\mathbb{R}$.

Tout d'abord, nous cherchons le domaine de définition de f. La fonction cosinus n'a aucune valeur interdite donc : $D_f=\mathbb{R}$.

a) Montrer que f est périodique de période $T=\pi$.
On sait D_f est *périodique de période* π. De plus, pour tout $x\in D_f$:
$$f(x+T)=f(x+\pi)=\cos(2\times(x+\pi))+1=\cos(2x+2\pi)+1=\cos(2x)+1=f(x).$$
car la fonction cosinus est périodique de période 2π .
Par suite
$$f(x+T)=f(x+\pi)=\cos(2\times(x+\pi))+1=\cos(2x+2\pi)+1=\cos(2x)+1=f(x).$$
Conclusion : *La fonction f est périodique* de période $T=\pi$. Donc, on peut réduire son domaine d'étude à un intervalle de longueur π , par exemple $[0;\pi]$ ou $[-\pi/2;\pi/2]$. On reproduira la courbe par périodicité.

b) Étude de la parité de f.
La fonction cosinus étant paire, nous avons :
D_f est *symétrique par rapport à 0*. et pour tout $x\in D_f$:
$$f(-x)=\cos(2\times(-x))+1=\cos(-2x)+1=\cos(2x)+1=f(x).$$
Par suite $f(-x)=f(x)$.

Conclusion : *La fonction f est paire*. Par conséquent, on peut réduire son domaine d'étude à la partie positive de son domaine de définition. On construira l'autre moitié de la courbe par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

c) En déduire l'intervalle d'étude I de f.
On sait que la fonction f est paire et périodique de période π . Par conséquent, on peut réduire l'intervalle d'étude à : $I=[0;\pi/2]$.

d) Étudier le sens de variation de f.
Pour étudier le sens de variation de f, nous devons calculer la dérivée f' de f et étudier son signe. On sait que $[\cos(ax+b)]'=-a\sin(ax+b)$.
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a :
$$f'(x)=-2\sin(2x)$$

Donc, pour tout $x \in [0, \pi/2]$ on a :

$f'(x)=0$ ssi $\sin(2x)=0$ ssi $2x = 0 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

ssi $x=0$ ou $x=\pi/2$ sur $[0;\pi/2]$

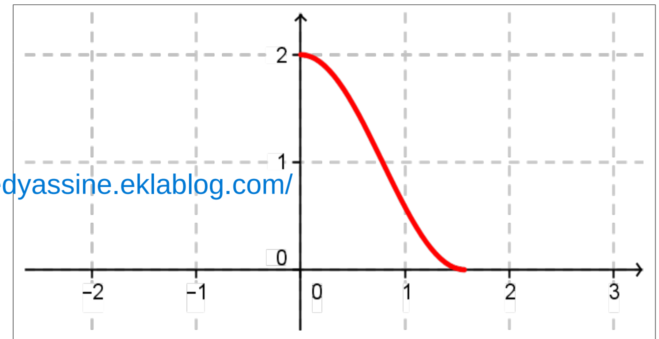
D'autre part, pour tout $x \in]0;\pi/2[$ on a $2x \in]0;\pi[$ donc $\sin(2x)>0$

et comme $f'(x) = -2\sin(2x)$ on a $f'(x)<0$ sur $[0;\pi/2]$

La fonction *f* est donc strictement décroissante sur $[0, \pi/2]$.

e) Construire C_f sur I puis sur $\mathbb{R}$

x	0		$\pi/2$
$f'(x)$	0	$-$	0
$f(x)$	2	$\searrow$	0

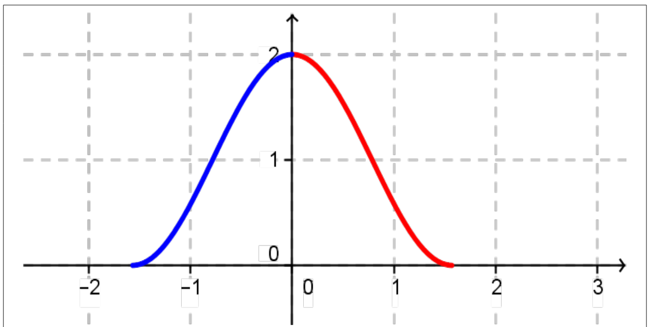


Morceau de courbe sur *une demi-période*

f est paire donc, sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

$\pi/2 \simeq 1{,}5708\ldots$

x	$-\pi/2$		0		$\pi/2$
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0



Morceau de courbe sur *une période*

La fonction f étant périodique de période π , on peut reproduire indéfiniment cette courbe à droite et à gauche par périodicité.