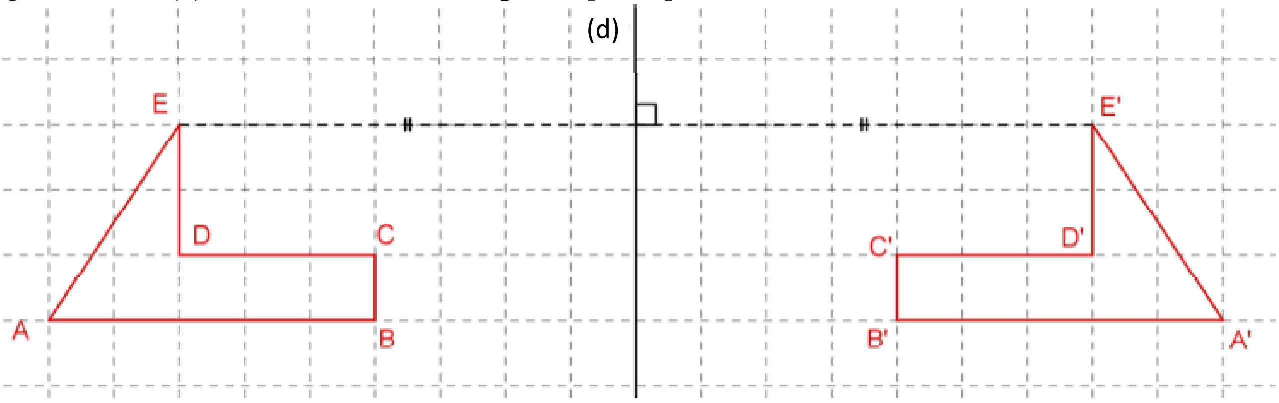
Chapitre 10 : Transformations du plan

I- Symétries, translation et rotation

1) Symétrie axiale

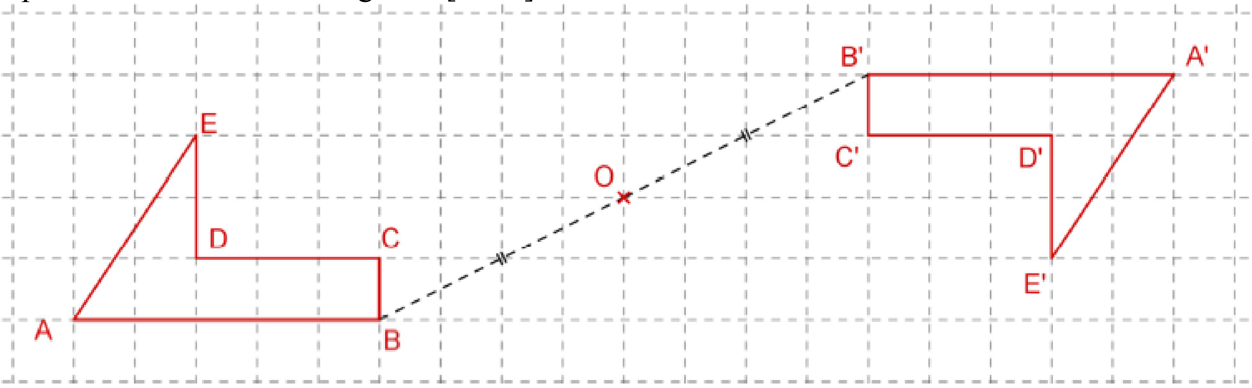
Définition : Dire qu'un point M' est **le symétrique** d'un point M **par rapport à une droite (d)** signifie que la droite (d) est la médiatrice du segment [MM'].



La figure A'B'C'D'E' est l'image de la figure ABCDE par la symétrie axiale d'axe (d).

2) Symétrie centrale

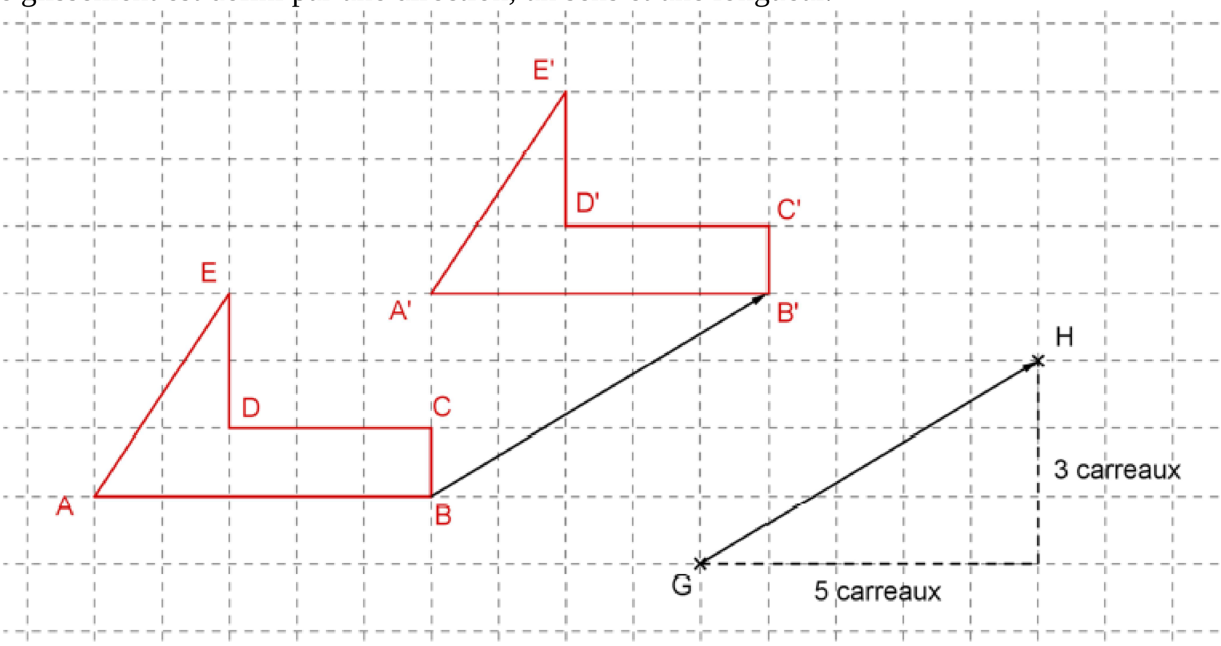
Définition : Dire qu'un point M' est **le symétrique** d'un point M **par rapport à un point O** signifie que le point O est le milieu du segment [MM'].



La figure A'B'C'D'E' est l'image de la figure ABCDE par la symétrie centrale de centre O.

3) Translation

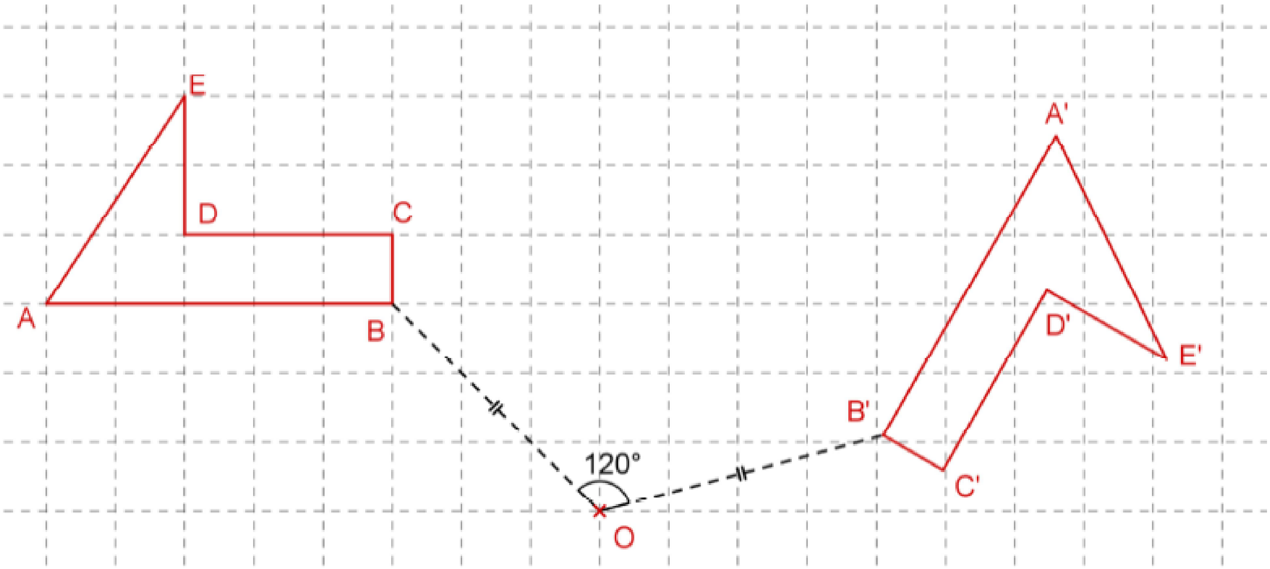
Définition : Quand on fait **glisser une figure sans la déformer**, on dit qu'on effectue une **translation**. Ce glissement est défini par une direction, un sens et une longueur.



La figure A'B'C'D'E' est obtenu par glissement de la figure ABCDE suivant la flèche GH.
La figure A'B'C'D'E' est l'image de la figure ABCDE par la translation qui transforme G en H.

4) Rotation

Définition : Quand on fait **tourner une figure autour d'un point selon un certain angle sans la déformer**, on dit qu'on effectue une **rotation**. Une rotation est définie par un centre, un angle et un sens de rotation (horaire ou anti-horaire).



On dit que la figure A'B'C'D'E' est l'image de la figure ABCDE par la rotation de centre O, d'angle 120° et de sens horaire.

Remarque : La rotation de centre O et d'angle 180° est la symétrie centrale de centre 0.

5) Propriétés

Les symétries (axiale et centrale), les translations et les rotations **conservent les longueurs, les mesures des angles et les aires.**

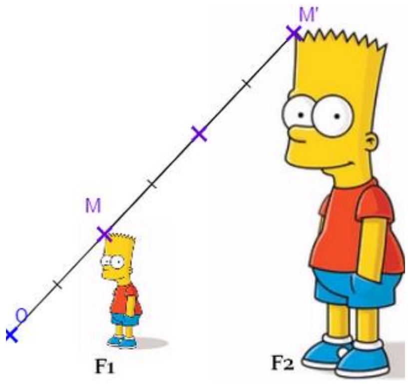
Vidéo sur ces 4 transformations https://www.youtube.com/watch?v=4hACSwA1cn4

II-Homothétie

1) Introduction

La figure F_2 est un **agrandissement** de rapport 3 de la figure F_1.
On dit que la figure F_2 est l'**image** de la figure F_1 par l'**homothétie** de centre O et de rapport 3.

La figure F_1 est une **réduction** de la figure F_2 de rapport $\frac{1}{3}$.
On dit que la figure F_1 est l'**image** de la figure F_2 par l'**homothétie** de centre O et de rapport $\frac{1}{3}$.



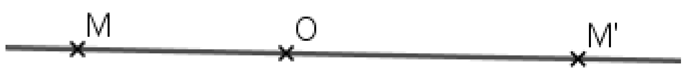
2) Définition

On appelle **homothétie de centre O et de rapport k non nul**, la transformation qui à tout point M associe le point M' tel que :
- O, M et M' sont alignés,
- Si $k > 0$ alors $OM' = k \times OM$ et M et M' sont du même côté par rapport à O.
- Si $k < 0$ alors $OM' = -k \times OM$ et M et M' sont de part et d'autre de O.

$k > 0$

ici k = 2,8

$k < 0$



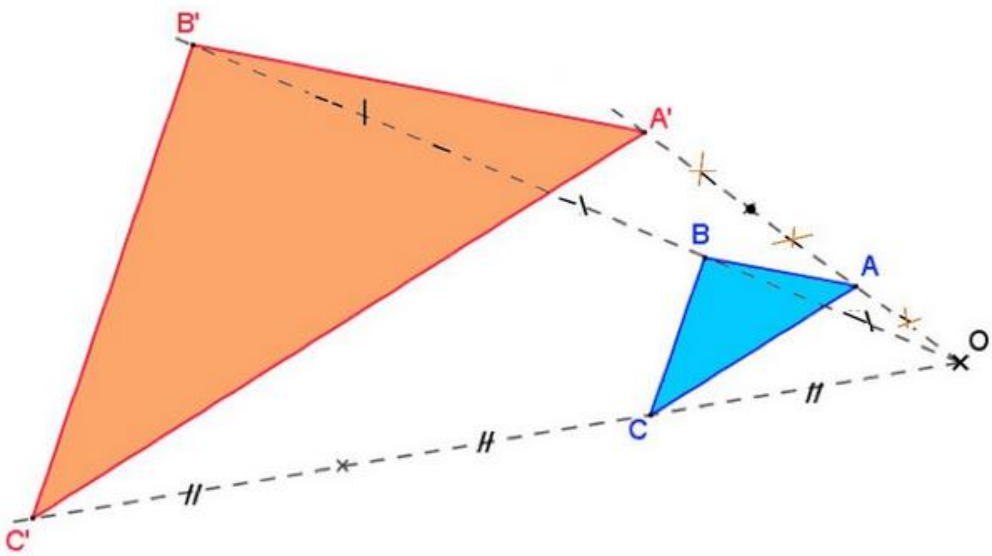
ici k = - 1,4

METHODE DE CONSTRUCTION

- **Cas où k > 0**

Construire l'image A'B'C' du triangle ABC par l'homothétie de centre O et de rapport k = 3.

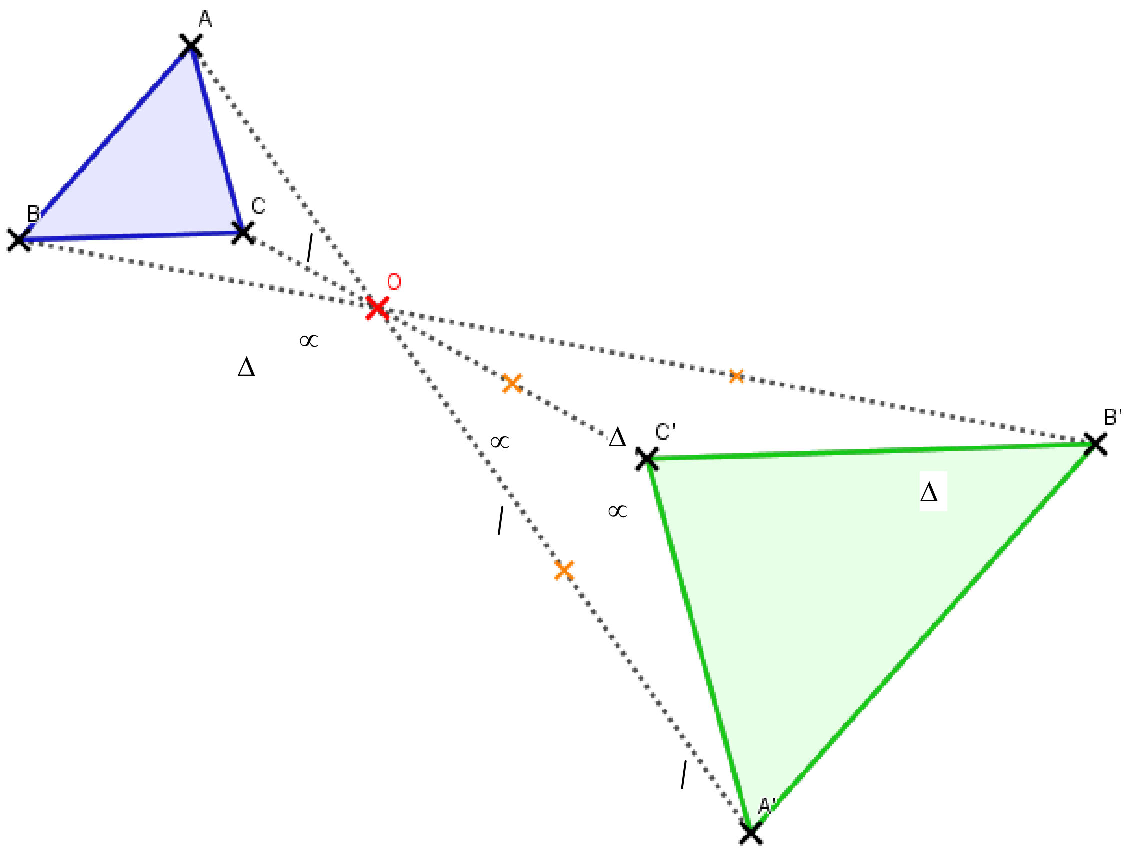
1) On trace la demi-droite [OA), puis on place le point A' sur [OA) tel que OA' = 3 x OA
2) On procède de la même manière pour placer les points B' et C'.



- **Cas où k < 0**

Construire l'image A'B'C' du triangle ABC par l'homothétie de centre O et de rapport k = - 2.

1) On trace la demi-droite [AO), puis on place le point A' sur [AO) tel que OA' = 2 x OA
2) On procède de la même manière pour placer les points B' et C'.



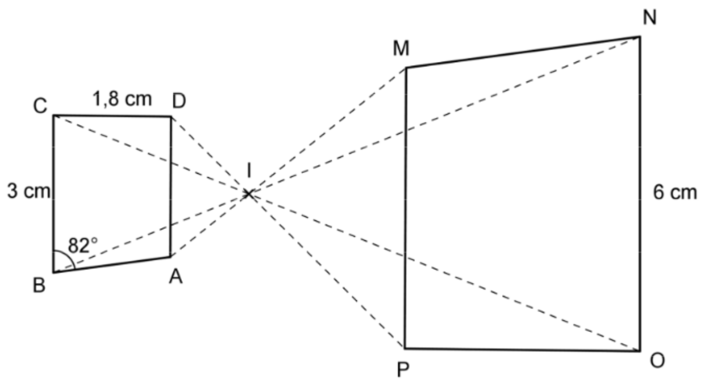
3) Propriétés à connaître

- L'homothétie conserve l'alignement, les milieux et la mesure des angles.
- Pour une homothétie de rapport k :
  - les longueurs sont multipliées par k si k > 0 ou – k si k < 0.
  - les aires sont multipliées par k².

Application :

Le trapèze MNOP est l'image du trapèze ABCD par l'homothétie de centre I.

1) *Déterminer la mesure de l'angle* $\widehat{MNO}$. *Justifier.*
2) *Calculer la distance OP. Justifier.*



MNOP et ABCD ne sont pas du même côté du centre I donc le rapport d'homothétie est négatif !

Réponses :
1) MNOP est l'image de ABCD par l'homothétie de centre I.
L'angle $\widehat{MNO}$ est l'image de l'angle $\widehat{ABC}$ par cette homothétie.
Or une homothétie conserve les angles. Donc $\widehat{MNO}$ = $\widehat{ABC}$ = 82°.
2) [ON] est l'image de [CB] par l'homothétie de centre I et de rapport -2 (6 ÷ 3=2)
Or pour une homothétie de rapport -2, les longueurs sont multipliées par 2.
Comme [PO] est l'image de [CD] par cette homothétie, alors PO = CD x 2 = 1,8 x 2 = 3,6 cm.