

Nouvelle approche
du modèle standard
de la physique quantique
en algèbre de Clifford

Claude Daviau
Jacques Bertrand

Nouvelle approche
du modèle standard
de la physique quantique
en algèbre de Clifford

Mots clés : groupe d'invariance, équation de Dirac, électromagnétisme, interactions faibles, interactions fortes, algèbres de Clifford, monopôles magnétiques.

La version en anglais de ce livre est disponible à l'adresse :

[http ://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00907848](http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00907848)

Claude Daviau
Le Moulin de la Lande
44522 Pouillé-les-coteaux
France
email : claudedaviau@nordnet.fr

Jacques Bertrand
15 avenue Danielle Casanova
95210 Saint-Gratien
France
email : bertrandjacques-m@orange.fr

ISBN : 978-2-9539134-3-9

© Claude Daviau, 2013

Tous droits réservés pour tous pays.

Table des matières

Introduction	ix
1 Algèbres de Clifford	1
1.1 Qu'est-ce qu'une algèbre de Clifford ?	2
1.2 Algèbre de Clifford du plan euclidien	3
1.3 Algèbre de Clifford de l'espace physique	4
1.3.1 Produit vectoriel, orientation	5
1.3.2 Algèbre de Pauli	5
1.3.3 Trois conjugaisons sont utiles :	6
1.3.4 Gradient, divergence et rotationnel	7
1.3.5 L'espace-temps en algèbre d'espace	7
1.3.6 Invariance relativiste	8
1.3.7 Groupe de Lorentz restreint	10
1.4 Algèbre de Clifford de l'espace-temps	11
1.4.1 Matrices de Dirac	12
1.5 Algèbre de Clifford $Cl_{5,1} = Cl_{1,5}$	13
2 L'équation de Dirac	17
2.1 Avec les matrices de Dirac	17
2.1.1 Équation du second ordre	18
2.1.2 Courant conservatif	19
2.1.3 Tenseurs	19
2.1.4 Invariances de jauge	20
2.1.5 Invariance relativiste	21
2.2 L'onde en algèbre d'espace	22
2.2.1 Invariance relativiste	24
2.2.2 Plus de tenseurs	25
2.2.3 Ondes planes	28
2.3 L'équation de Dirac en algèbre d'espace-temps	29
2.4 Equation de Dirac invariante	29
2.4.1 Conjugaison de charge	32
2.4.2 Lien entre l'onde de la particule et de l'antiparticule . .	33
2.5 Au sujet de l'algèbre de Pauli	34

3	L'équation d'onde non linéaire homogène.	35
3.1	Invariances de jauge	38
3.2	Onde plane	39
3.3	Invariance relativiste	40
3.4	Normalisation de l'onde	43
3.5	Conjugaison de charge	44
3.6	L'atome d'hydrogène	45
4	Invariance des lois de l'électromagnétisme	47
4.1	L'électromagnétisme de Maxwell-de Broglie	48
4.1.1	Invariance sous Cl_3^*	49
4.2	Electromagnetisme avec monopôles	52
4.3	Retour à l'algèbre d'espace-temps	54
4.3.1	De Cl_3 à $Cl_{1,3}$	54
4.3.2	Electromagnétisme	56
4.4	Quatre photons	57
4.4.1	L'électromagnétisme du photon	59
4.4.2	Les trois autres photons de Lochak	62
4.5	Unicité du champ électromagnétique	64
4.6	Remarques	64
5	Conséquences	67
5.1	Anisotropie	67
5.1.1	Torsion	69
5.2	Systèmes d'électrons	69
5.3	Équation sans formalisme lagrangien	71
5.3.1	Ondes planes	73
6	Interactions électro-faibles et fortes	75
6.1	Le modèle de Weinberg-Salam pour l'électron et son neutrino	75
6.2	Invariances	85
6.3	Le secteur des quarks	87
6.4	Chromodynamique	91
6.4.1	Trois générations, quatre neutrinos	93
6.5	Transformation géométrique liée à l'onde	95
6.5.1	En algèbre d'espace-temps	95
6.5.2	Extension à l'onde complète	97
6.5.3	Invariance	99
6.6	Existence de l'inverse	100
6.7	Équations d'onde	103
7	Monopôles magnétiques	105
7.1	Les travaux expérimentaux russes	105
7.2	Travaux à l'E.C.N.	107
7.2.1	Résultats sur les poudres et le gaz	108

7.2.2	Taches	111
7.2.3	Traces	111
7.3	Electrons et monopôles	118
7.3.1	Conjugaison de charge	119
7.3.2	L'interaction électron-monopôle	119
7.3.3	Interactions électro-faibles des monopôles	121
7.3.4	Équation d'onde invariante de jauge	123
8	Conclusion	125
8.1	Faillles anciennes	125
8.2	Ce travail	126
8.3	Principe de minimum	130
8.4	Théorie et expérience	130
8.5	Applications futures	131
8.6	Un modèle standard conforté	132
A	Calculs en algèbre de Clifford	135
A.1	Equation invariante et lagrangien	135
A.2	Calcul du renversé dans $Cl_{5,1}$	141
B	Calculs pour l'invariance de jauge	147
C	L'atome d'hydrogène	151
C.1	Séparation des variables	151
C.2	Opérateurs de moment cinétique	156
C.3	Résolution du système radial linéaire	158
C.4	Calcul de l'angle d'Yvon-Takabayasi	163
C.5	Polynômes radiaux de degré 0	166

Introduction

Pour comprendre d'où vient le modèle standard qui régit aujourd'hui la physique quantique, nous commençons par un retour sur ses origines. Quand l'idée d'une onde associée au mouvement de toute particule a été inventée, Louis de Broglie a été guidé par les conséquences de la relativité restreinte [23]. La première équation pour son onde fut trouvée par E. Schrödinger [47]. Elle n'était pas relativiste et ne pouvait donc pas être la vraie équation d'onde. La même année le spin de l'électron fut découvert. Il demeure le principal changement par rapport à la physique pré-quantique car le spin $1/2$ n'a pas d'équivalent classique. Pauli donna une équation d'onde non relativiste pour un électron à spin. Cette équation fut le point de départ de la tentative faite par P. Dirac [28] pour obtenir une équation d'onde relativiste pour l'électron. Cette équation de Dirac fut un immense succès. Encore aujourd'hui elle est considérée comme l'équation d'onde de toute particule de spin $1/2$, électron tout comme positron, muon et anti-muon mais aussi neutrinos et quarks.

Cette équation d'onde fut étudiée activement par Louis de Broglie et par ses étudiants. Il publia un premier livre sur elle dès 1934 [24], expliquant comment c'est cette équation d'onde qui donne dans le cas de l'atome d'hydrogène la quantification des niveaux d'énergie, les nombres quantiques attendus, le bon nombre des états liés, les bons niveaux d'énergie, les facteurs de Landé. La principale nouveauté en physique qui s'introduit par l'équation de Dirac est le fait que l'onde n'a pas le comportement des vecteurs et tenseurs, dans une rotation de Lorentz, l'onde est un spineur et est transformée très différemment. Il en résulte que l'équation de Dirac est invariante de forme dans toute transformation de Lorentz. Cette invariance de forme est le point de départ de notre étude et le fil rouge de ce livre.

L'équation de Dirac a été obtenue à partir de l'équation de Pauli et est construite à l'aide de matrices complexes 4×4 comportant des blocs de matrices de Pauli. De nombreuses années plus tard D. Hestenes [30] s'est servi de l'algèbre de Clifford de l'espace-temps pour obtenir une forme différente de cette même équation d'onde. Les tenseurs que l'on construit à partir des spineurs de Dirac apparaissent fort différents. Les relations entre ces tenseurs sont beaucoup plus faciles à obtenir.

Un des paramètres de l'onde de Dirac, l'angle d'Yvon-Takabayasi [48] était complètement différent de toutes les grandeurs physiques classiques. G. Lochak

comprit que cet angle permet une seconde invariance de jauge [37]. Il a établi qu'une équation d'onde pour son monopôle magnétique était possible avec un terme de masse non linéaire. Quand ce terme de masse est nul, l'onde est constituée de deux spineurs de Weyl indépendants.

Ce terme de masse est compatible avec la jauge électrique régissant l'équation de Dirac. Il peut donc remplacer le terme linéaire de l'équation de Dirac de l'électron [7]. Une équation d'onde non linéaire était attendue par de Broglie, parce qu'il est nécessaire de lier la particule à l'onde. Mais ceci n'explique pas comment choisir la non linéarité. Celle-ci est un redoutable problème en physique quantique, la théorie quantique est une théorie linéaire, c'est en résolvant une équation d'onde linéaire que la quantification des niveaux d'énergie et les nombres quantiques sont obtenus pour l'atome d'hydrogène. Si l'on part d'une équation non linéaire, normalement on n'est même pas capable d'obtenir la quantification et les nombres quantiques.

Néanmoins l'étude de cette équation d'onde non linéaire a été entreprise dans le cas où l'onde de Dirac est son approximation linéaire. Dans ce cas l'équation d'onde est homogène. Elle s'obtient à partir d'une densité lagrangienne qui ne diffère du lagrangien de la théorie linéaire que par le terme de masse. Par conséquent de nombreux résultats sont semblables. Par exemple la dynamique de l'électron est la même, l'électron suit la loi de force de Lorentz.

Deux formalismes étaient donc disponibles, celui de Dirac avec ses matrices complexes 4×4 , et l'algèbre de Clifford de l'espace-temps. Une représentation matricielle relie ces deux formalismes. Comme le cas de l'atome d'hydrogène donne les principaux résultats, une première tentative fut faite pour résoudre l'équation non linéaire dans ce cas. Heinz Krüger a donné un précieux outil [35] en trouvant un moyen de séparer les variables en coordonnées sphériques. De plus le début de cette résolution par séparation des variables est le même, tant pour l'équation de Dirac linéaire que pour l'équation non linéaire homogène. Mais il y a ensuite une grave difficulté : l'angle d'Yvon-Takabayasi est nul dans le plan d'équation $x^3 = 0$; cet angle est une fonction compliquée d'une variable angulaire et de la variable radiale. De plus, pour toute solution avec une fonction radiale comprenant un polynôme de degré non nul, des cercles existent sur lesquels l'angle d'Yvon-Takabayasi n'est pas défini. Au voisinage de ces cercles l'angle n'est pas petit, donc les solutions de l'équation linéaire n'ont aucune raison d'être les approximations des solutions de l'équation non linéaire. Finalement il est possible de calculer [8] un autre ensemble de solutions orthonormales de l'équation de Dirac, qui ont un angle d'Yvon-Takabayasi partout défini et partout petit. Ces solutions sont les approximations linéaires des solutions de l'équation non linéaire. L'existence d'un tel ensemble de solutions orthonormales est un argument puissant en faveur de notre équation d'onde non linéaire.

Quand on a deux formalismes pour la même théorie, la question arrive nécessairement : lequel est le bon ? La comparaison des avantages respectifs de ces deux formalismes a fait naître l'idée qu'un troisième formalisme était peut-être possible. Et effectivement un troisième formalisme existe [10] pour

écrire la théorie de Dirac : c'est l'algèbre de Clifford de l'espace physique. Elle a été utilisée en premier par W.E. Baylis [2]. Cette algèbre de Clifford est isomorphe à l'algèbre matricielle complexe engendrée par les matrices de Pauli. La physique quantique a connu très tôt ces matrices qui furent inventées pour fabriquer la première équation d'onde pour une particule de spin $1/2$. Maintenant encore ce formalisme est utilisé pour obtenir l'invariance relativiste de l'équation de Dirac. Ayant donc maintenant trois formalismes pour une seule théorie la question se reposait : lequel est le bon ?

Le critère de choix était nécessairement l'invariance de l'équation d'onde sous le groupe de Lorentz. Donc une étude complète et reprenant tout à zéro de l'invariance de forme de la théorie de Dirac a été faite [12]. C'était une chose bien connue, traitée dans de nombreux manuels, mais toujours avec les mêmes défauts du point de vue mathématique. La raison en est que deux groupes de Lie différents peuvent avoir la même algèbre de Lie. L'algèbre de Lie d'un groupe de Lie est l'algèbre engendrée par les opérateurs infinitésimaux du groupe de Lie. La mécanique quantique n'utilise que ces opérateurs infinitésimaux, et il est donc très difficile d'éviter l'ambiguïté. Mais il est possible de se passer des opérateurs infinitésimaux. Et quand on travaille sans eux, on peut aisément voir que le groupe d'invariance fondamental est plus vaste que ce que l'on attendait.

La première conséquence de l'existence de ce groupe plus vaste est la possibilité de définir, à partir de l'onde de Dirac, des dilatations d'une variété d'espace-temps intrinsèque sur la variété d'espace-temps usuelle. Ainsi l'espace-temps est double et l'onde de Dirac fait le lien entre les deux variétés d'espace-temps. Celles-ci sont très différentes l'une de l'autre, la variété intrinsèque est non isotrope, c'est une variété à torsion.

Dans plusieurs articles et deux précédents livres [16][17] ont été présentées plusieurs conséquences de ce groupe d'invariance plus vaste. Ce groupe d'invariance de forme régit non seulement la théorie de Dirac, mais aussi tout l'électromagnétisme, avec ou sans monopôles magnétiques, avec ou sans photons. Mais ce n'est pas tout, puisque ce groupe d'invariance de forme régit aussi les interactions électro-faibles et les interactions fortes [18].

Comme il est impossible de comprendre ce livre sans connaître l'algèbre Cl_3 de l'espace physique, un premier chapitre présente les algèbres de Clifford à un niveau élémentaire.

Le chapitre 2 revisite l'équation de Dirac, d'abord avec les matrices de Dirac, où l'on obtient d'une manière correcte du point de vue de la rigueur mathématique l'invariance relativiste de forme de la théorie. Ceci passe nécessairement par l'utilisation de l'algèbre de Clifford Cl_3 . Puis on explique à l'aide des tenseurs sans dérivation comment le formalisme des matrices 4×4 est incomplet. On considère les ondes planes. On présente la forme invariante de l'équation d'onde. La partie réelle est alors exactement la densité lagrangienne, autre vraie nouveauté venant de l'algèbre de Clifford. Enfin on présente la conjugaison de charge dans ce nouveau cadre.

Le chapitre 3 introduit notre équation non linéaire homogène et explique comment celle-ci est meilleure que l'équation de Dirac qui est son approxima-

tion linéaire. On prouve que les ondes planes ont toujours une énergie positive. La forme même de l'onde spinorielle et la forme que prend l'invariance relativiste introduisent la dilatation engendrée par l'onde, depuis une variété d'espace-temps intrinsèque sur la variété usuelle d'espace-temps. Ceci est la grande nouveauté en géométrie venant de la physique quantique. On explique les raisons physiques de normaliser l'onde. Le lien existant entre l'onde de la particule et l'onde de l'antiparticule donne une conjugaison de charge où seul le terme différentiel de l'équation invariante change de signe. Ceci rend le théorème CPT trivial et c'est aussi un excellent argument pour cette équation d'onde. On obtient la quantification des niveaux d'énergie et tous les résultats de la théorie linéaire dans le cas de l'atome d'hydrogène avec cette équation d'onde non linéaire homogène.

Le chapitre 4 présente l'invariance de l'électromagnétisme sous Cl_3^* , groupe multiplicatif des éléments inversibles de Cl_3 , pour l'électromagnétisme de Maxwell-de Broglie avec photon massif, pour l'électromagnétisme avec monopôles magnétiques, pour les quatre photons de la théorie de de Broglie-Lochak.

Le chapitre 5 présente plusieurs premières conséquences de ces nouveautés. L'anisotropie de l'espace-temps intrinsèque explique pourquoi nous voyons des muons et des taus en plus des électrons, leurs ressemblances et leurs différences. La variété intrinsèque a une torsion dont les composantes ont été calculées dans le cas d'une onde plane. Le terme de masse est lié à cette torsion. Puis on présente la construction de l'onde de de Broglie d'un système d'électrons comme une onde dans l'espace-temps ordinaire, et non pas dans un espace de configuration où l'espace et le temps n'ont pas le même statut, et à valeur dans l'algèbre d'espace. On présente aussi comme un contre-exemple une équation d'onde [19] qui ne peut pas être obtenue à partir d'un formalisme lagrangien, et on résout cette équation d'onde dans le cas de l'atome d'hydrogène.

Le chapitre 6 est consacré à notre principale avancée depuis [17]. On présente la théorie de jauge électro-faible dans le cadre de l'algèbre de Clifford d'espace-temps, d'abord dans le cas leptonique, puis dans le cas des quarks de première génération. Puis on se sert de l'algèbre de Clifford $Cl_{5,1}$ pour étendre l'invariance de jauge aux interactions fortes. Même si notre but est le même qu'en [18], on se sert ici d'une autre algèbre de Clifford, parce qu'on a besoin d'utiliser le lien entre l'onde de la particule et l'onde de l'antiparticule qui vient du modèle standard des interactions électro-faibles et fortes. On obtient alors dans ce cadre exactement le groupe de jauge $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$. Le plus par rapport au modèle standard est que l'insensibilité des leptons aux interactions fortes est automatique. On étend à $Cl_{5,1}$ l'invariance de forme des interactions de jauge. Ceci induit l'utilisation d'un espace-temps complexe à six dimensions dans lequel l'espace-temps usuel à quatre dimensions est bien séparé des dimensions supplémentaires. Enfin l'inexistence des ondes droites du neutrino et des quarks se traduit par deux identités dont il résulte l'inversibilité des valeurs de l'onde. Ces identités permettent l'existence d'une équation d'onde invariante de forme et invariante de jauge avec un terme de masse.

Le chapitre 7 est consacré aux monopôles magnétiques. On rend compte

des expériences russes et françaises. On précise leurs résultats, tout particulièrement la longueur d'onde. Puis on applique au monopôle magnétique l'étude faite dans les chapitres précédents sur les interactions électro-faibles.

Le chapitre 8 présente nos conclusions, expliquant les changements importants dans notre manière d'appréhender le modèle standard de la physique actuelle.

Pour les travaux à l'Ecole Centrale de Nantes, merci à Didier Priem pour son efficacité, son inventivité, sa gentillesse. Merci à Guillaume Racineux pour son constant soutien.

Chapitre 1

Algèbres de Clifford

On présente d'abord ce qu'est une algèbre de Clifford, puis on étudie l'algèbre du plan euclidien et l'algèbre de l'espace physique à trois dimensions. Celle-ci est aussi l'algèbre des matrices de Pauli. On y met l'espace-temps et l'invariance relativiste. Puis on présente l'algèbre d'espace-temps et les matrices de Dirac. On présente finalement l'algèbre de Clifford d'un espace-temps à 6 dimensions dont on a besoin pour l'étude des interactions faibles et fortes.

On a l'habitude, dans les livres de physique, de mettre dans des appendices en fin de livre les mathématiques, même quand elles sont nécessaires pour comprendre la partie principale du livre. Ici il est impossible d'expliquer les idées physiques en faisant abstraction des algèbres de Clifford, donc on commence par une présentation de cet outil indispensable.¹

On parlera ici seulement des algèbres de Clifford réelles. Les algèbres sur le corps des complexes existent aussi, et on pourrait s'attendre à ce qu'elles soient essentielles en physique quantique. L'algèbre utilisée le plus souvent ici est aussi une algèbre complexe, mais c'est sa structure d'algèbre réelle qui est utile en fait.²

Le but ici n'est pas de tout dire sur toute algèbre de Clifford, mais simplement de donner au lecteur les outils nécessaires pour comprendre les chapitres suivants de ce livre.

1. Les lecteurs connaissant le sujet peuvent faire une rapide révision. Par contre une lecture attentive est fortement recommandée pour les lecteurs souhaitant comprendre les idées physiques développées dans les chapitres suivants

2. Une algèbre de Clifford réelle a des vecteurs dont les composantes sont des nombres réels et qui ne sont jamais multipliés par i . Une algèbre de Clifford complexe a des vecteurs dont les composantes sont des nombres complexes qui peuvent être multipliés par i .

1.1 Qu'est-ce qu'une algèbre de Clifford ?

1 - C'est une algèbre [5][16], il y a donc deux opérations, l'addition notée $A + B$ et la multiplication notée AB , telles que, pour tout A, B, C :

$$\begin{aligned} A + (B + C) &= (A + B) + C \quad ; \quad A + B = B + A \\ A + 0 &= A \quad ; \quad A + (-A) = 0 \\ A(B + C) &= AB + AC \quad ; \quad (A + B)C = AC + BC \\ A(BC) &= (AB)C. \end{aligned} \tag{1.1}$$

2 - L'algèbre contient un ensemble de vecteurs, notés avec des flèches, avec un produit scalaire et une multiplication interne. Cette multiplication de Clifford des vecteurs $\vec{u}\vec{v}$ vérifie, pour tout vecteur $\vec{u}$ l'identité :

$$\vec{u}\vec{u} = \vec{u} \cdot \vec{u}. \tag{1.2}$$

où $\vec{u} \cdot \vec{v}$ indique le produit scalaire usuel de deux vecteurs.³ Ceci implique, puisque $\vec{u} \cdot \vec{u}$ est un nombre réel, que l'algèbre qui contient déjà les vecteurs contient aussi les nombres réels.

3 - Les nombres réels commutent avec tout élément de l'algèbre : si a est un nombre réel et si A est un élément quelconque de l'algèbre :

$$aA = Aa \tag{1.3}$$

$$1A = A. \tag{1.4}$$

Ces algèbres existent pour tout espace vectoriel de dimension finie, ce qui est suffisant dans ce livre.

La plus petite de ces algèbres est unique, à un isomorphisme près.

Remarque 1 : (1.1) et (1.4) entraînent que l'algèbre est elle-même un espace vectoriel, à ne pas confondre avec l'espace vectoriel de départ. Si l'espace vectoriel de départ est de dimension n , l'algèbre est de dimension 2^n . On verra par exemple en 1.3 que l'algèbre de l'espace physique à 3 dimensions est elle-même un espace vectoriel réel de dimension 8. Il n'est pas nécessaire de distinguer les espaces vectoriels à droite et à gauche, parce que les nombres réels commutent avec n'importe quoi. Il n'est pas non plus nécessaire de considérer la multiplication par un réel comme une troisième opération, parce qu'elle est un cas particulier de l'autre multiplication.

Remarque 2 : Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs orthogonaux, c'est-à-dire si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, l'égalité $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = (\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} + \vec{v})$ entraîne $\vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} = \vec{u}\vec{u} + \vec{u}\vec{v} + \vec{v}\vec{u} + \vec{v}\vec{v}$, donc on a :

$$0 = \vec{u}\vec{v} + \vec{v}\vec{u} \quad ; \quad \vec{v}\vec{u} = -\vec{u}\vec{v} \tag{1.5}$$

3. Cette égalité peut paraître étrange, mais elle donne ensuite les bons résultats. Et on a besoin de ces résultats dans les prochains chapitres.

C'est **le** changement par rapport aux règles usuelles de calcul sur les nombres, la multiplication n'est pas commutative et l'on doit donc prendre autant de précautions que pour le calcul matriciel.

Remarque 3 : L'addition est définie dans toute l'algèbre, qui contient à la fois des vecteurs et des nombres. Donc on ajoute les vecteurs et les nombres : $3 + 5\vec{i}$ est **autorisé**. Cela peut paraître perturbant ou étrange, mais on verra bientôt que ce n'est pas différent de $3 + 5i$. Et n'importe qui se servant des nombres complexes finit par s'y habituer.

Sous-algèbre paire : C'est la sous-algèbre engendrée par les produits d'un nombre pair de vecteurs : $\vec{u}\vec{v}$, $\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3\vec{e}_4, \dots$

Retournement : Le retournement $A \mapsto \widetilde{A}$ change l'ordre de tous les produits. Il ne change ni les nombres a ni les vecteurs : $\widetilde{a} = a$, $\widetilde{\vec{u}} = \vec{u}$, et l'on a, pour tout $\vec{u}$ et tout $\vec{v}$, tout A et tout B :

$$\widetilde{\vec{u}\vec{v}} = \vec{v}\vec{u} ; \quad \widetilde{AB} = \widetilde{B}\widetilde{A} ; \quad \widetilde{A+B} = \widetilde{A} + \widetilde{B}. \quad (1.6)$$

1.2 Algèbre de Clifford du plan euclidien

Cl_2 contient les nombres réels et les vecteurs du plan euclidien, qui s'écrivent $\vec{u} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$, où $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ forment une base orthonormée du plan, c'est-à-dire $\vec{e}_1^2 = \vec{e}_2^2 = 1$, $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 0$. Habituellement on pose : $\vec{e}_1\vec{e}_2 = i$. L'élément général de l'algèbre du plan s'écrit :

$$A = a + x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + ib \quad (1.7)$$

où a , x , y et b sont des nombres réels. Cela suffit parce que :

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 i &= \vec{e}_1(\vec{e}_1\vec{e}_2) = (\vec{e}_1\vec{e}_1)\vec{e}_2 = 1\vec{e}_2 = \vec{e}_2 \\ \vec{e}_2 i &= -\vec{e}_1 ; \quad i\vec{e}_2 = \vec{e}_1 ; \quad i\vec{e}_1 = -\vec{e}_2 \\ i^2 &= ii = i(\vec{e}_1\vec{e}_2) = (i\vec{e}_1)\vec{e}_2 = -\vec{e}_2\vec{e}_2 = -1 \end{aligned} \quad (1.8)$$

On doit faire tout de suite deux remarques :

1- La sous-algèbre paire Cl_2^+ est l'ensemble formé par tous les $a + ib$, donc c'est le corps des nombres complexes. On peut dire que le corps des complexes est sous-jacent dès que la dimension de l'espace de départ est supérieure à 1. Cette sous-algèbre est commutative.

2 - Ici le retournement est la conjugaison complexe : $\widetilde{i} = \widetilde{\vec{e}_1\vec{e}_2} = \vec{e}_2\vec{e}_1 = -i$

On obtient ensuite, pour tout $\vec{u}$ et tout $\vec{v}$ du plan : $\vec{u}\vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v} + i \det(\vec{u}, \vec{v})$, où $\det(\vec{u}, \vec{v})$ est le déterminant des deux vecteurs.

Pour établir que $(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 + [\det(\vec{u}, \vec{v})]^2 = \vec{u}^2 \vec{v}^2$, on peut se servir de $\vec{u}\vec{v}\vec{v}\vec{u}$ qui peut être calculé de deux manières, et l'on se rappellera que $\vec{v}\vec{v}$ est un nombre réel et commute donc avec n'importe quel élément de l'algèbre.

1.3 Algèbre de Clifford de l'espace physique

Cl_3 contient [2] les nombres réels et les vecteurs de l'espace physique à trois dimensions, qui s'écrivent donc : $\vec{u} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$, où x, y, z sont des nombres réels et $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ constituent une base orthonormée, c'est-à-dire vérifient :

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 = \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1 = 0 \quad ; \quad \vec{e}_1^2 = \vec{e}_2^2 = \vec{e}_3^2 = 1. \quad (1.9)$$

On pose :

$$i_1 = \vec{e}_2\vec{e}_3 \quad ; \quad i_2 = \vec{e}_3\vec{e}_1 \quad ; \quad i_3 = \vec{e}_1\vec{e}_2 \quad ; \quad i = \vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3. \quad (1.10)$$

ce qui donne :

$$i_1^2 = i_2^2 = i_3^2 = i^2 = -1 \quad (1.11)$$

$$i\vec{u} = \vec{u}i \quad ; \quad i\vec{e}_j = i_j \quad , \quad j = 1, 2, 3. \quad (1.12)$$

Pour obtenir (1.11) on peut utiliser la méthode donnant (1.8). Pour obtenir (1.12) on peut d'abord vérifier que i commute avec chaque $\vec{e}_j$.

L'élément général de Cl_3 s'écrit : $A = a + \vec{u} + i\vec{v} + ib$. Ceci donne $1+3+3+1 = 8 = 2^3$ dimensions pour Cl_3 .

Cinq remarques :

1 - Le centre de Cl_3 est l'ensemble des $a + ib$ qui sont les seuls éléments commutant avec tout élément de l'algèbre. Il est isomorphe au corps des complexes.

2 - La sous-algèbre paire Cl_3^+ est l'ensemble des $a + i\vec{v}$ qui est isomorphe au corps non commutatif des quaternions. Donc les quaternions sont implicitement présents dans les calculs dès que la dimension de l'espace vectoriel de départ est supérieure ou égale à 3.

3 - $\tilde{A} = a + \vec{u} - i\vec{v} - ib$; Le retournement est la conjugaison, tant pour les nombres complexes que pour les quaternions contenus dans Cl_3 .

4 - $i\vec{v}$ est ce que l'on appelle communément vecteur axial ou pseudo-vecteur tandis que $\vec{u}$ est communément appelé vrai vecteur ou vecteur tout court. Il est bien connu que cette situation est propre à la dimension 3.

5 - Il y a maintenant quatre termes différents et indépendants de carré -1, quatre manières indépendantes d'obtenir des nombres complexes. La théorie quantique a pris l'habitude d'utiliser un unique terme de carré -1, elle se comporte donc comme une théorie de géométrie plane (un vieux logiciel 2D). Et comme l'espace physique réel n'est pas plan, on verra ici l'utilité de ce logiciel 3D qu'est l'algèbre Cl_3 . En conséquence, à chaque fois qu'un i apparaît en physique quantique on est en droit de se poser la question de quel i il s'agit : i ou i_3 ?

1.3.1 Produit vectoriel, orientation

$\vec{u} \times \vec{v}$ désigne le produit vectoriel de $\vec{u}$ et $\vec{v}$. En utilisant les coordonnées dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, on peut facilement démontrer, pour tout $\vec{u}$ et tout $\vec{v}$:

$$\vec{u}\vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v} + i \vec{u} \times \vec{v} \quad (1.13)$$

$$(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 + (\vec{u} \times \vec{v})^2 = \vec{u}^2 \vec{v}^2 \quad (1.14)$$

$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ désigne le déterminant dont les colonnes contiennent les coordonnées des vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$, dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. En se servant à nouveau des coordonnées, il est possible de démontrer, pour tout $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$:

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \quad (1.15)$$

$$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{w} \cdot \vec{u})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w} \quad (1.16)$$

$$\vec{u}\vec{v}\vec{w} = i \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) + (\vec{v} \cdot \vec{w})\vec{u} - (\vec{w} \cdot \vec{u})\vec{v} + (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w} \quad (1.17)$$

De (1.15) on tire que $\vec{u} \times \vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$. (1.14) permet de calculer la longueur de $\vec{u} \times \vec{v}$, et (1.15) fournit son orientation. On rappelle succinctement qu'une base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est dite de sens direct, ou avoir la même orientation que $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ si $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) > 0$ et être de sens inverse, ou avoir l'orientation contraire si $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) < 0$. (1.17) permet d'établir que, $B = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ étant une base orthonormée quelconque, alors $\vec{u}\vec{v}\vec{w} = i$ si et seulement si B est directe, et $\vec{u}\vec{v}\vec{w} = -i$ si et seulement si B est inverse. Ainsi i est strictement lié à l'orientation de l'espace physique. Changer i en $-i$ est exactement équivalent à changer l'orientation de l'espace (c'est d'ailleurs la même chose pour le i du plan euclidien du paragraphe précédent). Le fait que i régit l'orientation de l'espace physique jouera un rôle important dans les prochains chapitres.

1.3.2 Algèbre de Pauli

L'algèbre de Pauli, introduite en physique dès 1926 pour rendre compte du spin de l'électron, est l'algèbre $M_2(\mathbb{C})$ des matrices complexes 2×2 . Elle est égale (isomorphe est plus exact) à Cl_3 , mais seulement en tant qu'algèbres sur le corps des nombres réels.⁴ Identifier les nombres complexes et les matrices scalaires, ainsi que les e_j aux matrices de Pauli σ_j suffit.⁵ Donc, z désignant

4. La dimension de l'algèbre de Pauli est 8 sur le corps des réels, et seulement 4 sur le corps des complexes.

5. Ce processus d'identification peut être considéré comme un manque de rigueur, mais en fait il est fréquent en mathématiques. Ce processus permet par exemple d'inclure les nombres entiers dans l'ensemble des nombres entiers relatifs, ou d'inclure les nombres réels dans le corps des nombres complexes. S'en passer entraîne des notations très compliquées. Cette identification revient à considérer les trois σ_j comme formant une base orthonormée de l'espace physique.

un nombre complexe quelconque, on écrira :

$$z = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} \quad (1.18)$$

$$\vec{e}_1 = \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{e}_2 = \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{e}_3 = \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.19)$$

C'est totalement compatible avec les calculs précédents parce que :

$$\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = i \quad (1.20)$$

$$\sigma_1 \sigma_2 = i \sigma_3 \quad ; \quad \sigma_2 \sigma_3 = i \sigma_1 \quad ; \quad \sigma_3 \sigma_1 = i \sigma_2 \quad (1.21)$$

Et en conséquence le renversé est identique à la matrice adjointe (transposée et conjuguée) :

$$\tilde{A} = A^\dagger = (A^*)^t \quad (1.22)$$

On dira donc dans la suite indifféremment algèbre de Pauli ou algèbre d'espace. Ceci ne plait pas aux Cliffordiens purs qui refusent d'utiliser le calcul matriciel. Quant aux physiciens, ils ont l'habitude d'utiliser l'algèbre de Pauli et de vieilles notations compliquées, ignorant trop souvent les avantages de l'algèbre de Clifford de l'espace physique : Cl_3 .

1.3.3 Trois conjugaisons sont utiles :

$A = a + \vec{u} + i\vec{v} + ib$ est la somme de l'élément pair $A_1 = a + i\vec{v}$ (quaternion) et de la partie impaire $A_2 = \vec{u} + ib$. On définit sur ces bases la conjugaison (automorphisme involutif) $A \mapsto \hat{A}$ telle que

$$\hat{A} = A_1 - A_2 = a - \vec{u} + i\vec{v} - ib \quad (1.23)$$

Cette conjugaison vérifie, pour tout élément A et tout B de Cl_3 :

$$\widehat{A+B} = \hat{A} + \hat{B} \quad ; \quad \widehat{AB} = \hat{A}\hat{B}. \quad (1.24)$$

C'est l'automorphisme principal de l'algèbre. Toute algèbre de Clifford possède un automorphisme semblable. A partir de cette conjugaison et du retournement on peut définir une troisième conjugaison :

$$\overline{A} = \hat{A}^\dagger = a - \vec{u} - i\vec{v} + ib \quad : \quad \overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B} \quad ; \quad \overline{AB} = \overline{B} \overline{A} \quad (1.25)$$

La composition, dans un ordre quelconque, de deux de ces trois conjugaisons donne la troisième. Seule $A \mapsto \hat{A}$ conserve l'ordre des produits, $A \mapsto \overline{A}$ et $A \mapsto A^\dagger$ inversent l'ordre des facteurs.

Maintenant a, b, c, d désignant des nombres complexes quelconques et a^* le complexe conjugué de a on peut établir que, pour tout $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de l'algèbre d'espace on a :

$$\tilde{A} = A^\dagger = \begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix} ; \quad \hat{A} = \begin{pmatrix} d^* & -c^* \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} ; \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad (1.26)$$

$$A\bar{A} = \bar{A}A = \det(A) = ad - bc ; \quad \hat{A}A^\dagger = A^\dagger\hat{A} = [\det(A)]^* \quad (1.27)$$

1.3.4 Gradient, divergence et rotationnel

Dans Cl_3 on considère un seul opérateur différentiel :

$$\vec{\partial} = \vec{e}_1\partial_1 + \vec{e}_2\partial_2 + \vec{e}_3\partial_3 = \begin{pmatrix} \partial_3 & \partial_1 - i\partial_2 \\ \partial_1 + i\partial_2 & -\partial_3 \end{pmatrix} \quad (1.28)$$

avec ⁶

$$\vec{x} = x^1\vec{e}_1 + x^2\vec{e}_2 + x^3\vec{e}_3 ; \quad \partial_j = \frac{\partial}{\partial x^j} \quad (1.29)$$

Le laplacien est simplement le carré de $\vec{\partial}$:

$$\Delta = (\partial_1)^2 + (\partial_2)^2 + (\partial_3)^2 = \vec{\partial}\vec{\partial} \quad (1.30)$$

Appliqué à un scalaire a , $\vec{\partial}$ est son gradient et appliqué à un vecteur $\vec{u}$ il en donne à la fois la divergence et le rotationnel :

$$\vec{\partial}a = \text{grad } a \quad (1.31)$$

$$\vec{\partial}\vec{u} = \vec{\partial} \cdot \vec{u} + i \vec{\partial} \times \vec{u} ; \quad \vec{\partial} \cdot \vec{u} = \text{div} \vec{u} ; \quad \vec{\partial} \times \vec{u} = \text{rot } \vec{u}. \quad (1.32)$$

1.3.5 L'espace-temps en algèbre d'espace

Avec des indices grecs qui prennent partout dans ce livre les valeurs 0, 1, 2, 3 et :

$$x^0 = ct ; \quad \vec{x} = x^1\vec{e}_1 + x^2\vec{e}_2 + x^3\vec{e}_3 ; \quad \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad (1.33)$$

on pose [2][44]

$$x = x^0 + \vec{x} = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix}. \quad (1.34)$$

6. Cet opérateur $\vec{\partial}$ est habituellement noté en mécanique quantique comme un produit scalaire, par exemple $\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}$. Il en résulte de nombreuses contorsions. Utiliser des notations simples est très utile pour optimiser les calculs.

Et alors l'espace-temps s'identifie à la partie auto-adjointe de l'algèbre de Pauli ($x^\dagger = x$) et l'on a

$$\widehat{x} = \overline{x} = x^0 - \vec{x} \quad (1.35)$$

$$\det(x) = x\widehat{x} = x \cdot x = (x^0)^2 - \vec{x}^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 \quad (1.36)$$

Le carré de la pseudo-norme de tout vecteur d'espace-temps est donc simplement le déterminant.⁷ Tout élément M de l'algèbre de Pauli est la somme d'un vecteur d'espace-temps v et du produit par i d'un second vecteur d'espace-temps w :

$$M = v + iw \quad (1.37)$$

$$v = \frac{1}{2}(M + M^\dagger) ; \quad v^\dagger = v \quad (1.38)$$

$$iw = \frac{1}{2}(M - M^\dagger) ; \quad w^\dagger = w. \quad (1.39)$$

Ces vecteurs d'espace-temps v et w sont uniques. On a maintenant besoin de deux opérateurs différentiel :

$$\nabla = \partial_0 - \vec{\partial} ; \quad \widehat{\nabla} = \partial_0 + \vec{\partial} \quad (1.40)$$

Ils permettent de calculer le dalembertien

$$\nabla \widehat{\nabla} = \widehat{\nabla} \nabla = (\partial_0)^2 - (\partial_1)^2 - (\partial_2)^2 - (\partial_3)^2 = \square \quad (1.41)$$

1.3.6 Invariance relativiste

Soit M un élément non nul quelconque de Cl_3 et soit R la transformation de l'espace-temps dans lui-même qui à tout x associe x' tel que

$$x' = x'^0 + \vec{x}' = R(x) = MxM^\dagger. \quad (1.42)$$

On note, si $\det(M) \neq 0$:

$$\det(M) = re^{i\theta}, \quad r = |\det(M)|. \quad (1.43)$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} (x'^0)^2 - (x'^1)^2 - (x'^2)^2 - (x'^3)^2 &= \det(x') = \det(MxM^\dagger) \\ &= re^{i\theta} \det(x) re^{-i\theta} = r^2 [(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2] \end{aligned} \quad (1.44)$$

R multiplie donc par r toute distance d'espace-temps et on l'appellera donc "dilatation de Lorentz de rapport r ". On pose, avec la convention usuelle de sommation des indices hauts et bas :

$$x'^\mu = R^\mu_\nu x^\nu. \quad (1.45)$$

7. On peut noter que cette pseudo-norme de la métrique d'espace-temps vient non pas d'un produit scalaire, c'est-à-dire d'une forme bilinéaire symétrique, mais d'un déterminant, c'est-à-dire d'une forme bilinéaire antisymétrique. On est ici très loin des espaces de Riemann.

On obtient alors pour tout $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0$:

$$2R_0^0 = |a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2 > 0 \quad (1.46)$$

x'^0 a donc le même signe que x^0 à l'origine : R conserve la flèche du temps. De plus on a (le calcul détaillé est en [14] A.2.4) :

$$\det(R_\nu^\mu) = r^4 \quad (1.47)$$

R conserve donc l'orientation de l'espace-temps, et comme elle conserve l'orientation du temps, elle conserve aussi l'orientation de l'espace.

Soit f l'application qui à M associe R . Soit M' une autre matrice quelconque, avec :

$$\det(M') = r'e^{i\theta'} \quad ; \quad R' = f(M') \quad ; \quad x'' = M'x'M'^\dagger. \quad (1.48)$$

On a

$$\begin{aligned} x'' &= M'x'M'^\dagger = M'(MxM^\dagger)M'^\dagger = (M'M)x(M'M)^\dagger \\ f(M') \circ f(M) &= f(M'M) \end{aligned} \quad (1.49)$$

f est donc un homomorphisme. Si l'on se restreint à $r \neq 0$, f devient un homomorphisme du groupe $(Cl_3^*, \times)$ dans le groupe $(D^*, \circ)$, où D^* est l'ensemble des dilatations de rapport non nul. Ces deux groupes sont des groupes de Lie. $(Cl_3^*, \times)$ est le groupe de Lie à 8 dimensions $GL(2, \mathbb{C})$. Au contraire $(D^*, \circ)$ est un groupe de Lie à seulement 7 dimensions, une dimension disparaît parce que le noyau de f n'est pas réduit à l'élément neutre : soit θ un nombre réel quelconque et soit M vérifiant

$$M = e^{i\frac{\theta}{2}} = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\theta}{2}} \end{pmatrix} \quad ; \quad \det(M) = e^{i\theta} \quad (1.50)$$

on a alors :

$$x' = MxM^\dagger = e^{i\frac{\theta}{2}}xe^{-i\frac{\theta}{2}} = x. \quad (1.51)$$

$f(M)$ est donc l'identité et M appartient au noyau de f , qui est ainsi un groupe à un paramètre, θ , et il ne reste que 7 paramètres réels dans D^* , 6 angles définissant une rotation de Lorentz, plus le rapport de dilatation. Par exemple, si

$$M = e^{a+b\sigma_1} = e^a(\cosh(b) + \sinh(b)\sigma_1) \quad (1.52)$$

alors la transformation R définie en (1.42) vérifie

$$\begin{aligned} x' &= MxM^\dagger = e^{a+b\sigma_1}(x^0 + x^1\sigma_1 + x^2\sigma_2 + x^3\sigma_3)e^{a+b\sigma_1} \\ &= e^{2a}[e^{2b\sigma_1}(x^0 + x^1\sigma_1) + x^2\sigma_2 + x^3\sigma_3]. \end{aligned} \quad (1.53)$$

On a alors

$$\begin{aligned} x'^0 + x'^1 \sigma_1 &= e^{2a} (\cosh(2b) + \sinh(2b) \sigma_1) (x^0 + x^1 \sigma_1) \\ x'^0 &= e^{2a} (\cosh(2b) x^0 + \sinh(2b) x^1) \end{aligned} \quad (1.54)$$

$$x'^1 = e^{2a} (\sinh(2b) x^0 + \cosh(2b) x^1) \quad (1.55)$$

$$x'^2 = e^{2a} x^2 \quad (1.56)$$

$$x'^3 = e^{2a} x^3 \quad (1.57)$$

On peut voir que R est le produit d'une rotation de Lorentz propre mixant la composante temporelle x^0 et la composante spatiale x^1 et d'une homothétie de rapport e^{2a} . Ensuite si

$$M = e^{a+bi\sigma_1} = e^a (\cos(b) + \sin(b)i\sigma_1) \quad (1.58)$$

alors la transformation R définie en (1.42) vérifie

$$\begin{aligned} x' &= MxM^\dagger = e^{a+bi\sigma_1} (x^0 + x^1 \sigma_1 + x^2 \sigma_2 + x^3 \sigma_3) e^{a-bi\sigma_1} \\ &= e^{2a} [x^0 + x^1 \sigma_1 + e^{2bi\sigma_1} (x^2 \sigma_2 + x^3 \sigma_3)]. \end{aligned} \quad (1.59)$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} x'^2 \sigma_2 + x'^3 \sigma_3 &= e^{2a} (\cos(2b) + \sin(2b)i\sigma_1) (x^2 \sigma_2 + x^3 \sigma_3) \\ x'^0 &= e^{2a} x^0 \end{aligned} \quad (1.60)$$

$$x'^1 = e^{2a} x^1 \quad (1.61)$$

$$x'^2 = e^{2a} (\cos(2b) x^2 + \sin(2b) x^3) \quad (1.62)$$

$$x'^3 = e^{2a} (-\sin(2b) x^2 + \cos(2b) x^3) \quad (1.63)$$

Et R est donc le produit d'une rotation d'axe Ox_1 et d'angle $2b$ et de l'homothétie de rapport e^{2a} .

1.3.7 Groupe de Lorentz restreint

Si on ajoute maintenant en plus la condition $\det(M) = 1$, l'ensemble des matrices M s'appelle $SL(2, \mathbb{C})$, et (1.44) devient :

$$(x'^0)^2 - (x'^1)^2 - (x'^2)^2 - (x'^3)^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 \quad (1.64)$$

R est donc une rotation de Lorentz et l'ensemble des R est appelé le groupe de Lorentz restreint, habituellement noté $\mathcal{L}_+^\uparrow$ (il conserve l'orientation de l'espace et du temps). Avec (1.50) on a :

$$1 = e^{i\theta} \quad ; \quad \theta = k2\pi \quad ; \quad \frac{\theta}{2} = k\pi \quad ; \quad M = \pm 1 \quad (1.65)$$

Remarque 1 : La mécanique quantique ne distingue pas M de R , elle confond $SL(2, \mathbb{C})$ et $\mathcal{L}_+^\uparrow$ et appelle "représentations à deux valeurs de $\mathcal{L}_+^\uparrow$ " les représentations de $SL(2, \mathbb{C})$. Cette confusion provient d'abord de l'usage des représentations infinitésimales, donc on travaille en fait dans l'algèbre de Lie du groupe. Et le malheur veut que l'algèbre de Lie de $SL(2, \mathbb{C})$ et celle de $\mathcal{L}_+^\uparrow$ sont exactement égales. $SL(2, \mathbb{C})$ est le groupe de recouvrement de $\mathcal{L}_+^\uparrow$. En réalité $SL(2, \mathbb{C})$ et $\mathcal{L}_+^\uparrow$ sont tout à fait différents, par exemple tout élément peut se mettre sous la forme e^A dans $\mathcal{L}_+^\uparrow$ et ceci est faux dans $SL(2, \mathbb{C})$. Il est donc parfaitement inadmissible d'avoir si longtemps négligé le fait que quand un angle b est présent dans M , c'est un angle $2b$ qui est présent dans R .

Remarque 2 : Nous sommes obligés de distinguer le groupe des M du groupe des R , dès que l'angle θ n'est pas nul, parce que ces deux groupes ne sont pas de même dimension et ne sont donc pas similaires, même dans le voisinage de l'élément neutre.

Remarque 3 : $SL(2, \mathbb{C})$ contient comme sous-groupe le groupe $SU(2)$ des matrices complexes unitaires 2×2 de déterminant 1. La restriction de f à ce sous-groupe est un homomorphisme de $SU(2)$ dans le groupe $SO(3)$ des rotations de l'espace. Le noyau de cet homomorphisme est aussi ± 1 .

Remarque 4 : Il y a en fait deux homomorphismes non équivalents de $(Cl_3^*, \times)$ dans le groupe $(D^*, \circ)$. Le second homomorphisme $\hat{f}$ est défini par

$$x' = \hat{R}(x) = \widehat{M}x\overline{M} ; \quad \hat{R} = \hat{f}(M). \quad (1.66)$$

1.4 Algèbre de Clifford de l'espace-temps

$Cl_{1,3}$ contient les nombres réels et les vecteurs d'espace-temps $\mathbf{x}$ tels que

$$\mathbf{x} = x^0\gamma_0 + x^1\gamma_1 + x^2\gamma_2 + x^3\gamma_3 = x^\mu\gamma_\mu. \quad (1.67)$$

Les quatre γ_μ forment une base orthonormale de l'espace-temps :⁸

$$(\gamma_0)^2 = 1 ; \quad (\gamma_1)^2 = (\gamma_2)^2 = (\gamma_3)^2 = -1 ; \quad \gamma_\mu \cdot \gamma_\nu = 0, \quad \mu \neq \nu. \quad (1.68)$$

Le terme général de $Cl_{1,3}$ est une somme :

$$N = s + v + b + pv + ps \quad (1.69)$$

où s est un nombre réel, v est un vecteur d'espace-temps, b est un bivecteur, pv est un pseudo-vecteur et ps est un pseudo-scalaire. Il y a $1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16 = 2^4$ dimensions sur le corps des réels, car : il y a 6 bivecteurs indépendants :

8. Les utilisateurs de l'algèbre de Clifford se partagent à peu près par moitié entre ceux qui utilisent un signe + pour le temps (Hestenes [30][32]), et ceux qui utilisent un signe - pour le temps (Deheuvels [27]). Il semble qu'aucune propriété physique ne permet de préférer l'un à l'autre. On utilise ici un signe + pour le temps, ce qui correspond au choix d'Hestenes. C'est une des différences importantes par rapport à la relativité générale, où le tenseur métrique a des propriétés géométriques liées à la gravitation.

$\gamma_{01} = \gamma_0\gamma_1$, γ_{02} , γ_{03} , γ_{12} , γ_{23} , γ_{31} , et $\gamma_{ji} = -\gamma_{ij}$, $j \neq i$, 4 pseudo-vecteurs : γ_{012} , γ_{023} , γ_{031} , γ_{123} et un pseudo-scalaire :

$$ps = p\gamma_{0123} \quad ; \quad \gamma_{0123} = \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 \quad (1.70)$$

où p est un nombre réel.

La partie paire de N est $s + b + ps$, la partie impaire est $v + pv$. L'automorphisme principal est $N \mapsto \hat{N} = s - v + b - pv + ps$.

Le retourné de N est

$$\tilde{N} = s + v - b - pv + ps \quad (1.71)$$

Parmi les 16 générateurs de $Cl_{1,3}$, 10 ont pour carré -1 et 6 ont pour carré 1 :

$$\begin{aligned} 1^2 &= \gamma_{01}^2 = \gamma_{02}^2 = \gamma_{03}^2 = \gamma_0^2 = \gamma_{123}^2 = 1 \\ \gamma_1^2 &= \gamma_2^2 = \gamma_3^2 = \gamma_{12}^2 = \gamma_{23}^2 = \gamma_{31}^2 \\ &= \gamma_{012}^2 = \gamma_{023}^2 = \gamma_{031}^2 = \gamma_{0123}^2 = -1 \end{aligned} \quad (1.72)$$

Remarque 1 : Si l'on utilise un signe + pour l'espace, alors on a 10 générateurs de carré 1 et 6 de carré -1. Les deux algèbres de Clifford ne sont donc pas identiques. Et cependant on ne connaît pas de raison physique de préférer l'une à l'autre.

Remarque 2 : La sous-algèbre paire $Cl_{1,3}^+$, formée par tous les éléments pairs $N = s + b + ps$ est de dimension 8 et est isomorphe à Cl_3 . On verra ceci en détail dans le prochain paragraphe en utilisant les matrices de Dirac. La sous-algèbre paire de $Cl_{3,1}$ est aussi isomorphe à Cl_3 .

L'opérateur différentiel privilégié, dans $Cl_{1,3}$, est :

$$\partial = \gamma^\mu \partial_\mu \quad ; \quad \gamma^0 = \gamma_0 \quad ; \quad \gamma^j = -\gamma_j, \quad j = 1, 2, 3. \quad (1.73)$$

Il vérifie :

$$\partial\partial = \square = (\partial_0)^2 - (\partial_1)^2 - (\partial_2)^2 - (\partial_3)^2. \quad (1.74)$$

1.4.1 Matrices de Dirac

La plupart des physiciens n'utilisent pas directement l'algèbre de Clifford de l'espace-temps, ils utilisent à la place une algèbre matricielle⁹, engendrée par les matrices de Dirac. Ces matrices ne sont pas définies de manière unique. La manière la plus économique de lier $Cl_{1,3}$ à Cl_3 consiste à poser¹⁰ :

$$\gamma_0 = \gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \gamma^j = -\gamma_j = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{pmatrix} \quad (1.75)$$

9. Habituellement l'algèbre utilisée est $M_4(\mathbb{C})$, une algèbre sur le corps des nombres complexes. Cette algèbre est de dimension 16 sur le corps des complexes, donc de dimension 32 sur le corps des réels. Ceci suffit à prouver que $M_4(\mathbb{C}) \neq Cl_{1,3}$.

10. Ce choix de matrices de Dirac n'est pas le choix utilisé en théorie de Dirac pour calculer les solutions pour l'atome d'hydrogène, mais c'est le choix qui est fait pour les vitesses élevées et lorsque la relativité restreinte est nécessaire. C'est aussi le choix fait pour la théorie électrofaible. On verra dans l'annexe C que ce choix permet aussi de résoudre l'équation dans le cas de l'atome d'hydrogène.

On a alors :

$$\boldsymbol{\partial} = \gamma^\mu \partial_\mu = \begin{pmatrix} 0 & \nabla \\ \widehat{\nabla} & 0 \end{pmatrix} \quad (1.76)$$

On vérifie aisément que :

$$\gamma_{0j} = \begin{pmatrix} -\sigma_j & 0 \\ 0 & \sigma_j \end{pmatrix}; \gamma_{23} = \begin{pmatrix} -i\sigma_1 & 0 \\ 0 & -i\sigma_1 \end{pmatrix}; \gamma_{0123} = \begin{pmatrix} iI & 0 \\ 0 & -iI \end{pmatrix} \quad (1.77)$$

Isomorphisme entre $Cl_{1,3}^+$ et Cl_3 : soit N un élément pair quelconque. Avec :

$$\begin{aligned} N &= a + Bi + ps \quad ; \quad Bi = u_1\gamma_{10} + u_2\gamma_{20} + u_3\gamma_{30} + v_1\gamma_{32} + v_2\gamma_{13} + v_3\gamma_{21} \\ ps &= b\gamma_{0123} \end{aligned} \quad (1.78)$$

$$\begin{aligned} M &= a + \vec{u} + i\vec{v} + ib \quad ; \quad \vec{u} = u_1\sigma_1 + u_2\sigma_2 + u_3\sigma_3 \\ \vec{v} &= v_1\sigma_1 + v_2\sigma_2 + v_3\sigma_3 \end{aligned} \quad (1.79)$$

Bi est un bivecteur et ps est un pseudo-vecteur d'espace-temps. On a avec le choix (1.75) fait pour les matrices de Dirac :

$$N = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & \widehat{M} \end{pmatrix} ; \quad \tilde{N} = \begin{pmatrix} \overline{M} & 0 \\ 0 & M^\dagger \end{pmatrix}. \quad (1.80)$$

Comme la conjugaison $M \mapsto \widehat{M}$ est compatible avec l'addition et avec la multiplication, l'algèbre des M est isomorphe à l'algèbre des N . Comme N contient à la fois M et $\widehat{M}$, les matrices de Dirac utilisent les deux représentations non équivalentes de Cl_3^* .

1.5 Algèbre de Clifford $Cl_{5,1} = Cl_{1,5}$

On aura besoin dans le chapitre 6 de l'algèbre de Clifford d'un espace-temps plus vaste avec un espace de dimension 5. Le vecteur général $\underline{x}$ de cet espace-temps élargi s'écrit :

$$\underline{x} = x^a \Lambda_a = x^\mu \Lambda_\mu + x^4 \Lambda_4 + x^5 \Lambda_5 \quad (1.81)$$

$$x^a \Lambda_a = \sum_{n=0}^{n=5} x^n \Lambda_n ; \quad x^\mu \Lambda_\mu = \sum_{n=0}^{n=3} x^n \Lambda_n \quad (1.82)$$

$$(\underline{x})^2 = -(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2 + (x^5)^2. \quad (1.83)$$

On relie l'algèbre d'espace-temps $Cl_{1,3}$ à cette algèbre plus vaste en utilisant la représentation matricielle suivante, avec $\mu = 0, 1, 2, 3$:

$$\Lambda_\mu = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma_\mu \\ \gamma_\mu & 0 \end{pmatrix} ; \quad \Lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & I_4 \\ I_4 & 0 \end{pmatrix} ; \quad \Lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{i} \\ \mathbf{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.84)$$

où I_4 est la matrice unité 4×4 et où $\mathbf{i} = \gamma_{0123}$ (voyez (1.77)). On utilise toujours la représentation matricielle (1.75). On a :

$$\Lambda_{\mu\nu} = \Lambda_\mu \Lambda_\nu = \begin{pmatrix} -\gamma_{\mu\nu} & 0 \\ 0 & -\gamma_{\mu\nu} \end{pmatrix} \quad (1.85)$$

$$\Lambda_{\mu\nu\rho} = \Lambda_{\mu\nu} \Lambda_\rho = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_{\mu\nu\rho} \\ -\gamma_{\mu\nu\rho} & 0 \end{pmatrix} \quad (1.86)$$

$$\Lambda_{0123} = \Lambda_{01} \Lambda_{23} = \begin{pmatrix} \gamma_{0123} & 0 \\ 0 & \gamma_{0123} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & 0 \\ 0 & \mathbf{i} \end{pmatrix} \quad (1.87)$$

$$\Lambda_{45} = \Lambda_4 \Lambda_5 = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & 0 \\ 0 & -\mathbf{i} \end{pmatrix} \quad (1.88)$$

$$\Lambda_{012345} = \Lambda_{0123} \Lambda_{45} = \begin{pmatrix} -I_4 & 0 \\ 0 & I_4 \end{pmatrix} \quad (1.89)$$

Le terme général de cette algèbre s'écrit :

$$\Psi = \Psi_0 + \Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_3 + \Psi_4 + \Psi_5 + \Psi_6 ; \quad \Psi_0 = sI_8, s \in \mathbb{R}, \quad (1.90)$$

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= \sum_{a=0}^5 N^a \Lambda_a, \quad \Psi_2 = \sum_{0 \leq a < b \leq 5} N^{ab} \Lambda_{ab}, \quad \Psi_3 = \sum_{0 \leq a < b < c \leq 5} N^{abc} \Lambda_{abc} \\ \Psi_4 &= \sum_{0 \leq a < b < c < d \leq 5} N^{abcd} \Lambda_{abcd}, \quad \Psi_5 = \sum_{0 \leq a < b < c < d < e \leq 5} N^{abcde} \Lambda_{abcde} \end{aligned} \quad (1.91)$$

$$\Psi_6 = p \Lambda_{012345}, \quad p \in \mathbb{R}. \quad (1.92)$$

où les N^{ind} sont des nombres réels. On utilisera au chapitre 6 :

$$\begin{aligned} P^+ &= \frac{1}{2}(I_8 - \Lambda_{012345}) = \begin{pmatrix} I_4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ P^- &= \frac{1}{2}(I_8 + \Lambda_{012345}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_4 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.93)$$

On considère maintenant les six éléments suivants de l'algèbre :

$$L_a = \Lambda_{012345} \Lambda_a ; \quad a = 0, 1, 2, 3, 4, 5. \quad (1.94)$$

On a alors

$$L_\mu = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_\mu \\ \gamma_\mu & 0 \end{pmatrix}; \quad L_4 = \begin{pmatrix} 0 & -I_4 \\ I_4 & 0 \end{pmatrix}; \quad L_5 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{i} \\ \mathbf{i} & 0 \end{pmatrix} \quad (1.95)$$

$$L_{ab} = -\Lambda_{ab}, \quad 0 \leq a \leq b \leq 5 \quad (1.96)$$

$$L_{abcd} = \Lambda_{abcd}, \quad 0 \leq a < b < c < d \leq 5 \quad (1.97)$$

$$L_{012345} = -\Lambda_{012345} = \begin{pmatrix} I_4 & 0 \\ 0 & -I_4 \end{pmatrix} \quad (1.98)$$

$$\Lambda_a = L_a L_{012345}. \quad (1.99)$$

Ces six L_a sont les générateurs de l'algèbre $L_{1,5}$ car (1.96) entraîne

$$(L_0)^2 = 1; (L_a)^2 = -1, \quad a = 1, 2, 3, 4, 5. \quad (1.100)$$

Et l'algèbre engendrée par les L_a est une sous-algèbre de l'algèbre engendrée par les Λ_a . Inversement (1.99) entraîne que l'on pourrait partir des L_a et obtenir les Λ_a comme pseudo-vecteurs. Ceci explique pourquoi $Cl_{5,1} = Cl_{1,5}$. Les vecteurs de $Cl_{1,5}$ sont les pseudo-vecteurs de $Cl_{5,1}$ et inversement. Donc les sommes de vecteurs et de pseudo-vecteurs dont nous aurons besoin au chapitre 6 seront indépendantes du choix de la signature.

Chapitre 2

L'équation de Dirac

On étudie ici de deux manières différentes l'équation d'onde de Dirac pour l'électron. On la présente d'abord dans le cadre des matrices de Dirac : équation du second ordre, courant conservatif, tenseurs sans dérivation, invariance de jauge. L'invariance relativiste exige l'usage de l'algèbre d'espace, dans laquelle on réécrit toute la théorie de Dirac. On obtient de nouveaux tenseurs. On étudie le lien entre la forme invariante de l'équation d'onde et la densité lagrangienne. On revisite la conjugaison de charge

Une partie importante du modèle standard est constituée par l'équation d'onde de Dirac. Ceci tient au fait que les électrons, les neutrinos, les quarks, sont des objets quantiques avec un spin $1/2$. Et le modèle standard explique le spin $1/2$ comme une conséquence relativiste de l'équation d'onde de Dirac.

2.1 Avec les matrices de Dirac

Le point de départ du travail de Dirac fut l'équation d'onde de Pauli pour l'électron, qui utilise une onde avec deux composantes complexes mixées par les matrices de Pauli. Les équations d'onde de Schrödinger et de Pauli contiennent une dérivée partielle du premier ordre par rapport au temps et des dérivations du second ordre par rapport aux coordonnées d'espace. Ceci ne peut pas être satisfaisant pour une équation d'onde relativiste. Aussi Dirac chercha une équation d'onde avec seulement des dérivées partielles du premier ordre, capable de donner au second ordre l'équation des ondes matérielles. Cela nécessitait l'utilisation de matrices ainsi que Pauli l'avait fait. Dirac [28] comprit que plus de composantes étaient nécessaires. Son équation d'onde prouve que quatre

composantes suffisent. Avec (1.75) cette équation s'écrit ¹

$$0 = [\gamma^\mu (\partial_\mu + iqA_\mu) + im]\psi ; \quad q = \frac{e}{\hbar c} ; \quad m = \frac{m_0 c}{\hbar} \quad (2.1)$$

avec la convention usuelle sommant les indices hauts et bas. Les A_μ sont les composantes du vecteur d'espace-temps qu'est le potentiel électromagnétique extérieur. e est la charge de l'électron, m_0 est sa masse propre. Même avec une signature d'espace-temps bien définie, les matrices de la théorie ne sont pas définies de manière unique. Le choix que nous avons fait en (1.75) permet l'utilisation des spineurs de Weyl ξ et η . Ceux-ci jouent un rôle fondamental, d'abord pour l'invariance relativiste de la théorie, deuxièmement dans la théorie du monopôle magnétique de Lochak [39], enfin dans les interactions électro-faibles au chapitre 6. Avec eux l'onde ψ est la matrice-colonne :

$$\psi = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} ; \quad \xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} ; \quad \eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

L'équation de Dirac est, comme l'équation de Schrödinger, une équation d'onde linéaire. Elle ne contient que des dérivées partielles et des produits de matrices, donc les combinaisons linéaires de solutions sont aussi des solutions de l'équation d'onde.

2.1.1 Équation du second ordre

En l'absence de champ électromagnétique extérieur et avec (1.76) l'équation de Dirac s'écrit

$$\partial\psi = -im\psi \quad (2.3)$$

et donne au second ordre :

$$\square\psi = \partial\partial\psi = \partial(-im\psi) = -im\partial\psi = (-im)(-im)\psi = -m^2\psi \quad (2.4)$$

On obtient alors l'équation attendue au second ordre :

$$(\square + m^2)\psi = 0 \quad (2.5)$$

1. Les premiers travaux sur l'équation de Dirac [28] [24] utilisent une variable temporelle imaginaire qui permet d'utiliser une signature + + + + pour l'espace-temps. Ceci permet certes de ne pas avoir à distinguer les indices contravariants ou covariants des tenseurs. Cela apporte aussi des difficultés, les composantes de tenseurs sont soit réelles, soit imaginaires. Cela cache aussi que les matrices de la théorie ne peuvent pas être toutes hermitiennes. L'algèbre sur le corps des complexes engendrée par les matrices de Dirac $M_4(\mathbb{C})$ est de dimension 16 sur le corps des complexes mais de dimension 32 sur le corps des réels. Cette algèbre ne peut donc pas être isomorphe à l'algèbre de Clifford de l'espace-temps, qui est de dimension 16 sur le corps des réels, même si on a utilisé en 1.4.1 une sous-algèbre de $M_4(\mathbb{C})$ pour représenter $Cl_{1,3}$ et pour lier $Cl_{1,3}$ et Cl_3 .

2.1.2 Courant conservatif

En utilisant les matrices adjointes l'équation de Dirac devient

$$0 = \psi^\dagger [(\partial_\mu - iqA_\mu)\gamma^{\mu\dagger} - im] \quad (2.6)$$

On multiplie ensuite à droite par γ_0 , on pose²

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma_0 \quad (2.7)$$

et on obtient l'équation d'onde sous la forme équivalente suivante :

$$0 = \bar{\psi} [(\partial_\mu - iqA_\mu)\gamma^\mu - im] \quad (2.8)$$

Multipliant (2.1) à gauche par $\bar{\psi}$, (2.8) à droite par ψ puis ajoutant, on obtient :

$$0 = \partial_\mu (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi) \quad (2.9)$$

Il existe donc un courant conservatif ($\partial_\mu J^\mu = 0$), le courant J , dont les composantes contravariantes sont définies par

$$J^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \quad (2.10)$$

La composante de temps de ce vecteur d'espace-temps vérifie

$$J^0 = |\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 + |\eta_1|^2 + |\eta_2|^2 \quad (2.11)$$

et peut donc être interprétée, comme pour l'équation de Schrödinger, comme donnant la densité de probabilité de présence de l'électron.

2.1.3 Tenseurs

Le courant J est l'un des tenseurs de la théorie de Dirac dont la définition, à partir de l'onde, est faite sans usage de dérivées partielles. D'autres quantités du même type ont été remarquées, tout d'abord un scalaire

$$\Omega_1 = \bar{\psi} \psi ; \quad \bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma_0 = (\eta^\dagger \quad \xi^\dagger). \quad (2.12)$$

Ensuite six

$$S^{\mu\nu} = i\bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^\nu \psi \quad (2.13)$$

sont les composantes d'un tenseur antisymétrique de rang 2. Les quatre K^μ

$$K^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \psi ; \quad \gamma_5 = -i\gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

2. Le $\bar{\psi}$ du formalisme de Dirac n'a rien à voir avec le $\bar{M}$ de l'algèbre de Pauli.

sont les composantes d'un pseudo-vecteur d'espace-temps, dual d'un tenseur antisymétrique de rang 3. Finalement

$$\Omega_2 = -i\bar{\psi}\gamma_5\psi \quad (2.15)$$

est un pseudo-scalaire et permet de définir l'invariant ρ et l'angle β d'Yvon-Takabayasi :

$$\Omega_1 = \rho \cos \beta ; \quad \Omega_2 = \rho \sin \beta ; \quad \Omega_1 + i\Omega_2 = \rho e^{i\beta}. \quad (2.16)$$

Avec les spineurs de Weyl on a :

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \xi^\dagger \eta + \eta^\dagger \xi ; \quad \Omega_2 = i(\xi^\dagger \eta - \eta^\dagger \xi) \\ \rho e^{i\beta} &= \Omega_1 + i\Omega_2 = 2\eta^\dagger \xi = 2(\eta_1^* \xi_1 + \eta_2^* \xi_2) \\ \rho e^{-i\beta} &= \Omega_1 - i\Omega_2 = 2\xi^\dagger \eta = 2(\eta_1 \xi_1^* + \eta_2 \xi_2^*) \end{aligned} \quad (2.17)$$

Ces tenseurs ont été d'autant mieux étudiés que les physiciens espéraient relier la théorie à la physique pré-quantique, où les grandeurs étudiées sont des vecteurs et des tenseurs. En fait ces 16 densités tensorielles que nous venons de rencontrer ne savent rien de la phase de l'onde, car elles sont invariantes de jauge. On voit cela maintenant.

2.1.4 Invariances de jauge

L'équation de Dirac (2.1) est invariante sous la transformation de jauge :

$$\psi \mapsto \psi' = e^{ia}\psi ; \quad A_\mu \mapsto A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{q}\partial_\mu a \quad (2.18)$$

car on a :

$$\begin{aligned} &[\gamma^\mu(\partial_\mu + iqA_\mu') + im]\psi' \\ &= \gamma^\mu[i\partial_\mu a e^{ia}\psi + e^{ia}\partial_\mu \psi + iq(A_\mu - \frac{1}{q}\partial_\mu a)e^{ia}\psi] + ime^{ia}\psi \\ &= e^{ia}[\gamma^\mu(\partial_\mu + iqA_\mu) + im]\psi \end{aligned} \quad (2.19)$$

La première conséquence de cette invariance de jauge est que l'onde peut être multipliée par i , c'est pourquoi on utilise des espaces vectoriels complexes en théorie de Dirac. Ensuite le théorème de Noether relie cette invariance de jauge à l'existence d'un courant conservatif (voir [16] B.1.2). Dans le cas de l'équation de Dirac le calcul des variations permet d'obtenir l'équation d'onde (2.1) à partir de la densité lagrangienne :

$$-\mathcal{L} = \frac{1}{2}[(\bar{\psi}\gamma^\mu(-i\partial_\mu + qA_\mu)\psi) + (\bar{\psi}\gamma^\mu(-i\partial_\mu + qA_\mu)\psi)^\dagger] + m\bar{\psi}\psi \quad (2.20)$$

Et le théorème de Noether relie l'invariance de cette densité lagrangienne sous la transformation de jauge (2.18) à la conservation du courant J . Les densités tensorielles du précédent paragraphe contiennent toutes un facteur ψ et

un facteur $\bar{\psi}$, le premier est multiplié par e^{ia} et le second par e^{-ia} dans la transformation de jauge, et donc ces densités tensorielles sont invariantes de jauge.

Le point de départ de la théorie du monopôle magnétique de G. Lochak [39] est l'existence, dans le cas d'une masse propre nulle, d'une seconde invariance de jauge qui est possible parce que γ_{0123} anticommute avec chacune des quatre matrices γ^μ . Il a établi que l'équation de Dirac pouvait être invariante sous cette jauge si le terme de masse était remplacé par un terme de masse qui rend l'équation non linéaire. Et cette jauge peut être locale si un terme de potentiel adéquat est ajouté, ce qui donne :

$$[\gamma^\mu(\partial_\mu - \frac{ig}{\hbar c} B_\mu \gamma_5) + \frac{1}{2} \frac{m(\rho^2)c}{\hbar} (\Omega_1 - i\Omega_2 \gamma_5)]\psi = 0 \quad (2.21)$$

où g est la charge du monopôle, les B_μ sont les pseudo-potentiels de Cabibbo et Ferrari. On se servira au chapitre 3 de ce terme de masse dans un cas particulier.

2.1.5 Invariance relativiste

Avec les notations et les résultats du paragraphe 1.3.6 la transformation R définie par (1.42) est une dilatation de Lorentz. Avec la matrice N de (1.80) le retourné est

$$\tilde{N} = \begin{pmatrix} \overline{M} & 0 \\ 0 & M^\dagger \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

Et l'on a avec R de (1.42) et (1.45), avec N de (1.80), pour M et pour $\nu = 0, 1, 2, 3$ (preuve en [14] A.2.2) :

$$R_\mu^\nu \gamma^\mu = \tilde{N} \gamma^\nu N. \quad (2.23)$$

On a aussi

$$\partial'_\nu = \frac{\partial}{\partial x'^\nu} ; \quad \partial_\mu = R_\mu^\nu \partial'_\nu ; \quad A_\mu = R_\mu^\nu A'_\nu \quad (2.24)$$

et donc on obtient :

$$\begin{aligned} 0 &= [\gamma^\mu(\partial_\mu + iqA_\mu) + im]\psi \\ &= [\gamma^\mu R_\mu^\nu(\partial'_\nu + iqA'_\nu) + im]\psi \\ &= [\tilde{N} \gamma^\nu N(\partial'_\nu + iqA'_\nu) + im]\psi. \end{aligned}$$

Et si l'on restreint M à appartenir à $SL(2, \mathbb{C})$, on a $M\overline{M} = \det(M) = 1$, donc $\overline{M} = M^{-1}$ et $\tilde{N} = N^{-1}$ ce qui permet d'écrire

$$[\tilde{N} \gamma^\nu N(\partial'_\nu + iqA'_\nu) + im]\psi = N^{-1}[\gamma^\nu(\partial'_\nu + iqA'_\nu) + im]N\psi. \quad (2.25)$$

Ainsi la théorie de Dirac suppose :

$$\psi' = N\psi \quad (2.26)$$

ce qui donne

$$0 = [\gamma^\mu(\partial_\mu + iqA_\mu) + im]\psi = N^{-1}[\gamma^\mu(\partial'_\mu + iqA'_\mu) + im]\psi' \quad (2.27)$$

Voilà comment l'équation de Dirac est dite invariante de forme sous une rotation de Lorentz. On doit remarquer :

1 - Seules les transformations du groupe de Lorentz restreint $\mathcal{L}_+^\uparrow$ sont obtenues.

2 - Les mêmes matrices γ^μ apparaissent dans les deux systèmes de coordonnées, celui des x^μ et celui des x'^μ . Les matrices de Dirac sont donc indépendantes du système utilisé, elles ne dépendent pas de l'observateur en mouvement voyant l'onde. Ceci est tout à fait différent de l'équation étudiée par Hestenes [32] dans laquelle les γ_μ forment une base de l'espace-temps et changent d'un observateur à un autre en mouvement par rapport au premier.

3 - ξ et η changent différemment :

$$\psi' = \begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & \widehat{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} ; \quad \xi' = M\xi ; \quad \eta' = \widehat{M}\eta \quad (2.28)$$

Les spineurs de Weyl gauche et droit sont donc liés chacun à l'une des deux représentations non équivalentes de $SL(2, \mathbb{C})$.

4 - Un seul facteur M ou $\widehat{M}$ apparaît dans ces deux dernières relations, tandis que deux facteurs M sont présents dans $x' = MxM^\dagger$. Dans le cas d'une rotation, l'onde tourne seulement de θ quand on tourne de 2θ .

5 - Il est quelque peu incorrect de dire que l'équation de Dirac est invariante relativiste, alors que l'équation est en fait invariante de forme sous un autre groupe, $SL(2, \mathbb{C})$, qui n'est pas isomorphe au groupe de Lorentz.

Néanmoins pour tout objet relativiste avec une onde de Dirac il n'est pas possible d'éviter le groupe $SL(2, \mathbb{C})$, par conséquent il n'est pas possible d'éviter l'algèbre Cl_3 qui contient ce groupe. On va maintenant expliquer en détail comment on peut en fait écrire la totalité de la théorie de Dirac dans le cadre de l'algèbre Cl_3 .

2.2 L'onde en algèbre d'espace

Pour écrire l'équation de Dirac en se servant uniquement de l'algèbre de Clifford de l'espace physique, qui est aussi l'algèbre de Pauli, on part à nouveau de (2.1) en utilisant les spineurs de Weyl ξ et η . Avec :

$$\vec{A} = A^1\sigma_1 + A^2\sigma_2 + A^3\sigma_3 ; \quad A = A^0 + \vec{A} \quad (2.29)$$

et avec (1.75) l'équation de Dirac s'écrit

$$\begin{pmatrix} 0 & \nabla + iqA \\ \widehat{\nabla} + iq\widehat{A} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} + im \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = 0. \quad (2.30)$$

Ceci donne le système d'équation suivant, équivalent à l'équation de Dirac :

$$(\nabla + iqA)\eta + im\xi = 0 \quad (2.31)$$

$$(\widehat{\nabla} + iq\widehat{A})\xi + im\eta = 0. \quad (2.32)$$

On applique la conjugaison complexe sur (2.32), puis on multiplie à gauche par $-i\sigma_2$:³

$$(-i\sigma_2)(\widehat{\nabla}^* - iq\widehat{A}^*)\xi^* - im(-i\sigma_2)\eta^* = 0. \quad (2.33)$$

Or on a :

$$(-i\sigma_2)(\widehat{\nabla}^* - iq\widehat{A}^*) = (\nabla - iqA)(-i\sigma_2). \quad (2.34)$$

Donc (2.32) est équivalent à :

$$\nabla(-i\sigma_2\xi^*) + iqA(i\sigma_2\xi^*) + im(i\sigma_2\eta^*) = 0. \quad (2.35)$$

Le système composé de (2.31)-(2.32) est en conséquence équivalent à une seule équation matricielle⁴ :

$$\nabla \begin{pmatrix} \eta & -i\sigma_2\xi^* \end{pmatrix} + iqA \begin{pmatrix} \eta & -i\sigma_2\xi^* \end{pmatrix} + im \begin{pmatrix} \xi & i\sigma_2\eta^* \end{pmatrix} = 0 \quad (2.36)$$

Maintenant on pose

$$\phi = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \xi & -i\sigma_2\eta^* \end{pmatrix} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \xi_1 & -\eta_2^* \\ \xi_2 & \eta_1^* \end{pmatrix}. \quad (2.37)$$

Ceci donne

$$\widehat{\phi} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \eta & -i\sigma_2\xi^* \end{pmatrix} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \eta_1 & -\xi_2^* \\ \eta_2 & \xi_1^* \end{pmatrix} \quad (2.38)$$

et aussi

$$\phi\sigma_3 = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \xi & -i\sigma_2\eta^* \end{pmatrix} ; \quad \widehat{\phi}\sigma_3 = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \eta & -i\sigma_2\xi^* \end{pmatrix}. \quad (2.39)$$

3. Quelque soit le formalisme utilisé pour écrire l'équation d'onde de Dirac on peut voir que la direction numéro 3 est privilégiée, ce que l'on retrouvera au chapitre 5. Les plans 12 ou 21 sont aussi privilégiés, mais les indices 1 ou 2 jouent le même rôle. Quand un i est ajouté, ce qui est le cas avec l'interaction électrique et l'invariance de jauge électrique, les indices 1 et 2 ne jouent plus le même rôle, parce que σ_1 est une matrice réelle tandis que σ_2 est imaginaire pure. Donc l'usage ici de σ_2 est obligatoire.

4. C'est possible parce que quand on calcule le produit de deux matrices on multiplie chaque colonne de la matrice de droite par la matrice de gauche. Les termes entre parenthèse dans (2.36) sont les matrices-colonnes que l'on a obtenues séparément en (2.31) et (2.35)

Donc (2.36) qui est équivalente à l'équation de Dirac (2.1) s'écrit

$$\nabla\hat{\phi} + iqA\hat{\phi}\sigma_3 + im\phi\sigma_3 = 0 \quad (2.40)$$

ce qu'on écrira avec

$$\sigma_{12} = \sigma_1\sigma_2 = i\sigma_3 ; \quad \sigma_{21} = \sigma_2\sigma_1 = -i\sigma_3 \quad (2.41)$$

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla\hat{\phi} + qA\hat{\phi}\sigma_{12} + m\phi\sigma_{12} \\ 0 &= \nabla\hat{\phi}\sigma_{21} + qA\hat{\phi} + m\phi. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Même si cette équation semble très différente de l'équation bien connue (2.1), il paraît nécessaire d'insister sur le fait que c'est strictement l'équation de Dirac.⁵

2.2.1 Invariance relativiste

Sous la dilatation R définie par une matrice M quelconque vérifiant (1.39) et (1.40), on a obtenu en (2.28) $\xi' = M\xi$, $\eta' = \widehat{M}\eta$, et ces relations générales ne sont pas réservées au cas particulier où $r = 1$ et $\theta = 0$. De plus on a :

$$\begin{aligned} -i\sigma_2\eta'^* &= -i\sigma_2\widehat{M}^*\eta^* = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} \eta^* = \begin{pmatrix} b & -a \\ d & -c \end{pmatrix} \eta^* \\ &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \eta^* = M(-i\sigma_2\eta^*). \end{aligned} \quad (2.43)$$

Donc avec

$$\phi' = \sqrt{2}(\xi' \quad -i\sigma_2\eta'^*) = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \xi'_1 & -\eta'^{*}_2 \\ \xi'_2 & \eta'^{*}_1 \end{pmatrix} \quad (2.44)$$

les formules (2.28) équivalent à

$$\phi' = M\phi \quad (2.45)$$

Ceci signifie que le lien existant entre les spineurs de Weyl droit et gauche ξ , η d'une part et ϕ d'autre part n'est pas seulement invariant relativiste, il est en fait invariant sous le groupe plus vaste Cl_3^* formé par les éléments inversibles de Cl_3 . En prime, avec

$$\nabla' = \sigma^\mu \partial'_\mu ; \quad \partial'_\mu = \frac{\partial}{\partial x'^\mu} ; \quad \sigma_0 = \sigma^0 = 1 ; \quad \sigma^j = -\sigma_j, \quad j = 1, 2, 3. \quad (2.46)$$

5. Le i indifférencié de la théorie quantique, également générateur de l'invariance de jauge (2.18) est changé ici en la multiplication à droite par $\sigma_{12} = i\sigma_3$. C'est d'autant plus remarquable que $i\sigma_3$ n'est pas le seul élément de carré -1 . En algèbre d'espace il existe quatre termes indépendants de carré -1 . Ces termes engendrent une algèbre de Lie qui est très exactement l'algèbre de Lie du groupe $SU(2) \times U(1)$. Hestenes [31] a le premier remarqué cette algèbre de Lie et l'a rapprochée du groupe de Lie de la théorie électro-faible.

on a (voir [14] A.2.1), pour tout M :

$$\nabla = \overline{M} \nabla' \widehat{M} \quad (2.47)$$

et l'invariance de jauge électrique impose donc

$$qA = \overline{M} q' A' \widehat{M} \quad (2.48)$$

qui donne

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla \widehat{\phi} \sigma_{21} + q A \widehat{\phi} + m \phi \\ &= \overline{M} \nabla' \widehat{M} \widehat{\phi} \sigma_{21} + q' \overline{M} A' \widehat{M} \widehat{\phi} + m \phi \\ &= \overline{M} (\nabla' \widehat{\phi}' \sigma_{21} + q' A' \widehat{\phi}') + m \phi \end{aligned} \quad (2.49)$$

L'invariance de forme sous Cl_3^* de l'équation de Dirac signifie que l'on a

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla' \widehat{\phi}' \sigma_{21} + q' A' \widehat{\phi}' + m' \phi' ; \quad \nabla' \widehat{\phi}' \sigma_{21} + q' A' \widehat{\phi}' = -m' \phi' \\ 0 &= \overline{M} (-m' \phi') + m \phi = -m' \overline{M} M \phi + m \phi \\ &= (-m' r e^{i\theta} + m) \phi \end{aligned} \quad (2.50)$$

On obtient donc cette invariance de forme sous le groupe Cl_3^* si et seulement si

$$m = m' r e^{i\theta}. \quad (2.51)$$

Bien entendu dans le cas où l'on se restreint à $r = 1$ et $\theta = 0$ on a $m' = m$.

2.2.2 Plus de tenseurs

Les densités tensorielles de la théorie de Dirac apparaissent fort différentes quand on utilise l'algèbre de Pauli. On va le voir ici sur les seules densités formées sans utiliser la dérivation. Ces 16 densités tensorielles du paragraphe 2.1.3 sont habituellement présentées comme les seules possibles, en relation avec les 16 dimensions de l'algèbre engendrée par les matrices de Dirac⁶. Mais c'est tout à fait faux! (On trouvera le détail des calculs en [16] appendice A). Les invariants Ω_1 et Ω_2 vérifient

$$\det(\phi) = \Omega_1 + i\Omega_2 = \rho e^{i\beta}. \quad (2.52)$$

Ainsi ρ est le module et l'angle d'Yvon-Takabayasi β est l'argument du déterminant de ϕ .⁷ Et donc ϕ est inversible si et seulement si $\rho \neq 0$. Le calcul détaillé avec les composantes de l'onde, utilisant ξ et η , donne :

$$J = J^\mu \sigma_\mu = \phi \sigma_0 \phi^\dagger ; \quad K = K^\mu \sigma_\mu = \phi \sigma_3 \phi^\dagger. \quad (2.53)$$

6. Cette idée, tout à fait fausse, est une des nombreuses conséquences de la confusion faite entre algèbres réelles et algèbres complexes. Les densités tensorielles de la théorie de Dirac sont des grandeurs réelles et non pas des grandeurs complexes. La dimension de l'algèbre matricielle sur le corps des complexes est 32 et non pas 16.

7. Ceci explique le facteur $\sqrt{2}$ que l'on a mis dans (2.37) et (2.38).

Mais maintenant on voit immédiatement que ces deux vecteurs d'espace-temps, dont on savait qu'ils étaient orthogonaux et avaient des carrés opposés, font partie d'une liste (D_0, D_1, D_2, D_3) formée par quatre vecteurs d'espace-temps :

$$D_0 = J ; \quad D_1 = \phi \sigma_1 \phi^\dagger ; \quad D_2 = \phi \sigma_2 \phi^\dagger ; \quad D_3 = K. \quad (2.54)$$

Les composantes de D_1 et D_2 ne sont pas des combinaisons des seules 16 densités connues du formalisme complexes. Pour toute dilatation R définie par une matrice M , les quatre vecteurs D_μ sont transformés de la même manière :

$$D'_\mu = \phi' \sigma_\mu \phi'^\dagger = (M\phi) \sigma_\mu (M\phi)^\dagger = M \phi \sigma_\mu \phi^\dagger M^\dagger = M D_\mu M^\dagger \quad (2.55)$$

Les D_μ se comportent donc comme les vecteurs d'espace-temps x . On dira qu'ils sont **contravariants**. Ce sont aussi des vecteurs de même longueur. Ils sont de plus orthogonaux et constituent une base mobile de l'espace-temps :

$$\begin{aligned} 2D_\mu \cdot D_\nu &= D_\mu \widehat{D}_\nu + D_\nu \widehat{D}_\mu \\ &= \phi \sigma_\mu \phi^\dagger \widehat{\phi} \widehat{\sigma}_\nu \overline{\phi} + \phi \sigma_\nu \phi^\dagger \widehat{\phi} \widehat{\sigma}_\mu \overline{\phi} \\ &= \phi \sigma_\mu \rho e^{-i\beta} \widehat{\sigma}_\nu \overline{\phi} + \phi \sigma_\nu \rho e^{-i\beta} \widehat{\sigma}_\mu \overline{\phi} \\ &= \rho e^{-i\beta} \phi (\sigma_\mu \widehat{\sigma}_\nu + \sigma_\nu \widehat{\sigma}_\mu) \overline{\phi} = \rho e^{-i\beta} \phi 2\delta_{\mu\nu} \overline{\phi} \\ &= 2\delta_{\mu\nu} \rho e^{-i\beta} \phi \overline{\phi} = 2\delta_{\mu\nu} \rho e^{-i\beta} \rho e^{i\beta} \\ D_\mu \cdot D_\nu &= \delta_{\mu\nu} \rho^2. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Bien sûr, comme on se sert ici de l'espace-temps de la relativité restreinte avec le choix d'un signe + pour le temps, on a

$$\delta_{00} = 1 ; \quad \delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = -1 ; \quad \delta_{\mu\nu} = 0, \quad \mu \neq \nu. \quad (2.57)$$

Parmi ces dix relations (2.56), seulement trois étaient connues, et calculées de manière fort compliquée, par le formalisme des matrices complexes :

$$J^2 = \rho^2 ; \quad K^2 = -\rho^2 ; \quad J \cdot K = 0 \quad (2.58)$$

Quant au tenseur $S^{\mu\nu}$, on pose :

$$S_3 = S^{23} \sigma_1 + S^{31} \sigma_2 + S^{12} \sigma_3 + S^{10} i \sigma_1 + S^{20} i \sigma_2 + S^{30} i \sigma_3. \quad (2.59)$$

Et l'on a :

$$S_3 = \phi \sigma_3 \overline{\phi} \quad (2.60)$$

Il est évident que S_3 est l'un des quatre

$$S_\mu = \phi \sigma_\mu \overline{\phi}. \quad (2.61)$$

On a déjà rencontré S_0 , parce que :

$$S_0 = \phi \sigma_0 \overline{\phi} = \phi \overline{\phi} = \rho e^{i\beta} = \det(\phi). \quad (2.62)$$

Avec les 4 D_μ qui ont chacun 4 composantes, S_0 qui en a 2 et les 3 S_j qui en ont chacun 6, nous comptons donc 36 composantes de tenseurs sans dérivée, au lieu des soit disant seules 16 possibles d'après le formalisme des matrices complexes.⁸

Dans la dilatation R définie par une matrice M , les S_μ deviennent :

$$S'_\mu = \phi' \sigma_\mu \bar{\phi}' = M \phi \sigma_\mu \bar{M} \bar{\phi} = M \phi \sigma_\mu \bar{\phi} \bar{M} = M S_\mu \bar{M}. \quad (2.63)$$

On a en particulier :

$$\begin{aligned} \rho' e^{i\beta'} &= S'_0 = M S_0 \bar{M} = M \rho e^{i\beta} \bar{M} = \rho e^{i\beta} M \bar{M} = \rho e^{i\beta} r e^{i\theta} \\ \rho' &= r \rho ; \quad \beta' = \beta + \theta. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Entre ces 36 composantes de tenseurs sans dérivée, qui dépendent seulement des 8 paramètres réels de l'onde ϕ , il existe de nombreuses relations, assez difficiles à obtenir à partir du formalisme des matrices complexes, et immédiates (voir [14] A.2.5) dans Cl_3 , par exemple, avec $j = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned} S_j^2 &= (\Omega_1 + i\Omega_2)^2 ; \quad D_0 \hat{S}_j = (-\Omega_1 + i\Omega_2) D_j \\ D_j \hat{S}_j &= (-\Omega_1 + i\Omega_2) D_0. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Les égalités (2.63) sont complètement différentes de celles venant de la transformation de tenseurs relativistes antisymétriques de rang 2 : $S'^{\rho\sigma} = R^\rho_\mu R^\sigma_\nu S^{\mu\nu}$. Comme R^ν_μ est quadratique par rapport à M et multiplie toute longueur d'espace-temps par r , la présence de deux facteurs R entraîne une multiplication par r^2 tandis que (2.63) est quadratique par rapport à M et ne multiplie les longueurs que par r . On ne peut donc considérer les deux formalismes comme équivalents que si on se limite à l'invariance sous les groupes $\mathcal{L}^\dagger_+$ et $SL(2, \mathbb{C})$ où $r^2 = r = 1$. Pour pouvoir prendre vraiment en compte l'invariance de forme sous le groupe plus vaste, donc plus contraignant, qu'est Cl_3^* il faut donc abandonner le formalisme des matrices complexes. L'algèbre d'espace n'est donc pas seulement plus simple que l'algèbre des matrices de Dirac, c'est le seul formalisme permettant de penser cette invariance plus forte.

8. En utilisant l'espace vectoriel des applications linéaires de Cl_3 dans Cl_3 , qui est de dimension 64, on démontre [11] que les 64 termes d'une base particulière de cet espace vectoriel se partagent en

$$28 = \frac{8 \times 7}{2}$$

termes formant une base de l'algèbre de Lie du groupe de Lie $O(8)$ et en

$$36 = \frac{9 \times 8}{2}$$

termes qui donnent les 36 composantes de tenseurs obtenus sans dérivation. Le nombre 36 n'est donc pas quelconque. Les 16 composantes tensorielles précédemment connues sont parmi les 36 celles qui sont invariantes de jauge électrique.

2.2.3 Ondes planes

On se place dans le cas le plus simple où l'interaction avec les champs extérieurs est négligeable. On peut alors prendre $A = 0$. L'équation de Dirac dans l'algèbre de Pauli se réduit alors à

$$\nabla \hat{\phi} \sigma_{21} + m\phi = 0 \quad (2.66)$$

On considère une onde plane avec une phase φ telle que :

$$\phi = \phi_0 e^{-\varphi \sigma_{12}} ; \quad \varphi = mv_\mu x^\mu. \quad (2.67)$$

On se servira du vecteur d'espace-temps vitesse réduite :

$$v = \sigma^\mu v_\mu \quad (2.68)$$

et ϕ_0 est un terme fixe, ce qui donne

$$\nabla \hat{\phi} \sigma_{21} = \sigma^\mu \partial_\mu (\hat{\phi}_0 e^{-\varphi \sigma_{12}}) \sigma_{21} = -mv \hat{\phi}. \quad (2.69)$$

Par conséquent l'équation (2.66) équivaut à

$$\phi = v \hat{\phi}. \quad (2.70)$$

En conjuguant ceci est équivalent à

$$\hat{\phi} = \hat{v} \phi. \quad (2.71)$$

Et en combinant les deux précédentes égalités on obtient

$$\phi = v(\hat{v}\phi) = (v\hat{v})\phi = (v \cdot v)\phi. \quad (2.72)$$

On doit donc avoir

$$1 = v \cdot v = v_0^2 - \vec{v}^2 \quad (2.73)$$

$$v_0^2 = 1 + \vec{v}^2 ; \quad v_0 = \pm \sqrt{1 + \vec{v}^2} \quad (2.74)$$

a priori avec deux possibilités pour le signe. Le signe moins implique une énergie négative pour la particule, ceci a été au début un désappointement pour Dirac. Il est impossible de supprimer ces ennuyeuses énergies négatives. Par exemple elles sont nécessaires si l'on veut écrire n'importe quelle onde comme une somme d'ondes planes en utilisant la transformation de Fourier. Après la découverte du positron, une particule qui a la même masse et une charge opposée à la charge de l'électron, ces ondes planes furent associées au positron, malgré le fait que les positrons semblent avoir une masse-énergie propre égale et non opposée à la masse-énergie de l'électron.

2.3 L'équation de Dirac en algèbre d'espace-temps

(2.42) et sa conjuguée donnent :

$$\nabla \hat{\phi} = qA\hat{\phi}\sigma_{21} + m\phi\sigma_{21} ; \quad \widehat{\nabla}\phi = q\hat{A}\phi\sigma_{21} + m\hat{\phi}\sigma_{21}. \quad (2.75)$$

On pose maintenant

$$\Psi = \begin{pmatrix} \phi & 0 \\ 0 & \hat{\phi} \end{pmatrix} ; \quad A = \begin{pmatrix} 0 & A \\ \hat{A} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.76)$$

et l'on obtient

$$\begin{aligned} \partial\Psi &= \begin{pmatrix} 0 & \nabla \\ \widehat{\nabla} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi & 0 \\ 0 & \hat{\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \nabla\hat{\phi} \\ \widehat{\nabla}\phi & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & qA\hat{\phi}\sigma_{21} + m\phi\sigma_{21} \\ q\hat{A}\phi\sigma_{21} + m\hat{\phi}\sigma_{21} & 0 \end{pmatrix} \\ &= q \begin{pmatrix} 0 & A \\ \hat{A} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi & 0 \\ 0 & \hat{\phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{21} & 0 \\ 0 & \sigma_{21} \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 0 & \phi \\ \hat{\phi} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{21} & 0 \\ 0 & \sigma_{21} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.77)$$

Et (1.75) donne :

$$\begin{aligned} \gamma_{12} &= \gamma_1\gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ -\sigma_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ -\sigma_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma_1\sigma_2 & 0 \\ 0 & -\sigma_1\sigma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{21} & 0 \\ 0 & \sigma_{21} \end{pmatrix} \\ \Psi\gamma_0 &= \begin{pmatrix} \phi & 0 \\ 0 & \hat{\phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \phi \\ \hat{\phi} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.78)$$

alors (2.77) s'écrit

$$\partial\Psi = qA\Psi\gamma_{12} + m\Psi\gamma_{012} \quad (2.79)$$

ce qui est la forme donnée par Hestenes [32] pour l'équation de Dirac. Mais l'interprétation d'Hestenes considère les quatre γ_μ comme formant une base de l'espace-temps, tandis que la théorie de Dirac les considère comme des matrices fixes. Comme l'invariance relativiste de forme de l'onde de Dirac vient de l'usage implicite de l'algèbre Cl_3 , on obtient avec (1.76), (2.45) et (2.76) :

$$\Psi' = \begin{pmatrix} \phi' & 0 \\ 0 & \hat{\phi}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M\phi & 0 \\ 0 & \widehat{M\hat{\phi}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & \widehat{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi & 0 \\ 0 & \hat{\phi} \end{pmatrix} = N\Psi. \quad (2.80)$$

2.4 Equation de Dirac invariante

L'invariance de forme de la théorie de Dirac utilise l'opérateur $\nabla = \overline{M}\nabla'\widehat{M}$. Puisque $\phi' = M\phi$ entraîne $\overline{\phi}' = \overline{\phi} \overline{M}$ le facteur $\overline{M}$ à gauche suggère une multiplication de l'équation d'onde à gauche par $\overline{\phi}$. Lorsque et là où $\rho \neq 0$,

ϕ est inversible et si on multiplie par $\bar{\phi}$ à gauche l'équation de Dirac, elle est équivalente à

$$\bar{\phi}(\nabla\hat{\phi})\sigma_{21} + \bar{\phi}qA\hat{\phi} + m\bar{\phi}\phi = 0. \quad (2.81)$$

Dans une dilatation de Lorentz R définie par une matrice M de Cl_3 par (1.42) on obtient (2.45), (2.47) et (2.48) qui impliquent

$$\bar{\phi}(\nabla\hat{\phi})\sigma_{21} = \bar{\phi}(\overline{M}\nabla'\widehat{M}\hat{\phi})\sigma_{21} = \bar{\phi}'(\nabla'\hat{\phi})\sigma_{21} \quad (2.82)$$

$$\bar{\phi}qA\hat{\phi} = \bar{\phi}\overline{M}q'A'\widehat{M}\hat{\phi} = \bar{\phi}'q'A'\hat{\phi}'. \quad (2.83)$$

Les deux termes de gauche de (2.81) sont donc invariants de forme, et le terme de masse est lui aussi invariant si l'on a

$$m\bar{\phi}\phi = m'\bar{\phi}'\phi' = m'\bar{\phi}\overline{M}M\phi = re^{i\theta}m'\bar{\phi}\phi \quad (2.84)$$

qui équivaut à (2.51). Ce terme de masse s'écrit

$$m\bar{\phi}\phi = m\Omega_1 + im\Omega_2 \quad (2.85)$$

il est donc la somme d'un scalaire et d'un pseudo-scalaire. Le second terme de l'équation de Dirac invariante (2.81) a une autre particularité : c'est un vecteur d'espace-temps parce qu'il est auto-adjoint :

$$(\bar{\phi}qA\hat{\phi})^\dagger = \hat{\phi}^\dagger qA^\dagger \bar{\phi}^\dagger = \bar{\phi}qA\hat{\phi}. \quad (2.86)$$

On peut donc poser avec (1.38)

$$\bar{\phi}qA\hat{\phi} = V^0 + \vec{V} = V^\mu\sigma_\mu. \quad (2.87)$$

où V est un vecteur d'espace-temps. Seul le premier terme de (2.81) est général, mais on peut aussi en obtenir les particularités à l'aide de

$$\bar{\phi}(\nabla\hat{\phi}) = \frac{1}{2}[\bar{\phi}(\nabla\hat{\phi}) + (\bar{\phi}\nabla)\hat{\phi}] + \frac{1}{2}[\bar{\phi}(\nabla\hat{\phi}) - (\bar{\phi}\nabla)\hat{\phi}] \quad (2.88)$$

$$\frac{1}{2}[\bar{\phi}(\nabla\hat{\phi}) + (\bar{\phi}\nabla)\hat{\phi}] = \frac{1}{2}\partial_\mu(\bar{\phi}\sigma^\mu\hat{\phi}) = v = v^\mu\sigma_\mu \quad (2.89)$$

$$\frac{1}{2}[\bar{\phi}(\nabla\hat{\phi}) - (\bar{\phi}\nabla)\hat{\phi}] = iw = iw^\mu\sigma_\mu \quad (2.90)$$

où v et w sont deux vecteurs d'espace-temps, puisque $v^\dagger = v$ et $(iw)^\dagger = -iw$. Cela donne

$$\begin{aligned} \bar{\phi}(\nabla\hat{\phi})\sigma_{21} &= (v + iw)\sigma_{21} \\ &= (v^0 + v^1\sigma_1 + v^2\sigma_2 + v^3\sigma_3 + iw^0 + w^1i\sigma_1 + w^2i\sigma_2 + w^3i\sigma_3)(-i\sigma_3) \\ &= w^3 + v^2\sigma_1 - v^1\sigma_2 + w^0\sigma_3 + i(-v^3 + w^2\sigma_1 - w^1\sigma_2 - v^0\sigma_3). \end{aligned} \quad (2.91)$$

Donc l'équation de Dirac est équivalente au système :

$$0 = w^3 + V^0 + m\Omega_1 \quad (2.92)$$

$$0 = v^2 + V^1 \quad (2.93)$$

$$0 = -v^1 + V^2 \quad (2.94)$$

$$0 = w^0 + V^3 \quad (2.95)$$

$$0 = -v^3 + m\Omega_2 \quad (2.96)$$

$$0 = w^2 \quad (2.97)$$

$$0 = -w^1 \quad (2.98)$$

$$0 = -v^0 \quad (2.99)$$

Première chose évidente, l'invariance de jauge ne concerne que la moitié des huit équations, celles qui contiennent les V^μ . C'est une conséquence du fait que l'électromagnétisme classique s'est basé sur l'absence de monopôles magnétiques, comme on le verra au chapitre 4. Moins évident, mais d'une importance considérable pour la théorie de Dirac, la première équation est très exactement $\mathcal{L} = 0$ parce que (un calcul détaillé est en A.1) :

$$\begin{aligned} -\mathcal{L} &= \frac{1}{2}[(\bar{\psi}\gamma^\mu(-i\partial_\mu + qA_\mu)\psi) + (\bar{\psi}\gamma^\mu(-i\partial_\mu + qA_\mu)\psi)^\dagger] + m\bar{\psi}\psi \\ &= w^3 + V^0 + m\Omega_1 \end{aligned} \quad (2.100)$$

Il est bien connu qu'en variant la densité lagrangienne $\mathcal{L}$ on obtient l'équation d'onde de Dirac. De plus le fait que l'équation de Dirac soit homogène implique que $\mathcal{L} = 0$ lorsque l'équation d'onde est vérifiée. Ici on a exactement la situation inverse, l'équation $\mathcal{L} = 0$ est l'une des équations d'onde et le formalisme lagrangien est une conséquence de l'équation d'onde.⁹ De plus les quatre équations contenant la partie symétrique v de $\widehat{\phi}(\nabla\widehat{\phi})$ sont respectivement, pour les indices 0, 3, 2, 1 et avec les D_μ de (2.54) (voir A.2.6) :

$$0 = \nabla \cdot D_0 \quad (2.101)$$

$$0 = \nabla \cdot D_3 + 2m\Omega_2 \quad (2.102)$$

$$0 = \nabla \cdot D_1 - 2qA \cdot D_2 \quad (2.103)$$

$$0 = \nabla \cdot D_2 + 2qA \cdot D_1 \quad (2.104)$$

L'équation (2.101) qui est aussi (2.99) ou (2.9) et qui est connue comme la loi de conservation de la probabilité, est maintenant très exactement l'une des huit équations numériques équivalentes à l'équation d'onde de Dirac. (2.102)

9. Chaque loi du mouvement, en mécanique classique et en électromagnétisme, peut être obtenue à partir d'un mécanisme lagrangien. Nous savons maintenant que cela vient de la forme lagrangienne et de l'universalité de la mécanique quantique. Mais d'où vient que la mécanique quantique a une forme lagrangienne ? On voit ici que ceci est totalement contraint, parce que la densité lagrangienne est la partie scalaire de l'équation d'onde et parce que cette densité lagrangienne redonne l'équation d'onde.

est connue sous le nom de relation de Uhlenbeck et Laporte. (2.103) et (2.104) montrent que les vecteurs d'espace-temps D_1 et D_2 ne sont pas invariants de jauge électrique, la transformation de jauge électrique se traduit pas une rotation dans le plan $D_1 - D_2$.

En dépit du caractère peu ordinaire de (2.81), cette forme de l'équation d'onde apparaît comme la vraie forme de l'équation de Dirac, parce qu'elle est invariante de forme et parce qu'elle possède autant d'aspects remarquables..

2.4.1 Conjugaison de charge

De nombreuses années après la découverte des électrons les positrons furent découverts à leur tour. La seule différence entre ces particules est le signe de la charge, négative pour l'électron, positive pour le positron. La valeur de cette charge est liée aux quantités fondamentales $\hbar$, c et α , constante de structure fine, par $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}$ Ceci peut aussi se voir comme

$$e^2 = \alpha \hbar c ; \quad e = \pm \sqrt{\alpha \hbar c} \quad (2.105)$$

$$q = \frac{e}{\hbar c} = \pm \sqrt{\frac{\alpha}{\hbar c}} \quad (2.106)$$

Le signe moins est le signe qui convient pour l'électron :

$$q = -\sqrt{\frac{\alpha}{\hbar c}} \quad (2.107)$$

L'autre signe est celui qui convient pour le positron. Cela donne

$$0 = \nabla \hat{\phi} \sigma_{21} - q A \hat{\phi} + m \phi \quad (2.108)$$

$$0 = \bar{\phi} (\nabla \hat{\phi}) \sigma_{21} - \bar{\phi} q A \hat{\phi} + m \bar{\phi} \phi \quad (2.109)$$

Les autres propriétés du positron sont similaires aux propriétés de l'électron. Au lieu du système (2.92)...(2.99) on obtient

$$0 = w^3 - V^0 + m \Omega_1 \quad (2.110)$$

$$0 = v^2 - V^1 \quad (2.111)$$

$$0 = -v^1 - V^2 \quad (2.112)$$

$$0 = w^0 - V^3 \quad (2.113)$$

$$0 = -v^3 + m \Omega_2 \quad (2.114)$$

$$0 = w^2 \quad (2.115)$$

$$0 = -w^1 \quad (2.116)$$

$$0 = -v^0 \quad (2.117)$$

Il y a aussi un formalisme lagrangien, dont la densité est la partie scalaire de l'équation d'onde. Il y a aussi une loi de conservation de la probabilité, qui est la partie pseudo-scalaire de l'équation d'onde, et ainsi de suite.

2.4.2 Lien entre l'onde de la particule et de l'antiparticule

A partir de l'onde de Dirac de la particule (2.1), la mécanique quantique obtient l'équation d'onde de l'antiparticule comme suit : l'onde de l'électron est notée ψ_e et l'onde du positron est notée ψ_p . On prend les conjugués complexes dans (2.1) :

$$0 = [\gamma^{\mu*}(\partial_\mu - iqA_\mu) - im]\psi_e^*. \quad (2.118)$$

Comme (1.75) donne $\gamma_2\gamma^{\mu*} = -\gamma^\mu\gamma_2$, $\mu = 0, 1, 2, 3$, en multipliant (2.144) par $i\gamma_2$ à gauche, on obtient :

$$0 = -[\gamma^\mu(\partial_\mu - iqA_\mu) + im]i\gamma_2\psi_e^*. \quad (2.119)$$

Donc, à une phase arbitraire près, la mécanique quantique suppose¹⁰

$$\psi_p = i\gamma_2\psi_e^*. \quad (2.120)$$

ce qui donne

$$0 = [\gamma^\mu(\partial_\mu - iqA_\mu) + im]\psi_p. \quad (2.121)$$

En utilisant (2.2) et des indices e pour l'électron et p pour le positron (2.120) s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \xi_{1p} \\ \xi_{2p} \\ \eta_{1p} \\ \eta_{2p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_{1e}^* \\ \xi_{2e}^* \\ \eta_{1e}^* \\ \eta_{2e}^* \end{pmatrix} \quad (2.122)$$

ce qui donne

$$\xi_{1p} = \eta_{2e}^*, \quad \xi_{2p} = -\eta_{1e}^*, \quad \eta_{1p} = -\xi_{2e}^*, \quad \eta_{2p} = \xi_{1e}^* \quad (2.123)$$

Maintenant avec (2.38) et à nouveau des indices e pour l'électron et p pour le positron on obtient :

$$\hat{\phi}_e = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \eta_{1e} & -\xi_{2e}^* \\ \eta_{2e} & \xi_{1e}^* \end{pmatrix}; \quad \hat{\phi}_p = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \eta_{1p} & -\xi_{2p}^* \\ \eta_{2p} & \xi_{1p}^* \end{pmatrix}. \quad (2.124)$$

Donc (2.120), qui est équivalent à (2.123), est aussi équivalent à

$$\hat{\phi}_p = \hat{\phi}_e \sigma_1 \quad (2.125)$$

où à

$$\phi_p = -\phi_e \sigma_1. \quad (2.126)$$

On utilisera ces égalités au chapitre 6.

10. La mécanique quantique se sert de γ_2 parce que c'est la seule des quatre matrices de Dirac qui contienne des termes imaginaires, tandis que les trois autres matrices γ_μ sont réelles avec le choix (1.75).

2.5 Au sujet de l'algèbre de Pauli

Il est en réalité très étrange que l'algèbre de Pauli puisse être capable de rendre compte pleinement de la théorie de Dirac. Comme c'est une équation d'onde relativiste, on devrait s'attendre à ce que l'algèbre d'espace-temps soit le cadre adéquat. Mais l'onde de Dirac est à valeur, non pas dans l'algèbre d'espace-temps, mais seulement dans sa partie paire, qui est justement isomorphe à l'algèbre d'espace. Physiquement, cela veut dire qu'il y a dans l'espace-temps trop de symétrie entre le temps et l'espace. Dans l'algèbre de Pauli, même si on peut y ajouter les grandeurs de temps et d'espace, l'espace et le temps restent toujours distincts géométriquement, et en outre chacun garde sa propre **orientation**. Il n'existe aucun moyen physique de changer l'orientation de l'espace ni de changer l'orientation du temps. Les transformations P et T de la mécanique quantique sont purement théoriques.

Il existe une autre raison, mathématique celle-ci, de préférer l'algèbre d'espace à l'algèbre d'espace-temps. Tous les résultats bien connus concernant les limites, la continuité ou les fonctions différentiables ont été obtenus pour des espaces topologiques **séparés**, ce qui veut dire des espaces topologiques dans lesquels deux points distincts quelconques possèdent des voisinages sans aucun point commun. Tous les espaces métriques sont séparés, parce que deux points distincts ont une distance finie non nulle, donc sont les centres de boules disjointes.¹¹ L'algèbre Cl_3 est un espace vectoriel de dimension 8, c'est donc un espace métrique séparé. Tous les théorèmes usuels sur les limites, la continuité, la différentiabilité, s'y appliquent sans aucune difficulté. L'espace-temps de la relativité restreinte, tout au contraire, n'est pas muni d'un produit scalaire euclidien, mais d'un produit scalaire pseudo-euclidien. Deux points distincts de l'espace-temps peuvent être à une distance nulle pour cette pseudo-distance d'espace-temps. L'espace-temps n'est donc pas un espace topologique séparé. En toute rigueur mathématique, on n'obtient la séparation qu'en distinguant vraiment le temps de l'espace, et c'est équivalent à travailler avec Cl_3 . Cette hypothèse de séparation est sous-jacente pour pouvoir définir la continuité et les dérivées partielles indispensables quand on veut utiliser une équation d'onde.

Du point de vue physique, si l'on considère deux photons de masse nulle créés en un même point E de l'espace-temps, et absorbés en deux points A_1 et A_2 , les points A_1 et A_2 sont des points séparés, mais E et A_1 ne sont pas séparés, E et A_2 ne sont pas séparés. Donc on ne peut pas définir correctement les équations d'onde en algèbre d'espace-temps, sauf à passer bien sûr par l'algèbre d'espace.

L'algèbre d'espace n'est pas seulement le cadre mathématique nécessaire pour décrire les particules de spin $1/2$, on verra au chapitre 6 qu'elle autorise la construction d'un espace-temps plus vaste apte à décrire la totalité des ondes quantiques relativistes.

11. Soient deux points P_1 et P_2 séparés à une distance d l'un de l'autre, alors la boule de centre P_1 et de rayon $d/3$ et la boule de centre P_2 et de rayon $d/3$ ne peuvent avoir aucun point commun.

Chapitre 3

L'équation d'onde non linéaire homogène

On discute la question des énergies négatives. On étudie une équation d'onde telle que toutes les ondes planes ont une énergie positive. On étudie l'invariance relativiste, qui introduit un groupe d'invariance plus fort et une seconde variété d'espace-temps. On discute la normalisation des ondes et la conjugaison de charge. On explique pourquoi cette équation non linéaire obtient néanmoins la quantification des niveaux d'énergie et les bons résultats dans le cas de l'atome d'hydrogène.

Quand Dirac cherchait son équation d'onde, il espérait bien obtenir une équation d'onde sans les énergies négatives qui s'étaient introduites avec l'équation relativiste de Klein-Gordon. Mais son équation d'onde comportait aussi des solutions avec des énergies négatives car deux signes sont possibles dans (2.74). Quand les positrons furent découverts six ans plus tard, les solutions à énergie négative furent associées aux positrons et ceci fut considéré comme un succès de la nouvelle équation d'onde. Or la création d'une paire électron-positron nécessite un apport d'énergie de $+2 \times 511$ keV. Le lien du positron aux énergies négatives entraîne donc une interprétation dans un autre cadre théorique, et est maintenant comprise seulement avec la seconde quantification et un raisonnement fort compliqué.

Mais il est possible de résoudre ce problème des énergies négatives, par une simple modification de l'équation de Dirac. Pour une onde plane définie par (2.67), (2.68) on obtient (2.70) qui donne

$$\det(\phi) = \det(v) \det(\widehat{\phi}). \quad (3.1)$$

Et l'on a avec (2.72) et (2.73)

$$1 = v \cdot v = v\widehat{v} = v\bar{v} = \det(v) \quad (3.2)$$

Donc (3.1) s'écrit

$$\rho e^{i\beta} = 1 \times \rho e^{-i\beta} ; \quad e^{i\beta} = \pm 1 \quad (3.3)$$

Maintenant (2.70) donne aussi

$$\phi^\dagger = (v\hat{\phi})^\dagger = \bar{\phi}v \quad (3.4)$$

$$D_0 = \phi\phi^\dagger = \bar{\phi}\bar{\phi}v = \rho e^{i\beta}v = \pm\rho v \quad (3.5)$$

$$D_0^0 = \pm\rho v^0 \quad (3.6)$$

Comme $D_0^0 > 0$ et comme $\rho > 0$ on a seulement deux possibilités :

$$v^0 = \sqrt{1 + \bar{v}^2} ; \quad e^{i\beta} = 1 ; \quad \phi\bar{\phi} = \rho e^{i\beta} = \rho \quad (3.7)$$

$$v^0 = -\sqrt{1 + \bar{v}^2} ; \quad e^{i\beta} = -1 ; \quad \phi\bar{\phi} = \rho e^{i\beta} = -\rho \quad (3.8)$$

Le produit $\phi\bar{\phi}$ est égal à son module ρ dans le cas (3.7) d'une énergie positive, et ceci est faux dans le cas (3.8) d'une énergie négative.

Nous généralisons donc et nous obtenons une nouvelle équation d'onde en remplaçant le terme $\phi\bar{\phi} = \bar{\phi}\phi$ dans l'équation de Dirac invariante (2.81) par le module ρ de ce même terme :

$$\bar{\phi}(\nabla\hat{\phi})\sigma_{21} + \bar{\phi}qA\hat{\phi} + m\rho = 0. \quad (3.9)$$

Multipliant alors par $\bar{\phi}^{-1}$ à gauche on obtient avec $\rho = e^{-i\beta}\bar{\phi}\phi$ l'équation équivalente

$$\nabla\hat{\phi}\sigma_{21} + qA\hat{\phi} + me^{-i\beta}\phi = 0. \quad (3.10)$$

Les équations (3.9) et (3.10) sont les deux formes principales que prend l'équation d'onde que nous étudions dans ce chapitre. Cette équation d'onde a d'abord été obtenue d'une manière différente. Partons de l'équation du monopôle magnétique de G. Lochak (2.21), en en supprimant le terme de potentiel magnétique :

$$[\gamma^\mu\partial_\mu + \frac{1}{2}\frac{m(\rho^2)c}{\hbar}(\Omega_1 - i\Omega_2\gamma_5)]\psi = 0. \quad (3.11)$$

Quand on choisit

$$\frac{1}{2}\frac{m(\rho^2)c}{\hbar} = \frac{im}{\rho}$$

cette équation devient :

$$[\gamma^\mu\partial_\mu + ime^{-i\beta}\gamma_5]\psi = 0. \quad (3.12)$$

Comme l'angle β d'Yvon-Takabayasi est invariant de jauge électrique, il est tout à fait possible d'ajouter un terme de potentiel électrique, ceci donne [7] :

$$[\gamma^\mu(\partial_\mu + iqA_\mu) + ime^{-i\beta}\gamma_5]\psi = 0. \quad (3.13)$$

Cette équation d'onde est non linéaire, parce que β dépend de la valeur de ψ . Elle est homogène, parce que si l'on multiplie une solution ψ par un nombre réel fixe k , β ne change pas, donc $k\psi$ est aussi une solution de l'équation. Notre équation a beaucoup de propriétés en commun avec l'équation de Dirac. On doit immédiatement dire que, si β est nul ou négligeable $ime^{-i\beta\gamma_5} \approx im$ et (3.13) admet donc l'équation de Dirac comme approximation linéaire.

Pour réécrire cette équation dans l'algèbre de Pauli, on procède comme pour l'équation de Dirac, et à la place de (2.30) on obtient

$$\begin{pmatrix} 0 & \nabla + iqA \\ \widehat{\nabla} + iq\widehat{A} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} + im \begin{pmatrix} e^{-i\beta}I & 0 \\ 0 & e^{i\beta}I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = 0 \quad (3.14)$$

qui donne le système suivant, équivalent à (3.13) :

$$(\nabla + iqA)\eta + ime^{-i\beta}\xi = 0 \quad (3.15)$$

$$(\widehat{\nabla} + iq\widehat{A})\xi + ime^{i\beta}\eta = 0 \quad (3.16)$$

En utilisant la conjugaison complexe sur cette dernière équation, puis en la multipliant à gauche par $-i\sigma_2$ on obtient :

$$(-i\sigma_2)(\widehat{\nabla}^* - iq\widehat{A}^*)\xi^* - ime^{-i\beta}(-i\sigma_2)\eta^* = 0. \quad (3.17)$$

Avec à nouveau (2.34) on obtient

$$\nabla(-i\sigma_2\xi^*) + iqA(i\sigma_2\xi^*) + ime^{-i\beta}(i\sigma_2\eta^*) = 0. \quad (3.18)$$

Le système formé par (3.15) et (3.16) est donc équivalent à l'équation matricielle :

$$\nabla \begin{pmatrix} \eta & -i\sigma_2\xi^* \end{pmatrix} + iqA \begin{pmatrix} \eta & -i\sigma_2\xi^* \end{pmatrix} + ime^{-i\beta} \begin{pmatrix} \xi & i\sigma_2\eta^* \end{pmatrix} = 0. \quad (3.19)$$

Avec (2.37), avec (2.38) et (2.39), l'équation non linéaire homogène (3.3) devient [9]

$$\nabla\widehat{\phi} + qA\widehat{\phi}\sigma_{12} + me^{-i\beta}\phi\sigma_{12} = 0. \quad (3.20)$$

qui est équivalente à (3.10) et à l'équation invariante (3.9). Le terme différentiel $\widehat{\phi}(\nabla\widehat{\phi})\sigma_{21}$ et le terme de jauge $\widehat{\phi}qA\widehat{\phi}$ sont exactement ceux de l'équation linéaire, et le seul changement concerne le terme de masse où $\widehat{\phi}\phi = \Omega_1 + i\Omega_2$ est remplacé par son module $\rho = \sqrt{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}$. On obtient donc à la place du

système (2.92) à (2.99) et avec les notations du chapitre 2 le système :

$$0 = w^3 + V^0 + m\rho \quad (3.21)$$

$$0 = v^2 + V^1 \quad (3.22)$$

$$0 = -v^1 + V^2 \quad (3.23)$$

$$0 = w^0 + V^3 \quad (3.24)$$

$$0 = -v^3 \quad (3.25)$$

$$0 = w^2 \quad (3.26)$$

$$0 = -w^1 \quad (3.27)$$

$$0 = -v^0. \quad (3.28)$$

3.1 Invariances de jauge

Comme le terme différentiel et le terme de jauge sont les mêmes, et comme le terme de masse est invariant de jauge, l'équation non linéaire homogène est aussi invariante sous la transformation de jauge électrique qui s'écrit dans l'algèbre de Pauli :

$$\phi \mapsto \phi' = \phi e^{ia\sigma_3} ; \quad A_\mu \mapsto A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{q} \partial_\mu a \quad (3.29)$$

Comme pour l'équation de Dirac, l'équation scalaire (3.21) donne la densité lagrangienne :

$$\begin{aligned} -\mathcal{L} &= \frac{1}{2} [(\bar{\psi} \gamma^\mu (-i\partial_\mu + qA_\mu) \psi) + (\bar{\psi} \gamma^\mu (-i\partial_\mu + qA_\mu) \psi)^\dagger] + m\rho \\ &= w^3 + V^0 + m\rho \end{aligned} \quad (3.30)$$

Le courant conservatif lié à l'invariance de jauge (3.29) par le théorème de Noether est le courant $J = D_0$ et (2.99) qui est aussi (3.28) est la loi de conservation (2.101).

Or l'équation non linéaire homogène admet une seconde invariance de jauge, qui est seulement une invariance de jauge globale :

$$\phi \mapsto \phi' = e^{ia} \phi ; \quad \bar{\phi} \mapsto \bar{\phi}' = e^{ia} \bar{\phi} ; \quad \partial_\mu a = 0, \quad (3.31)$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \rho e^{i\beta} &= \phi \bar{\phi} \mapsto \rho' e^{i\beta'} = \phi' \bar{\phi}' = e^{2ia} \phi \bar{\phi} = \rho e^{i(\beta+2a)} \\ \rho &\mapsto \rho' = \rho ; \quad \beta \mapsto \beta' = \beta + 2a. \end{aligned} \quad (3.32)$$

On verra au chapitre 6 que cette seconde invariance de jauge fait partie du groupe de jauge électro-faible. Comme (3.31) est aussi la jauge chirale¹ de G.

1. La jauge électrique multiplie ξ et η par le même facteur e^{ia} alors que la jauge chirale multiplie ξ par e^{ia} et η par e^{-ia} . Cette jauge est locale dans la théorie de Lochak ou dans la théorie électro-faible.

Lochak [37] on obtient son résultat pour le courant : le théorème de Noether entraîne l'existence d'un autre courant conservatif, $K = D_3$ (voir [16] B.1.3), et ceci remplace la relation de Uhlenbeck et Laporte (2.102) par la loi de conservation :

$$0 = \nabla \cdot D_3. \quad (3.33)$$

C'est avec le changement du lagrangien, qui est aussi l'équation scalaire, les seuls changements, les 6 autres équations sont inchangées, par exemple nous avons encore (2.103) et (2.104). Comme la jauge chirale multiplie ϕ par e^{ia} , $\hat{\phi}$ est multiplié par e^{-ia} , le spineur ξ , colonne de gauche de ϕ est multiplié par e^{ia} et η , colonne de gauche de $\hat{\phi}$ est multiplié par e^{-ia} [39]. Le générateur i de la jauge chirale est bien le i orienteur de l'espace physique (voir 1.3.1).

Comme on a perdu la linéarité, la somme $\phi_1 + \phi_2$ de deux solutions de (3.20) n'est pas forcément une solution de (3.20). Par contre comme l'équation est homogène et invariante de jauge chirale, si ϕ est une solution et si z est un nombre complexe quelconque, alors $z\phi$ est aussi une solution de (3.20). Cette propriété, usuelle avec l'équation de Schrödinger, n'est pas vraie pour l'équation de Dirac dans Cl_3 .

3.2 Onde plane

On reprend le calcul de 2.2.3 fait pour l'équation linéaire. Notre équation est maintenant réduite, pour $A = 0$, à :

$$\nabla \hat{\phi} + m e^{-i\beta} \phi \sigma_{12} = 0. \quad (3.34)$$

Si l'on considère une onde plane avec une phase φ vérifiant

$$\phi = \phi_0 e^{-\varphi \sigma_{12}} ; \quad \varphi = m v_\mu x^\mu ; \quad v = \sigma^\mu v_\mu. \quad (3.35)$$

où v est une vitesse réduite fixe et ϕ_0 est aussi un facteur constant, on a :

$$\nabla \hat{\phi} = \sigma^\mu \partial_\mu (\hat{\phi}_0 e^{-\varphi \sigma_{12}}) = -m v \hat{\phi} \sigma_{12}. \quad (3.36)$$

(3.15) est alors équivalent à

$$\phi = e^{i\beta} v \hat{\phi} \quad (3.37)$$

ou à

$$\hat{\phi} = e^{-i\beta} \hat{v} \phi \quad (3.38)$$

qui entraîne

$$\phi = e^{i\beta} v (e^{-i\beta} \hat{v} \phi) = v \hat{v} \phi = (v \cdot v) \phi. \quad (3.39)$$

Ainsi, si ϕ_0 est inversible, on doit prendre

$$1 = v \cdot v = v_0^2 - \vec{v}^2 \quad (3.40)$$

$$v_0^2 = 1 + \vec{v}^2 ; \quad v_0 = \pm \sqrt{1 + \vec{v}^2}. \quad (3.41)$$

qui est la relation attendue pour la vitesse réduite de la particule. Mieux, avec l'équation non linéaire, on a :

$$D_0 = \phi \phi^\dagger = (e^{i\beta} v \widehat{\phi}) \phi^\dagger = e^{i\beta} v (\widehat{\phi \phi^\dagger}) = e^{i\beta} v \rho e^{-i\beta} = v \rho. \quad (3.42)$$

Donc on a

$$D_0^0 = \rho v^0 \quad (3.43)$$

et comme D_0^0 et ρ sont toujours positifs (3.40) ne s'obtient que si

$$v_0 = \sqrt{1 + \vec{v}^2} \quad (3.44)$$

C'est la preuve que le remplacement de $\overline{\phi} \phi$ par ρ dans le terme de masse de l'équation invariante est suffisant pour débarrasser la théorie de Dirac des énergies négatives non physiques dans le cas de l'électron.

3.3 Invariance relativiste

Nous partons de la forme invariante (3.9). Sous une dilatation de Lorentz R de rapport $r = |\det(M)|$ vérifiant

$$\begin{aligned} x' &= R(x) = M x M^\dagger, \quad \det(M) = r e^{i\theta}, \quad \phi' = M \phi \\ \nabla &= \overline{M} \nabla' \widehat{M} ; \quad qA = \overline{M} q' A' \widehat{M} \end{aligned} \quad (3.45)$$

on a aussi

$$\begin{aligned} \rho' e^{i\beta'} &= \det(\phi') = \phi' \overline{\phi'} = M \phi \overline{\phi} \overline{M} = M \rho e^{i\beta} \overline{M} \\ &= M \overline{M} \rho e^{i\beta} = r e^{i\theta} \rho e^{i\beta} = r \rho e^{i(\beta+\theta)} \end{aligned} \quad (3.46)$$

$$\rho' = r \rho \quad (3.47)$$

$$\beta' = \beta + \theta. \quad (3.48)$$

et donc on obtient :

$$\begin{aligned} 0 &= \overline{\phi} (\nabla \widehat{\phi}) \sigma_{21} + \overline{\phi} q A \widehat{\phi} + m \rho \\ &= \overline{\phi} \overline{M} \nabla' \widehat{M} \widehat{\phi} \sigma_{21} + \overline{\phi} \overline{M} q' A' \widehat{M} \widehat{\phi} + m \rho \\ &= \overline{\phi'} (\nabla' \widehat{\phi'}) \sigma_{21} + \overline{\phi'} q' A' \widehat{\phi'} + m \rho \end{aligned} \quad (3.49)$$

L'équation non linéaire homogène est invariante de forme sous Cl_3^* , groupe des éléments inversibles de Cl_3 , si et seulement si

$$m\rho = m'\rho' \quad (3.50)$$

$$m\rho = m'r\rho \quad (3.51)$$

Nous obtenons donc l'invariance de forme de l'équation d'onde sous $Cl_3^* = GL(2, \mathbb{C})$ si et seulement si²

$$m = m'r \quad (3.52)$$

Que signifie cette égalité pour la physique ? Si le bon groupe d'invariance de l'électromagnétisme n'est pas seulement le groupe de Lorentz, ni même son groupe de recouvrement, mais le groupe plus fort Cl_3^* , il doit arriver des choses semblables à ce qui se passe quand on vient de la physique galiléenne pour passer à la physique relativiste : il y a moins de grandeurs invariantes. La masse propre m_0 et ρ sont tous deux invariants sous les rotations de Lorentz. Sous les dilatations induites par n'importe quelle matrice M , m et ρ ne sont plus séparément invariants, seul leur produit $m\rho$ reste invariant :

$$m\rho = m'r\rho = m'\rho'. \quad (3.53)$$

Que nous dit cette invariance du seul produit $m\rho$? C'est seulement le produit d'une masse réduite et d'un rapport de dilatation qui est invariant. Or une masse réduite $m = \frac{m_0 c}{h}$ est proportionnelle à l'inverse d'une longueur d'espace-temps, c'est-à-dire à une fréquence. Dit autrement, l'existence de la constante de Planck est liée au fait que m et ρ ne sont pas séparément invariants et que seul leur produit l'est. Ou encore, l'existence de la constante de Planck est liée à l'invariance sous le groupe Cl_3^* , un groupe plus fort que le groupe d'invariance de la relativité restreinte. D'une certaine manière on peut dire : l'existence de la constante de Planck n'était pas pleinement comprise du point de vue physique. Prendre en compte le groupe d'invariance plus vaste nous permet de voir les choses d'un autre point de vue et nous fait donc comprendre **pourquoi il existe une constante de Planck**.

Cette invariance du produit $m\rho$ a aussi une autre conséquence. Si l'on se restreint à l'invariance sous le sous-groupe des rotations de Lorentz, m y est invariant. Comme le produit $m\rho$ est invariant, ceci implique que ρ a une valeur physiquement déterminée. Or si l'on multiplie ψ ou ϕ par une constante réelle k , ρ est multiplié par k^2 . Dire que ρ a une valeur physiquement déterminée est équivalent à dire que l'onde doit être normalisée, ou que, d'une manière ou

2. La simplification que l'on voit ici par rapport à (2.51), est un argument fort en faveur de l'équation non linéaire homogène. Un facteur $e^{i\theta}$ dans le terme de masse n'est pas très ennuyeux, parce que $m\tilde{m} = |m|^2$. Mais il indique un manque de symétrie et il explique à lui tout seul pourquoi le groupe plus fort d'invariance Cl_3^* n'a pas été aperçu plus tôt. L'invariance de forme de l'électromagnétisme que nous étudierons dans le prochain chapitre, et l'invariance de forme de la théorie de Dirac ne sont pleinement compatibles qu'avec l'équation non linéaire homogène et cette transformation des masses.

d'une autre, il y a une condition physique qui détermine l'amplitude de l'onde. On verra cela dans le prochain paragraphe.

Avec l'équation d'onde (3.10) on obtient l'invariance de l'équation d'onde sous Cl_3^* par la condition

$$m = m' r. \quad (3.54)$$

Nous avons implicitement considéré auparavant r et ρ sur un pied d'égalité, c'est naturel puisque $\rho' = r\rho$. Très généralement : **Il n'y a pas de différence de structure entre la matrice M définissant la dilatation R et l'onde ϕ , qui sont toutes deux des matrices complexes 2×2 c'est-à-dire des éléments de l'algèbre d'espace Cl_3 . Plus précisément ϕ est une fonction de l'espace-temps à valeur dans Cl_3 . Donc ϕ , tout comme M , définit une dilatation de Lorentz D , de rapport ρ , par :**

$$D : y \mapsto x = \phi y \phi^\dagger. \quad (3.55)$$

Et les composantes D_μ^ν des quatre D_μ sont tout simplement les 16 termes de la matrice de cette dilatation, car

$$x = x^\mu \sigma_\mu = \phi y^\nu \sigma_\nu \phi^\dagger = y^\nu \phi \sigma_\nu \phi^\dagger = y^\nu D_\nu = y^\nu D_\nu^\mu \sigma_\mu; \quad x^\mu = D_\nu^\mu y^\nu. \quad (3.56)$$

Il n'y a pas de différence entre le produit matriciel $M'M$ qui donne la composition des dilatations $R' \circ R$ et le produit $M\phi$ qui donne la transformation de l'onde sous une dilatation, et donc induit la composition des dilatations $R \circ D$:

$$x' = MxM^\dagger = M\phi y \phi^\dagger M^\dagger = (M\phi)y(M\phi)^\dagger = \phi' y \phi'^\dagger. \quad (3.57)$$

Ceci signifie que le y introduit en (3.55) ne change pas, qu'il soit vu par l'observateur de x ou par l'observateur de x' . Ce terme est indépendant de l'observateur, intrinsèque à l'onde.

Et puisque ϕ est une fonction de x , la dilatation D est aussi fonction de x , elle varie d'un point à un autre de l'espace-temps : y n'est donc pas un terme d'un espace-temps global, seulement d'un espace-temps local. Donc on doit voir en y l'élément général de l'espace-tangent en x , à une variété d'espace-temps qui dépend seulement de l'onde, pas de l'observateur, et qu'on appellera donc **variété intrinsèque**. Au contraire la dilatation dépend de l'observateur, celui de x voit D tandis que celui de x' voit $D' = R \circ D$.

En chaque point de l'espace-temps il y a donc, non pas une seule variété d'espace-temps, mais **deux variétés d'espace-temps**, et **deux connections affines différentes** : la variété des x et des x' , dans laquelle chaque observateur relativiste est associé à un espace-temps tangent lorentzien, et une autre variété, celle des y dont on étudiera au chapitre 5 quelques propriétés. De plus chaque espace-temps tangent est doté d'une base orthonormale permettant la construction d'une algèbre de Clifford. La fibre de ces variétés est donc une algèbre de Clifford.³ Nous élargirons cela au chapitre 6.

3. Ceci a d'abord été mis en exergue par W. Rodrigues, mais seulement pour une seule variété. Notre travail est donc complètement différent.

3.4 Normalisation de l'onde

L'invariance du lagrangien sous les translations, tout comme en théorie de Dirac linéaire, entraîne l'existence d'un tenseur d'impulsion-énergie conservatif, le tenseur de Tétrode :

$$T_\nu^\mu = i\frac{\hbar}{2}c(\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\nu\psi - \partial_\nu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) - eA_\nu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi - \delta_\nu^\mu\mathcal{L}. \quad (3.58)$$

Puisque l'équation d'onde est homogène, le lagrangien est exactement nul et l'on a :

$$T_\nu^\mu = i\frac{\hbar}{2}c(\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\nu\psi - \partial_\nu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) - eA_\nu J^\mu. \quad (3.59)$$

Pour une onde stationnaire d'énergie E on a :

$$\begin{aligned} \psi &= e^{-i\frac{Et}{\hbar}}\psi(x) ; \quad \bar{\psi} = e^{i\frac{Et}{\hbar}}\bar{\psi}(x) \\ \partial_0\psi &= -i\frac{E}{\hbar}\psi ; \quad \partial_0\bar{\psi} = i\frac{E}{\hbar}\bar{\psi}. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Donc on a :

$$T_0^0 = i\frac{\hbar}{2}c(\bar{\psi}\gamma^0(-i\frac{E}{\hbar})\psi - i\frac{E}{\hbar}\bar{\psi}\gamma^0\psi) - eA_0J^0 = (E - eA_0)J^0. \quad (3.61)$$

La condition de normalisation de la fonction d'onde

$$\iiint J^0 dv = 1 \quad (3.62)$$

est donc équivalente, dans le cas d'un état stationnaire, à

$$\iiint T_0^0 dv = E - eA^0. \quad (3.63)$$

Le terme de gauche de cette égalité est l'énergie totale de l'onde, tandis que le terme de droite est l'énergie d'un corpuscule avec une charge électrique placé dans un champ électromagnétique. Donc ce n'est pas parce qu'il faut avoir une densité de probabilité que l'onde doit être normalisée. L'onde physique est normalisée parce que l'énergie a une masse gravitationnelle, a une valeur déterminée et non pas une valeur arbitraire, et parce que **l'énergie de l'électron est l'énergie de son onde**. Et c'est la même chose que ce soit pour l'équation de Dirac ou pour l'équation non linéaire homogène qui a l'équation de Dirac pour approximation linéaire.

Cette normalisation s'applique évidemment aux solutions pour l'atome d'hydrogène que nous étudions dans l'annexe C. ⁴

4. On doit rappeler que la densité J^0 n'est pas égale à l'invariant relativiste ρ . C'est la composante de temps d'un vecteur d'espace-temps. Rappelons aussi que T_0^0 est une composante d'un tenseur non symétrique, ce qui est totalement en dehors du champ de compétence de la relativité générale, basée sur le tenseur symétrique de Ricci.

3.5 Conjugaison de charge

Nous partons à nouveau du lien qui existe entre l'onde de la particule et l'onde de l'antiparticule, qui est (2.120) avec les matrices complexes de Dirac et (2.125) en algèbre d'espace. L'équation non linéaire homogène (3.10) pour la particule s'écrit

$$\nabla \widehat{\phi}_e \sigma_{21} + q A \widehat{\phi}_e + m e^{-i\beta_e} \phi_e = 0. \quad (3.64)$$

On a aussi

$$\rho_e e^{i\beta_e} = \phi_e \overline{\phi}_e. \quad (3.65)$$

Cela donne avec (2.125) et (2.126)

$$\rho_e e^{i\beta_e} = \phi_e \overline{\phi}_e = \phi_p (-\sigma_1) (\widehat{\phi}_p \sigma_1)^\dagger = -\phi_p \overline{\phi}_p = -\rho_p e^{i\beta_p} \quad (3.66)$$

Par conséquent (3.64) s'écrit

$$\nabla \widehat{\phi}_p \sigma_{12} + q A \widehat{\phi}_p \sigma_1 + m (-e^{-i\beta_p}) (-\phi_p \sigma_1) = 0. \quad (3.67)$$

En multipliant à droite par σ_1 c'est équivalent à

$$-\nabla \widehat{\phi}_p \sigma_{21} + q A \widehat{\phi}_p + m e^{-i\beta_p} \phi_p = 0. \quad (3.68)$$

Ensuite en multipliant par $\overline{\phi}_p$ à gauche on obtient l'équation invariante de l'antiparticule :

$$-\overline{\phi}_p \nabla \widehat{\phi}_p \sigma_{21} + q \overline{\phi}_p A \widehat{\phi}_p + m \rho_p = 0. \quad (3.69)$$

Ceci signifie que seule la partie différentielle de l'équation d'onde change de signe. Au lieu du système (3.21) à (3.28) on obtient maintenant

$$0 = -w^3 + V^0 + m\rho \quad (3.70)$$

$$0 = -v^2 + V^1 \quad (3.71)$$

$$0 = v^1 + V^2 \quad (3.72)$$

$$0 = -w^0 + V^3 \quad (3.73)$$

$$0 = v^3 \quad (3.74)$$

$$0 = -w^2 \quad (3.75)$$

$$0 = w^1 \quad (3.76)$$

$$0 = v^0 \quad (3.77)$$

Aussi la conjugaison de charge ne change pas vraiment le signe de la charge ni le signe de la masse, seulement le terme différentiel de l'équation d'onde⁵.

5. L'invariance de charge électrique est obtenue, à la place de (3.29), comme $\phi_p \mapsto \phi'_p = \phi_p e^{ia\sigma_3}$ et $A_\mu \mapsto A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{q}(-\partial_\mu a) = A_\mu - \frac{1}{-q}\partial_\mu a$. Donc le positron apparaît comme ayant une charge opposée à celle de l'électron. En fait ce n'est pas q mais $\partial_\mu a$ qui change de signe.

Seuls les v^μ et les w^μ changent de signe. Et donc la densité lagrangienne qui est la partie scalaire de l'équation d'onde devient :

$$\begin{aligned} -\mathcal{L} &= -\frac{1}{2}[(\bar{\psi}\gamma^\mu(-i\partial_\mu - qA_\mu)\psi) + (\bar{\psi}\gamma^\mu(-i\partial_\mu - qA_\mu)\psi)^\dagger] + m\rho \\ &= -w^3 + V^0 + m\rho \end{aligned} \quad (3.78)$$

Et la normalisation de l'onde est donc équivalente, toujours dans le cas d'un état stationnaire, à

$$\iiint T_0^0 dv = -E - eA^0. \quad (3.79)$$

La masse-énergie positive du positron est exactement l'opposé de l'énergie-coefficient négative de l'onde stationnaire⁶. L'équation d'onde non linéaire résout donc le puzzle du signe de l'énergie d'une manière beaucoup plus facile à comprendre qu'en théorie quantique des champs : nous avons les coefficients négatifs E nécessaires pour obtenir la transformation de Fourier, mais la vraie densité d'énergie est la composante T_0^0 du tenseur d'impulsion-énergie qui reste positive

Comme (3.69) s'obtient à partir de (3.9) simplement en changeant x^μ en $-x^\mu$ ce qui est la transformation PT, le théorème CPT de la théorie quantique des champs est trivial.

Et comme l'équation de Dirac est l'approximation linéaire de l'équation non linéaire homogène, on obtient l'équation de Dirac du positron à partir de l'équation non linéaire en changeant son terme de masse. Seulement on doit tenir compte du fait que $\beta_p \approx \pi$ et que $\rho_p \approx -\Omega_{1p}$. L'approximation linéaire de l'équation d'onde non linéaire homogène est donc :

$$0 = -\bar{\phi}_p \nabla \hat{\phi}_p \sigma_{21} + q\bar{\phi}_p A \hat{\phi}_p - m\Omega_{1p} \quad (3.80)$$

$$0 = -\nabla \hat{\phi}_p \sigma_{21} + qA \hat{\phi}_p - m\phi_p \quad (3.81)$$

qui est (2.108). Nous avons, pour le signe de E et de T_0^0 , les mêmes résultats qu'avec l'équation non linéaire : E est négatif tandis que T_0^0 est positif.

3.6 L'atome d'hydrogène

La mécanique quantique a obtenu la quantification des niveaux d'énergie en résolvant l'équation de Schrödinger dans le cas de l'atome d'hydrogène, un électron "tournant" autour d'un proton. Obtenir la quantification a été un brillant résultat, mais les autres résultats ne furent pas aussi bons. Les niveaux d'énergie n'étaient pas très précis, et le nombre total d'états quantiques pour un nombre quantique principal $\mathbf{n}$ était $\mathbf{n}^2$ alors que l'on attendait $2\mathbf{n}^2$ états

6. L'étude des ondes planes (3.35) dans le cas de (3.68) donne à la place de (3.37) : $\phi_p = -e^{i\beta_p} v \hat{\phi}_p$, $\hat{\phi}_p = -e^{-i\beta_p} \hat{v} \phi_p$, $\phi_p = v \hat{v} \phi_p$. A la place de (3.42) on a $D_0 = -v\rho_p$ et alors $D_0^0 = -\rho_p v^0$. Donc on obtient $v^0 = -\sqrt{1 + \vec{v}^2} : v^0$ et E sont alors négatifs.

Le calcul détaillé, pour l'équation non linéaire homogène a été mis dans l'appendice C, car s'il est très joli il est aussi très difficile. On ne fera ici que résumer les conclusions. Notre étude des solutions de l'équation non linéaire homogène prouve qu'une famille de solutions existe, solutions étiquetées par les mêmes nombres quantiques apparaissant dans la théorie de Dirac, et ces solutions sont très proches des solutions de l'équation linéaire telles que l'angle d'Yvon-Takabayasi est partout défini et petit. Or si ϕ_1 et ϕ_2 sont deux solutions de cette famille, $a_1\phi_1$ et $a_2\phi_2$ sont aussi solutions de l'équation non linéaire homogène, parce qu'elle est à la fois homogène et invariante de jauge chirale. Mais la somme $a_1\phi_1 + a_2\phi_2$ n'a aucune chance d'être solution de l'équation non linéaire, parce que le déterminant dont l'argument est l'angle d'Yvon-Takabayasi est quadratique par rapport à l'onde, et l'angle n'a donc aucune raison d'être petit. Les solutions étiquetées par les nombres quantiques j, κ, λ, n , sont donc vraisemblablement les seules états stationnaires de l'atome d'hydrogène. Et ceci explique pourquoi un électron dans un atome d'hydrogène est dans l'un des états étiquetés, jamais dans une combinaison linéaire de tels états. Ceci est un fait expérimental bien connu que seule cette équation non linéaire homogène explique de manière simple.

L'équation non linéaire homogène est la seule équation d'onde non linéaire telle que des états d'énergie quantifiés existent avec exactement les bons niveaux d'énergie. Nous avons rencontré dans la résolution une autre chose qui plaide pour cette équation. Les solutions de l'équation linéaire, pour chaque valeur des nombres quantiques j, κ, λ et pour $n > 1$ dépendent de deux constantes complexes arbitraires, il y a donc trop de solutions. On ne s'en aperçoit pas dans la résolution utilisant les opérateurs, parce qu'en imposant à l'onde d'être valeur propre d'un opérateur non relativiste on éjecte automatiquement l'une des deux constantes. Mais notre méthode de résolution par séparation des variables, qui ne postule aucune condition arbitraire pour l'onde, obtient trop de solutions. Or ces deux constantes complexes se réduisent à une seule par (C.114) et (C.118), conditions suffisantes permettant d'obtenir un angle d'Yvon-Takabayasi (C.123) partout défini et petit. On peut donc dire que c'est seulement en imposant aux solutions d'être les approximations linéaires des solutions de l'équation non linéaire que l'on obtient le bon nombre de solutions.

Chapitre 4

Invariance des lois de l'électromagnétisme

Le groupe des dilatations de Lorentz induites par les éléments du groupe Cl_3^* est aussi le groupe d'invariance des lois de l'électromagnétisme. Ceci est établi tant pour l'électromagnétisme de Maxwell-de Broglie, avec photon massif, que pour l'électromagnétisme avec monopôles magnétiques.

Les lois de l'électromagnétisme de Maxwell ne sont pas invariantes sous le groupe d'invariance des lois de la mécanique. En mettant au centre de ses pensées l'invariance de la vitesse de la lumière, Einstein a remplacé, pour toute la physique, le groupe d'invariance de la mécanique par un groupe d'invariance plus vaste, contenant les translations et les rotations, mais aussi les transformations de Lorentz incluant espace et temps. Quand un groupe d'invariance est remplacé par un groupe plus fort, il y a moins d'invariants, par exemple la masse et l'impulsion ne sont plus invariants, seule la masse propre demeure invariante. Et on assiste à un regroupement de grandeurs, par exemple le champ électrique et le champ magnétique deviennent des parties d'un même objet, le tenseur champ électromagnétique. L'énergie et l'impulsion deviennent parties du même vecteur impulsion-énergie.

L'existence de particules de spin $1/2$ nous fait savoir que le groupe des transformations de Lorentz est trop faible, et nous devons utiliser un autre groupe, $SL(2, \mathbb{C})$, lui-même sous-groupe du groupe $GL(2, \mathbb{C}) = Cl_3^*$ dont les éléments sont les éléments inversibles de l'algèbre d'espace. Cela amène à penser Cl_3^* comme le vrai groupe d'invariance, non seulement de l'équation de Dirac, mais plus encore, de tout l'électromagnétisme, et c'est ce que nous allons regarder maintenant.

4.1 L'électromagnétisme de Maxwell-de Broglie

Louis de Broglie proposa une théorie quantique de la lumière [25] [26] dans laquelle l'onde du photon est construite par fusion de deux spineurs de Dirac. Le champ électrique $\vec{E}$, le champ magnétique $\vec{H}$, le potentiel électrique V , le potentiel vecteur $\vec{A}$ suivent les lois de Maxwell dans le vide, avec des termes de masse en plus :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} &= \text{rot} \vec{E} ; \quad \text{div} \vec{H} = 0 ; \quad \vec{H} = \text{rot} \vec{A} \\ \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \text{rot} \vec{H} + k_0^2 \vec{A} ; \quad \text{div} \vec{E} = -k_0^2 V ; \quad \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad} V \\ \frac{1}{c} \frac{\partial V}{\partial t} &+ \text{div} \vec{A} = 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

Le terme $k_0 = \frac{m_0 c}{\hbar}$ contient la masse propre m_0 du photon. Ce terme est certainement très petit, puisqu'il y a très peu de dispersion pour la lumière émise depuis des millions d'années. Mais de Broglie a répondu à ceux qui pensent la masse propre du photon comme exactement nulle qu'aucune expérience physique ne peut prouver qu'une quantité soit exactement, avec une précision infinie, égale à une autre. Pour écrire ces lois de Maxwell-de Broglie en algèbre d'espace, on pose¹ :

$$x^0 = ct ; \quad A^0 = V ; \quad A = A^0 + \vec{A} ; \quad F = \vec{E} + i\vec{H} \quad (4.2)$$

Les 7 lois (4.1) se regroupent en seulement deux égalités :

$$F = \nabla \hat{A} \quad (4.3)$$

$$\hat{\nabla} F = -k_0^2 \hat{A} \quad (4.4)$$

Car (4.3) s'écrit :

$$\begin{aligned} \vec{E} + i\vec{H} &= (\partial_0 - \vec{\partial})(A^0 - \vec{A}) \\ 0 + \vec{E} + i\vec{H} + 0i &= (\partial_0 A^0 + \vec{\partial} \cdot \vec{A}) + (-\partial_0 \vec{A} - \vec{\partial} A^0) + i\vec{\partial} \times \vec{A} + 0i \end{aligned} \quad (4.5)$$

Cette égalité est équivalente au système obtenu en séparant les parties scalaire, vectorielle, pseudo-vectorielle et pseudo-scalaire :

$$0 = \frac{1}{c} \frac{\partial V}{\partial t} + \text{div} \vec{A} \quad (4.6)$$

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad} V \quad (4.7)$$

$$\vec{H} = \text{rot} \vec{A} \quad (4.8)$$

1. L'écriture du champ électromagnétique sous la forme $\vec{E} + i\vec{H}$ est très ancienne. On remarquera cependant que le i qui y figure n'est pas le i de la mécanique quantique, générateur de la jauge électrique, mais c'est le i de la jauge chirale.

Quant à (4.4), elle donne :

$$\begin{aligned}
 (\partial_0 + \vec{\partial})(\vec{E} + i\vec{H}) &= -k_0^2(A^0 - \vec{A}) \\
 \partial_0 \vec{E} + i\partial_0 \vec{H} + \vec{\partial} \cdot \vec{E} + i\vec{\partial} \times \vec{E} + i(\vec{\partial} \cdot \vec{H} + i\vec{\partial} \times \vec{H}) &= -k_0^2(A^0 - \vec{A}) \\
 \vec{\partial} \cdot \vec{E} + \partial_0 \vec{E} - \vec{\partial} \times \vec{H} + i(\partial_0 \vec{H} + \vec{\partial} \times \vec{E}) + i\vec{\partial} \cdot \vec{H} &= -k_0^2 A^0 + k_0^2 \vec{A} + i\vec{0} + 0i
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

Séparant, comme précédemment, les parties scalaire, vectorielle, pseudo-vectorielle et pseudo-scalaire, c'est équivalent à :

$$\operatorname{div} \vec{E} = -k_0^2 V \tag{4.10}$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \operatorname{rot} \vec{H} = k_0^2 \vec{A} \tag{4.11}$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \operatorname{rot} \vec{E} = \vec{0} \tag{4.12}$$

$$\operatorname{div} \vec{H} = 0 \tag{4.13}$$

Ces équations se réduisent aux équations de Maxwell dans le vide, plus la condition de jauge de Lorentz, si la masse propre du photon est annulée. On obtient alors, à la place de (4.4) : $\widehat{\nabla} F = 0$.

4.1.1 Invariance sous Cl_3^*

Dans l'électromagnétisme de Maxwell-de Broglie les termes de potentiel V et $\vec{A}$ ne sont pas de simples outils de calcul, ils font au contraire partie des grandeurs physiques de l'onde du photon, tout autant que $\vec{E}$ et $\vec{H}$. Comment varient ces grandeurs sous une rotation, et sous une dilatation de Lorentz de rapport non égal à 1 ?

Comme les lois de Maxwell de l'électromagnétisme dans le vide sont invariantes, non seulement sous le groupe des transformations de Lorentz, mais même sous le groupe conforme qui contient en plus les inversions et les dilatations, on est amené à supposer que, sous la dilatation de Lorentz R de rapport r engendrée par une matrice M vérifiant (3.49), le champ électromagnétique est transformé selon ² :

$$F' = MFM^{-1} \tag{4.14}$$

Alors si on écrit M sous la forme $M = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}P$, où P est un élément de $SL(2, \mathbb{C})$, on a $P^{-1} = \overline{P}$ et l'on obtient :

$$F' = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}PF \frac{1}{\sqrt{r}}e^{-i\frac{\theta}{2}}\overline{P} = PF\overline{P} \tag{4.15}$$

2. On n'a pas obtenu cette relation immédiatement, c'est une autre relation [13] liant F et F' qu'on a d'abord utilisée, mais elle donne des complications pour obtenir une complète invariance à la fois de l'électromagnétisme et de la théorie de Dirac.

qui est la même transformation que si la dilatation était induite seulement par P , c'est-à-dire était une transformation de Lorentz. Donc (4.14) est telle que le champ électromagnétique ne dépend ni de r , ni de θ : la présence du groupe Cl_3^* est aussi discrète que possible.

L'équation (4.4) est invariante de forme si l'on a

$$\widehat{\nabla}' F' = -k_0'^2 \widehat{A}'. \quad (4.16)$$

Or on a :

$$\nabla = \overline{M} \nabla' \widehat{M} ; \quad \widehat{\nabla} = M^\dagger \widehat{\nabla}' M ; \quad \widehat{\nabla}' = (M^\dagger)^{-1} \widehat{\nabla} M^{-1} \quad (4.17)$$

Et l'on obtient donc :

$$\begin{aligned} -k_0'^2 \widehat{A}' &= \widehat{\nabla}' F' = (M^\dagger)^{-1} \widehat{\nabla} M^{-1} M F M^{-1} \\ &= (M^\dagger)^{-1} \widehat{\nabla} F M^{-1} = (M^\dagger)^{-1} (-k_0^2 \widehat{A}) M^{-1} \end{aligned} \quad (4.18)$$

Mais $k_0 = r k_0'$ puisque $m = r m'$ est requis pour l'invariance de l'équation non linéaire homogène³. On a alors :

$$\begin{aligned} -k_0'^2 \widehat{A}' &= (M^\dagger)^{-1} (-r^2 k_0'^2 \widehat{A}) M^{-1} \\ \widehat{A}' &= (M^\dagger)^{-1} r e^{-i\theta} \widehat{A} r e^{i\theta} M^{-1} \\ \widehat{A}' &= (M^\dagger)^{-1} M^\dagger \widehat{A} M M^{-1} \\ \widehat{A}' &= \widehat{M} \widehat{A} \widehat{M} \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$A' = M A M^\dagger \quad (4.20)$$

qui signifie que, au contraire de qA qui se transforme comme ∇ , A est transformé comme x , est "contravariant". La signification physique est que les potentiels sont liés aux sources et se déplacent avec elles. Mais comment A peut-il être contravariant et qA covariant ? Cela signifie :

$$qA = \overline{M} q' A' \widehat{M} = q' \overline{M} M A M^\dagger \widehat{M} = q' r e^{i\theta} A r e^{-i\theta} = q' r^2 A \quad (4.21)$$

ce qui veut dire⁴ :

$$q = q' r^2 \quad (4.22)$$

3. Ceci est la meilleure raison de penser que la bonne équation d'onde pour l'électron est l'équation non linéaire homogène. L'électromagnétisme et l'équation d'onde de l'électron sont globalement invariants de forme sous Cl_3^* seulement avec cette équation d'onde.

4. Nous sommes tous habitués à élever des indices bas ou à abaisser des indices haut de tenseurs. Ce faisant nous utilisons implicitement la métrique d'espace-temps, nous la considérons implicitement comme invariante. Or si la métrique est invariante sous le groupe de Lorentz, elle n'est pas invariante sous le groupe plus fort des dilatations, donc nous n'avons plus le droit d'élever ou d'abaisser les indices de tenseurs. Un vecteur covariant ne fonctionne pas comme un vecteur contravariant sous une dilatation. Donc nous ne sommes pas non plus autorisés à traiter ∇ , covariant, comme x , contravariant ni à calculer $T(\nabla)$ à la manière de $T(x)$, ce qui était usuel [36] en algèbre d'espace-temps, et nous devons aussi l'éviter.

La charge électrique, comme la masse propre, est un invariant relativiste. La charge électrique, comme la masse propre, n'est pas invariante sous le groupe complet Cl_3^* , et varie quand le rapport de la dilatation n'est pas égal à 1.

La transformation (4.14), et la contravariance (4.20) de A qui s'en déduit, sont compatibles avec la loi (4.3) liant le champ aux potentiels, parce que cela donne :

$$F' = \nabla' \hat{A}' \quad (4.23)$$

$$MFM^{-1} = M(\nabla \hat{A})M^{-1} = M(\overline{M}\nabla'\widehat{M}\hat{A})M^{-1} \quad (4.24)$$

Or on a, avec (4.20) :

$$\hat{A}' = \widehat{M}\hat{A}\widehat{M} ; \quad \widehat{M}\hat{A} = \hat{A}'\widehat{M}^{-1} \quad (4.25)$$

et (4.24) donne

$$\begin{aligned} MFM^{-1} &= M\overline{M}\nabla'\hat{A}'\overline{M}^{-1}M^{-1} \\ &= (M\overline{M})F'(M\overline{M})^{-1} = \det(M)F'(\det(M))^{-1} = F'. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Une dilatation est composée d'une rotation de Lorentz et d'une homothétie de rapport $r > 0$. On sait la vitesse c invariante sous les rotations de Lorentz. Comme une vitesse est un rapport distance sur temps, comme ces deux termes sont multipliés par le rapport d'homothétie r , le rapport distance sur temps ne varie pas. On est donc amené à supposer que l'invariance de la vitesse de la lumière est vraie non seulement sous le groupe des rotations, mais encore sous le groupe des dilatations induites par les éléments de Cl_3^* . L'autre invariant essentiel de la théorie de Dirac est la constante de structure fine α , qui est un nombre pur et qui ne peut donc varier sous une dilatation, pas plus que sous une rotation de Lorentz. Or on a :

$$q = \frac{e}{\hbar c} ; \quad qe = \frac{e^2}{\hbar c} = \alpha = q'e' ; \quad qe = q'r^2e = q'e'. \quad (4.27)$$

On obtient donc

$$e' = r^2e. \quad (4.28)$$

On a ensuite :

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{e'^2}{\hbar'c} = \frac{r^4e^2}{\hbar'c} ; \quad e^2\hbar'c = \hbar cr^4e^2 \quad (4.29)$$

ce qui donne⁵ :

$$\hbar' = r^4\hbar. \quad (4.30)$$

5. On doit donc voir $\hbar$ comme un terme variable sous une dilatation de rapport $r \neq 1$. Poser $\hbar = 1$ est donc une très mauvaise habitude, à perdre dès que possible.

On a finalement :

$$\frac{m_0 c}{\hbar} = m = r m' = r \frac{m'_0 c}{\hbar'} = r \frac{m'_0 c}{r^4 \hbar} = \frac{m'_0 c}{r^3 \hbar} \quad (4.31)$$

ce qui donne :

$$m'_0 = r^3 m_0. \quad (4.32)$$

Et alors une masse propre ne varie pas comme une charge électrique sous une dilatation de Lorentz. Une charge électrique varie comme une surface, une masse propre varie comme un volume. Il y a donc une différence de nature géométrique entre une masse et une charge, qui explique très bien les difficultés rencontrées pour unifier électromagnétisme et gravitation.

Puisqu'une vitesse est multipliée par r^0 , une accélération est multipliée par r^{-1} et une force est multipliée par r^2 . C'est cohérent avec la force de Lorentz puisque le champ électromagnétique est multiplié par r^0 et la charge par r^2 .

4.2 Electromagnetisme avec monopôles

Lorsque Maxwell a écrit ses lois du magnétisme, il supposait que les champs magnétiques sont issus de charges magnétiques, que nous appelons maintenant monopôles magnétiques. Plus tard ceci fut oublié, parce que pendant des décennies nul n'a été capable de prouver l'existence de charges magnétiques isolées. Finalement les enseignants ont présenté les lois de Maxwell à leurs étudiants comme si les monopôles magnétiques ne pouvaient pas exister. Il est pourtant aisé de compléter les lois de l'électromagnétisme sans monopôles pour obtenir les lois de Maxwell avec monopôles. En plus de la densité de charge électrique ρ_e et de la densité de courant électrique $\vec{j}$, une densité de charge magnétique ρ_m et une densité de courant magnétique $\vec{k}$ existent. En plus du potentiel électrique V et du potentiel vecteur $\vec{A}$, un potentiel magnétique W et un potentiel vecteur magnétique $\vec{B}$ existent. Les lois de l'électromagnétisme avec monopôles magnétiques sont :

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\text{grad}V - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \text{rot} \vec{B} ; \quad \vec{H} = \text{rot} \vec{A} + \text{grad}W + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ 0 &= \partial_\mu A^\mu = \frac{1}{c} \frac{\partial V}{\partial t} + \text{div} \vec{A} ; \quad 0 = \partial_\mu B^\mu = \frac{1}{c} \frac{\partial W}{\partial t} + \text{div} \vec{B} \\ \text{rot} \vec{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j} ; \quad \text{div} \vec{E} = 4\pi \rho_e \\ \text{rot} \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} \vec{k} ; \quad \text{div} \vec{H} = -4\pi \rho_m. \end{aligned} \quad (4.33)$$

On peut aisément voir, le calcul est le même que celui fait pour établir (4.3) et (4.4), que ces lois sont équivalentes à :

$$F = \nabla(\widehat{A + iB}) \quad (4.34)$$

$$\widehat{\nabla}F = \frac{4\pi}{c}(\widehat{j + ik}) \quad (4.35)$$

où l'on a posé :

$$B = W + \vec{B} ; \quad k = \rho_m + \vec{k}. \quad (4.36)$$

Donc il est très simple de passer de l'électromagnétisme sans monopôle à l'électromagnétisme avec monopôles magnétiques, il suffit d'ajouter au vecteur d'espace-temps formé par le potentiel électrique et le potentiel vecteur, un pseudo-vecteur d'espace-temps, formé par le potentiel magnétique et le potentiel vecteur magnétique, et d'ajouter au vecteur d'espace-temps formé par la densité de charge électrique et la densité de courant électrique un pseudo-vecteur d'espace-temps constitué de la densité de charge magnétique et de la densité de courant magnétique. Les lois différentielles sont exactement les mêmes, donc on ne peut pas trouver de raison de prohiber ces potentiels et courants magnétiques.

L'invariance de forme de la loi (4.34) sous le groupe Cl_3^* doit à l'évidence être la même pour les deux sortes de termes, donc B , tout comme A , doit être un vecteur contravariant :

$$B' = MBM^\dagger. \quad (4.37)$$

Pour voir ce qu'implique (4.35), on remarquera que l'on a :

$$\widehat{\nabla} = M^\dagger \widehat{\nabla}' M ; \quad F' M = M F \quad (4.38)$$

aussi on a :

$$\begin{aligned} \frac{4\pi}{c}(\widehat{j + ik}) &= \widehat{\nabla}F = M^\dagger \widehat{\nabla}' M F = M^\dagger \widehat{\nabla}' F' M \\ \frac{4\pi}{c}(\widehat{j + ik}) &= M^\dagger \frac{4\pi}{c}(\widehat{j' + ik'}) M \\ j + ik &= \overline{M}(j' + ik')\widehat{M} \end{aligned} \quad (4.39)$$

$$j = \overline{M}j'\widehat{M} ; \quad k = \overline{M}k'\widehat{M} \quad (4.40)$$

ce qui signifie que les vecteurs j et k sont covariants, puisqu'il se transforment comme ∇ . Or ceci est consistant avec l'électromagnétisme, car la densité de charge est le quotient d'une charge e sur un volume dv , et parce qu'on a, sous une dilatation de rapport r :

$$\rho_e = \frac{e}{dv} ; \quad \rho'_e = \frac{e'}{dv'} = \frac{r^2 e}{r^3 dv} = \frac{\rho_e}{r} ; \quad \rho_e = r \rho'_e. \quad (4.41)$$

Donc on peut dire que le choix fait pour la transformation d'un champ électromagnétique dans une dilatation, même s'il donne de surprenant résultats, avec la variation de la charge, de la masse propre et du facteur de Planck, est consistant avec les lois élémentaires de la mécanique, de l'électricité et du magnétisme.

4.3 Retour à l'algèbre d'espace-temps

Jusqu'ici nous avons surtout utilisé l'algèbre d'espace, parce que l'invariance relativiste de la théorie de Dirac y mène inéluctablement, parce que la sous-algèbre paire de l'algèbre d'espace-temps est isomorphe à l'algèbre d'espace. Ceci dit le cadre mathématiques naturel de toute théorie relativiste est l'algèbre de l'espace-temps. Ce cadre est sous-jacent dans les chapitres 2, 3 et 4. Plusieurs raisons nous y ramènent :

- 1 - La variance en r^4 de l'action est celle d'un volume d'espace-temps.
- 2 - Les deux variétés liées par l'onde de Dirac, avec (3.55), sont des variétés d'espace-temps et non des variétés d'espace.
- 3 - On verra au chapitre 6 que les interactions électro-faibles nécessitent l'utilisation de l'algèbre d'espace-temps..

4.3.1 De Cl_3 à $Cl_{1,3}$

Pour passer de l'algèbre d'espace-temps à l'algèbre d'espace, tout ce qu'on a à faire est de ne se servir que des seuls éléments pairs.⁶ Pour passer de l'algèbre d'espace à l'algèbre d'espace-temps la voie la plus aisée ici est d'utiliser la représentation matricielle (1.75). L'onde, notée ϕ en algèbre d'espace, sera notée Ψ en algèbre d'espace-temps. On a obtenu en (2.76) : $\Psi = \begin{pmatrix} \phi & 0 \\ 0 & \hat{\phi} \end{pmatrix}$. N de (1.80) est aussi un élément pair de l'algèbre d'espace-temps, ainsi que le champ électromagnétique que l'on notera dans ce cadre $\mathbf{F}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & \hat{F} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{E} + i\vec{H} & 0 \\ 0 & \vec{E} - i\vec{H} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \vec{E} & 0 \\ 0 & \vec{E} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} iI & 0 \\ 0 & -iI \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{H} & 0 \\ 0 & \vec{H} \end{pmatrix} = \mathbf{E} + \gamma_{0123}\mathbf{H} \end{aligned} \quad (4.42)$$

On abrègera les calculs avec :

$$\mathbf{i} = \gamma_{0123} ; \mathbf{F} = \mathbf{E} + \mathbf{iH} \quad (4.43)$$

6. Dans une algèbre de Clifford sur un espace vectoriel de dimension n l'espace vectoriel des éléments impairs tout comme l'espace vectoriel des éléments pairs est de dimension 2^{n-1} . Comme le produit de deux éléments pairs est pair l'espace-vectoriel des éléments pairs est une sous-algèbre. Dans le cas de $Cl_{1,3}$ cette sous-algèbre est isomorphe à Cl_3 .

Tout élément impair de l'algèbre d'espace-temps est le produit par γ_0 d'un élément pair, donc s'écrit :

$$\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & \widehat{P} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & P \\ \widehat{P} & 0 \end{pmatrix} \quad (4.44)$$

On a aussi utilisé en (1.76) et (2.76) :

$$\boldsymbol{\partial} = \gamma^\mu \partial_\mu = \begin{pmatrix} 0 & \nabla \\ \widehat{\nabla} & 0 \end{pmatrix} ; \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & A \\ \widehat{A} & 0 \end{pmatrix}$$

De la même manière le potentiel magnétique s'écrit :

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & B \\ \widehat{B} & 0 \end{pmatrix} \quad (4.45)$$

Le renversé d'un élément pair s'écrit :

$$\widetilde{N} = \begin{pmatrix} \overline{M} & 0 \\ 0 & M^\dagger \end{pmatrix} ; \quad \widetilde{\Psi} = \begin{pmatrix} \overline{\phi} & 0 \\ 0 & \phi^\dagger \end{pmatrix} \quad (4.46)$$

Le renversé d'un élément impair s'écrit :

$$\widetilde{B} = \begin{pmatrix} 0 & B^\dagger \\ \overline{B} & 0 \end{pmatrix} \quad (4.47)$$

Avec les densités tensorielles sans dérivation de 2.2.2 on a :

$$\begin{aligned} \Psi \widetilde{\Psi} &= \begin{pmatrix} \phi & 0 \\ 0 & \widehat{\phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\phi} & 0 \\ 0 & \phi^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi \overline{\phi} & 0 \\ 0 & \widehat{\phi} \phi^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho e^{i\beta} & 0 \\ 0 & \rho e^{-i\beta} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \Omega_1 + i\Omega_2 & 0 \\ 0 & \Omega_1 - i\Omega_2 \end{pmatrix} = \Omega_1 + \mathbf{i}\Omega_2 = \rho e^{i\beta} \end{aligned} \quad (4.48)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_\mu &= \begin{pmatrix} 0 & D_\mu \\ \widehat{D}_\mu & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \phi \sigma_\mu \phi^\dagger \\ \widehat{\phi \sigma_\mu \phi^\dagger} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \phi & 0 \\ 0 & \widehat{\phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_\mu \\ \widehat{\sigma}_\mu & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\phi} & 0 \\ 0 & \phi^\dagger \end{pmatrix} = \Psi \gamma_\mu \widetilde{\Psi} \end{aligned} \quad (4.49)$$

$$\mathbf{S}_k = \begin{pmatrix} \phi \sigma_k \overline{\phi} & 0 \\ 0 & -\widehat{\phi} \sigma_k \phi^\dagger \end{pmatrix} = \Psi \gamma_{k0} \widetilde{\Psi} \quad (4.50)$$

On doit aussi noter que

$$\widetilde{\Psi} \Psi = \Psi \widetilde{\Psi} = \Omega_1 + \mathbf{i}\Omega_2 \quad (4.51)$$

On a vu en (2.79) comment Hestenes écrit l'équation de Dirac. Puisqu'on a :

$$\Psi \gamma_0 e^{\beta \mathbf{i}} = \begin{pmatrix} 0 & e^{-\beta i} \phi \\ e^{\beta i} \widehat{\phi} & 0 \end{pmatrix} \quad (4.52)$$

l'équation non linéaire homogène s'écrit en algèbre d'espace-temps :

$$\partial\Psi\gamma_{21} = m\Psi\gamma_0 e^{\beta\mathbf{i}} + q\mathbf{A}\Psi \quad (4.53)$$

Pour une dilatation d'espace-temps, avec :

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & x \\ \hat{x} & 0 \end{pmatrix} ; \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & x' \\ \hat{x}' & 0 \end{pmatrix} \quad (4.54)$$

et avec (1.80) et (2.45), on obtient les égalités :

$$\mathbf{x}' = N\mathbf{x}\tilde{N} ; \quad \Psi' = N\Psi. \quad (4.55)$$

4.3.2 Electromagnétisme

Les lois de l'électromagnétisme de Maxwell-de Broglie deviennent :

$$\mathbf{F} = \partial\mathbf{A} \quad (4.56)$$

$$\partial\mathbf{F} = -k_0^2\mathbf{A} \quad (4.57)$$

parce que

$$\partial\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & \nabla \\ \hat{\nabla} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & A \\ \hat{A} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla\hat{A} & 0 \\ 0 & \hat{\nabla}A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & \hat{F} \end{pmatrix} = \mathbf{F} \quad (4.58)$$

$$\partial\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 & \nabla \\ \hat{\nabla} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & \hat{F} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \nabla\hat{F} \\ \hat{\nabla}F & 0 \end{pmatrix} = -k_0^2\mathbf{A} \quad (4.59)$$

Les lois de l'électromagnétisme avec monopôles magnétiques deviennent :

$$\mathbf{F} = \partial(\mathbf{A} + \mathbf{iB}) \quad (4.60)$$

$$\partial\mathbf{F} = \frac{4\pi}{c}(\mathbf{j} + \mathbf{ik}) \quad (4.61)$$

Puisque l'algèbre d'espace était bien connue et donnait des écritures plus simples, quel intérêt y avait-il à développer des calculs en algèbre d'espace ? On peut penser que l'algèbre d'espace-temps est trop simple, il y a trop de symétrie entre l'espace et le temps. On peut utiliser les commodités qu'apporte l'algèbre d'espace-temps, tant qu'il n'est pas nécessaire de distinguer le temps de l'espace, tant qu'il n'y a pas de longueur nulle d'espace-temps. Mais il est aussi nécessaire de ne jamais oublier que le temps n'est pas l'espace. Le temps s'écoule toujours du passé vers le futur tandis qu'on peut se déplacer au loin et revenir en arrière dans l'espace. Sous les dilatations engendrées par les éléments du groupe Cl_3^* l'orientation du temps et l'orientation de l'espace ne peuvent pas changer. Il n'existe aucun moyen physique de changer l'orientation du temps, il n'existe aucun moyen de changer l'orientation de l'espace. Les transformations P et T de la théorie quantique des champs sont purement théoriques.

4.4 Quatre photons

Le commencement de la physique quantique fut l'invention par Einstein en 1905 d'une théorie de la lumière avec des quanta d'impulsion-énergie. Après la théorie corpusculaire de Newton, la théorie ondulatoire de Huyghens fut confortée par les ondes transversales de Fresnel. Cette théorie ondulatoire permit une grande synthèse entre l'électromagnétisme et l'optique. La page suivante de cette histoire fut la découverte par Louis de Broglie de l'onde associée au mouvement de toute particule matérielle. Quand il eut étudié l'équation de Dirac, il retourna au problème initial de l'onde d'un photon-corpuscule. Un photon avec une masse propre $m_0 < 10^{-52}$ kg donne, pour toutes les radiations observables, une non-observable dispersion de la lumière. La nature corpusculaire de la lumière explique la diffusion Compton et elle est compatible avec l'absorption et l'émission de lumière par les électrons des atomes. Elle permet de comprendre la pression de radiation et de calculer complètement toutes les sortes d'effet Doppler. Dans le même temps la lumière a aussi les aspects des ondes de Fresnel et nous savons depuis Einstein que la densité de photons et l'intensité du champ électromagnétique sont proportionnels. Louis de Broglie essaya d'abord d'attacher une onde de Dirac au photon, mais il était alors impossible d'y associer une onde électromagnétique. De cette première tentative il apprit que le champ électromagnétique du photon doit être associé au changement d'état de l'électron interagissant avec le photon. Or les seuls processus d'interaction entre les photons et la matière sont l'absorption et l'effet photo-électrique.

Pour sa construction de l'onde photonique Louis de Broglie partit ensuite de deux spineurs de Dirac, l'un de particule et l'autre d'antiparticule, capables donc d'annihilation donnant alors toute l'impulsion-énergie à l'extérieur. Il établit aussi que toutes les grandeurs électromagnétiques devaient être des combinaisons linéaires des grandeurs liées à l'onde. Dans le cadre du formalisme initial de la théorie de Dirac utilisé par de Broglie ses deux spineurs s'écrivent

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} ; \quad \varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{pmatrix}. \quad (4.62)$$

Ils sont solutions d'une équation d'onde de Dirac pour une particule sans charge électrique, semblable à un neutrino :

$$\partial_0 \psi = (\alpha_1 \partial_1 + \alpha_2 \partial_2 + \alpha_3 \partial_3 + i \frac{m}{2} \alpha_4) \psi \quad (4.63)$$

et à l'équation d'onde pour une antiparticule, semblable à un antineutrino :

$$\partial_0 \varphi = (\alpha_1 \partial_1 - \alpha_2 \partial_2 + \alpha_3 \partial_3 - i \frac{m}{2} \alpha_4) \varphi \quad (4.64)$$

où

$$x^0 = ct ; \quad \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} ; \quad m = \frac{m_0 c}{\hbar} \quad (4.65)$$

$$\alpha_j \alpha_k + \alpha_k \alpha_j = 2\delta_{jk}. \quad (4.66)$$

Il est bien connu que ces relations matricielles ne sont pas suffisantes pour définir de manière unique les matrices α_μ . On peut choisir différents ensembles de matrices α_μ . On choisit ici un ensemble permettant de travailler avec les spineurs de Weyl, donc avec l'invariance relativiste :

$$\alpha_j = \begin{pmatrix} -\sigma_j & 0 \\ 0 & \sigma_j \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, 3 ; \quad \alpha_4 = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -I & 0 \end{pmatrix} ; \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.67)$$

où les σ_j sont les matrices de Pauli et l'on pose :

$$\begin{aligned} \xi &= \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} ; \quad \eta = \begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \\ \zeta^* &= \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta_1^* \\ \zeta_2^* \end{pmatrix} ; \quad \lambda^* = \begin{pmatrix} \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^* \\ \lambda_2^* \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.68)$$

où a^* est le conjugué complexe de a . Avec

$$\begin{aligned} \vec{\partial} &= \sigma_1 \partial_1 + \sigma_2 \partial_2 + \sigma_3 \partial_3 \\ \vec{\partial}^* &= \sigma_1 \partial_1 - \sigma_2 \partial_2 + \sigma_3 \partial_3 \end{aligned} \quad (4.69)$$

l'équation d'onde (4.63) est équivalente à

$$(\partial_0 + \vec{\partial})\xi + i\frac{m}{2}\eta = 0 \quad (4.70)$$

$$(\partial_0 - \vec{\partial})\eta + i\frac{m}{2}\xi = 0. \quad (4.71)$$

ξ et η sont les spineurs de Weyl de l'onde ψ et l'équation d'onde de l'antiparticule (4.64) est équivalente au système

$$\begin{aligned} (\partial_0 + \vec{\partial}^*)\zeta^* - i\frac{m}{2}\lambda^* &= 0 \\ (\partial_0 - \vec{\partial}^*)\lambda^* - i\frac{m}{2}\zeta^* &= 0. \end{aligned} \quad (4.72)$$

Par conjugaison complexe on obtient

$$(\partial_0 + \vec{\partial})\zeta + i\frac{m}{2}\lambda = 0 \quad (4.73)$$

$$(\partial_0 - \vec{\partial})\lambda + i\frac{m}{2}\zeta = 0. \quad (4.74)$$

Ce système est identique à (4.70)-(4.71) si l'on remplace ζ par ξ et λ par η . On pose

$$\phi_1 = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \xi_1 & -\eta_2^* \\ \xi_2 & \eta_1^* \end{pmatrix} ; \quad \phi_2 = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \zeta_1 & -\lambda_2^* \\ \zeta_2 & \lambda_1^* \end{pmatrix} \quad (4.75)$$

qui prennent valeur dans l'algèbre de Pauli. En comparant le système (4.70)-(4.71) au système (2.31)-(2.32) on voit, par (2.42) que ce système est équivalent à l'équation

$$\nabla \hat{\phi}_1 + \frac{m}{2} \phi_1 \sigma_{12} = 0. \quad (4.76)$$

De même le système (4.73)-(4.74) est équivalent à

$$\nabla \hat{\phi}_2 + \frac{m}{2} \phi_2 \sigma_{12} = 0. \quad (4.77)$$

Les deux spineurs suivent la même équation d'onde. Ceci est cohérent avec la théorie de Dirac où la conjugaison de charge change le signe de la charge mais pas le signe de la masse.

De Broglie n'avait pas de théorie pour l'onde d'un système relativiste de particules ni pour l'interaction entre ces deux spineurs. Aussi il supposa simplement que ses deux demi-photons ψ et φ sont liés, ont la même énergie et la même quantité de mouvement [25]. Ils vérifient

$$\varphi_k \partial_\mu \psi_i = (\partial_\mu \varphi_k) \psi_i = \frac{1}{2} \partial_\mu (\varphi_k \psi_i), \quad k, j = 1, 2, 3, 4; \quad \mu = 0, 1, 2, 3. \quad (4.78)$$

Ceci est équivalent, avec (4.42) et (4.48), à

$$\begin{aligned} \xi_k (\partial_\mu \zeta_i^*) &= (\partial_\mu \xi_k) \zeta_i^* = \frac{1}{2} \partial_\mu (\xi_k \zeta_i^*) \\ \xi_k (\partial_\mu \lambda_i^*) &= (\partial_\mu \xi_k) \lambda_i^* = \frac{1}{2} \partial_\mu (\xi_k \lambda_i^*) \\ \eta_k (\partial_\mu \zeta_i^*) &= (\partial_\mu \eta_k) \zeta_i^* = \frac{1}{2} \partial_\mu (\eta_k \zeta_i^*) \\ \eta_k (\partial_\mu \lambda_i^*) &= (\partial_\mu \eta_k) \lambda_i^* = \frac{1}{2} \partial_\mu (\eta_k \lambda_i^*). \end{aligned} \quad (4.79)$$

Les équations (4.76) et (4.77) sont invariantes de forme sous la dilatation de Lorentz D définie par (1.42) et vérifient

$$\phi'_1 = M \phi_1; \quad \phi'_2 = M \phi_2 \quad (4.80)$$

4.4.1 L'électromagnétisme du photon

On part ici de ce que l'on a vu en (4.20) : le potentiel électromagnétique A est un vecteur d'espace-temps contravariant, un vecteur qui se transforme comme x :

$$A' = M A M^\dagger. \quad (4.81)$$

Nous savons en outre que le principe de Pauli impose aux produits d'être antisymétriques. On sait aussi que le terme σ_3 est privilégié avec l'équation de

Dirac⁷. On doit donc considérer un vecteur d'espace-temps A et un champ électromagnétique F_e ainsi définis :

$$A = \phi_1 i\sigma_3 \phi_2^\dagger - \phi_2 i\sigma_3 \phi_1^\dagger \quad (4.82)$$

$$F_e = \nabla \hat{A} \quad (4.83)$$

La variance de A et la variance du champ électromagnétique F_e sous Cl_3^* sont les variances attendues car

$$\begin{aligned} A' &= \phi'_1 i\sigma_3 \phi'_2{}^\dagger - \phi'_2 i\sigma_3 \phi'_1{}^\dagger \\ &= (M\phi_1) i\sigma_3 (M\phi_2)^\dagger - (M\phi_2) i\sigma_3 (M\phi_1)^\dagger \\ &= M(\phi_1 i\sigma_3 \phi_2^\dagger - \phi_2 i\sigma_3 \phi_1^\dagger) M^\dagger = M A M^\dagger \end{aligned} \quad (4.84)$$

$$\begin{aligned} F_e &= \nabla \hat{A} = \overline{M} \nabla' \widehat{M \hat{A}} = \overline{M} \nabla' \widehat{M A M^\dagger} (\widehat{M^\dagger})^{-1} \\ &= \overline{M} (\nabla' \hat{A}') \overline{M}^{-1} = M^{-1} M \overline{M} F'_e \overline{M}^{-1} M^{-1} M \\ &= M^{-1} \det(M) F'_e \det(M^{-1}) M = M^{-1} F'_e M \\ F'_e &= M F_e M^{-1}. \end{aligned} \quad (4.85)$$

A est effectivement un vecteur d'espace-temps parce que

$$\begin{aligned} A^\dagger &= (\phi_1 i\sigma_3 \phi_2^\dagger - \phi_2 i\sigma_3 \phi_1^\dagger)^\dagger \\ &= \phi_2 (-i\sigma_3) \phi_1^\dagger - \phi_1 (-i\sigma_3) \phi_2^\dagger = A. \end{aligned} \quad (4.86)$$

Le calcul de A avec (4.75) et les matrices de Pauli (1.19) donne

$$\hat{A} = 2i \begin{pmatrix} \eta_1 \lambda_1^* - \xi_2^* \zeta_2 - \lambda_1 \eta_1^* + \zeta_2^* \xi_2 & \eta_1 \lambda_2^* + \xi_2^* \zeta_1 - \lambda_1 \eta_2^* - \zeta_2^* \xi_1 \\ \eta_2 \lambda_1^* + \xi_1^* \zeta_2 - \lambda_2 \eta_1^* - \zeta_1^* \xi_2 & \eta_2 \lambda_2^* - \xi_1^* \zeta_1 - \lambda_2 \eta_2^* + \zeta_1^* \xi_1 \end{pmatrix}. \quad (4.87)$$

On remarque donc que chaque produit est l'un des produits de (4.79) et cela donne

$$\begin{aligned} \partial_\mu \hat{A} &= \partial_\mu (\hat{\phi}_1 i\sigma_3 \bar{\phi}_2 - \hat{\phi}_2 i\sigma_3 \bar{\phi}_1) = 2(\partial_\mu \hat{\phi}_1) i\sigma_3 \bar{\phi}_2 - 2(\partial_\mu \hat{\phi}_2) i\sigma_3 \bar{\phi}_1 \\ \nabla \hat{A} &= 2[(\nabla \hat{\phi}_1) i\sigma_3 \bar{\phi}_2 - (\nabla \hat{\phi}_2) i\sigma_3 \bar{\phi}_1]. \end{aligned} \quad (4.88)$$

Les équations de Dirac (4.76) et (4.77) donnent alors

$$\begin{aligned} F_e &= m\phi_1 (-i\sigma_3) i\sigma_3 \bar{\phi}_2 - m\phi_2 (-i\sigma_3) i\sigma_3 \bar{\phi}_1 \\ &= m(\phi_1 \bar{\phi}_2 - \phi_2 \bar{\phi}_1). \end{aligned} \quad (4.89)$$

Tout élément de l'algèbre Cl_3 comme F_e est une somme

$$F_e = s + \vec{E} + i\vec{H} + ip \quad (4.90)$$

7. Nous développerons ceci au chapitre 5.

où s est un scalaire, $\vec{E}$ est un vecteur, $i\vec{H}$ est un pseudo-vecteur et ip est un pseudo-scalaire. Or on obtient

$$\begin{aligned}\bar{F}_e &= s - \vec{E} - i\vec{H} + ip = \overline{m(\phi_1\bar{\phi}_2 - \phi_2\bar{\phi}_1)} = m(\phi_2\bar{\phi}_1 - \phi_1\bar{\phi}_2) \\ &= -m(\phi_1\bar{\phi}_2 - \phi_2\bar{\phi}_1) = -F_e = -s - \vec{E} - i\vec{H} - ip.\end{aligned}\quad (4.91)$$

F_e est donc un pur bivecteur⁸ :

$$s = 0 ; \quad p = 0 ; \quad F_e = \vec{E} + i\vec{H}. \quad (4.92)$$

Ceci est en accord avec tout ce que nous savons en électromagnétisme et en optique. Maintenant (4.83) s'écrit

$$\vec{E} + i\vec{H} = (\partial_0 - \vec{\partial})(A^0 - \vec{A}) = \partial_0 A^0 - \vec{\partial} A^0 - \partial_0 \vec{A} + \vec{\partial} \vec{A} \quad (4.93)$$

et comme

$$\vec{\partial} \vec{A} = \vec{\partial} \cdot \vec{A} + i\vec{\partial} \times \vec{A} ; \quad \partial_0 A^0 + \vec{\partial} \cdot \vec{A} = \partial_\mu A^\mu \quad (4.94)$$

(4.93) est équivalent au système

$$0 = \partial_\mu A^\mu \quad (4.95)$$

$$\vec{E} = -\vec{\partial} A^0 - \partial_0 \vec{A} \quad (4.96)$$

$$\vec{H} = \vec{\partial} \times \vec{A}. \quad (4.97)$$

(4.96) et (4.97) sont les relations bien connues (4.7) et (4.8) entre les champs électriques et magnétique et les termes de potentiel. (4.95) est la relation (4.6) connue sous le nom de jauge de Lorentz, qui est dans le cadre de la théorie de la lumière une condition nécessaire. Avec (4.89) on a

$$\hat{\nabla} F_e = m \hat{\nabla}(\phi_1\bar{\phi}_2 - \phi_2\bar{\phi}_1). \quad (4.98)$$

Un calcul détaillé des matrices montre comme en (4.87) uniquement des produits présents dans (4.79), et ceci donne, de même qu'en (4.88)

$$\hat{\nabla} F_e = 2m[(\hat{\nabla}\phi_1)\bar{\phi}_2 - (\hat{\nabla}\phi_2)\bar{\phi}_1] \quad (4.99)$$

Et on obtient avec les équations d'onde (4.76) et (4.77)

$$\hat{\nabla}\phi_1 = \frac{m}{2}\hat{\phi}_1\sigma_{21} ; \quad \hat{\nabla}\phi_2 = \frac{m}{2}\hat{\phi}_2\sigma_{21} \quad (4.100)$$

$$\begin{aligned}\square\hat{A} &= \hat{\nabla}\nabla\hat{A} = \hat{\nabla}F_e = m^2[\hat{\phi}_1(-i\sigma_3)\bar{\phi}_2 - \hat{\phi}_2(-i\sigma_3)\bar{\phi}_1] \\ \hat{\nabla}F_e &= -m^2\hat{A}\end{aligned}\quad (4.101)$$

8. On a précédemment supposé que le champ électromagnétique F est un pur bivecteur, sans partie scalaire ni pseudo-scalaire, par exemple en (4.2). C'est nécessaire pour obtenir les équations de Maxwell sans terme supplémentaire non physique. Ici nous n'avons rien à supposer, le fait que le champ électromagnétique soit un bivecteur pur est une conséquence de la construction antisymétrique à partir de deux spineurs, et des équations de Dirac.

Ceci est la loi attendue (4.4) et donne (4.10) à (4.12). Aussi on obtient les sept lois de l'électromagnétisme de Maxwell dans le vide, complétés par les termes trouvés par Louis de Broglie contenant la très petite masse propre $m_0 = \frac{m\hbar}{c}$ du photon. Ces sept lois sont exactement les mêmes, mais les grandeurs sont ici seulement réelles ou avec des composantes réelles. F_e est par conséquent exactement le champ électromagnétique de l'électromagnétisme classique et de l'optique. La définition (4.82)-(4.83) permet d'obtenir une théorie d'un photon avec masse propre avec une onde qui met ensemble les composantes réelles d'un potentiel électromagnétique qui est un vecteur d'espace-temps contravariant A et d'un champ électromagnétique, bivecteur pur, F_e . Ceci est un progrès pour la théorie de la lumière, qui vient de l'utilisation de Cl_3 permettant une construction antisymétrique, au lieu des matrices-colonnes de Dirac. De plus les termes de potentiel sont directement liés aux deux spineurs, tout autant que le champ bivectoriel. C'est une différence importante par rapport à l'électromagnétisme classique où les termes potentiels sont souvent considérés comme non physiques. Cette différence arrive avec la physique quantique. Les termes de potentiel sont les termes électromagnétiques présents dans l'équation de Dirac, ou dans l'équation de Schrödinger.

Les lois différentielles (4.83) et (4.101) sont invariantes de forme sous les dilatations définies par (1.42). Cette invariance sous Cl_3^* entraîne qu'elles sont invariantes sous le groupe de Lorentz restreint. Mais ce groupe plus large entraîne des contraintes qui restreignent les possibilités de construction à partir de deux spineurs.

4.4.2 Les trois autres photons de Lochak

Suivant le modèle de (4.82) sept autres vecteurs d'espace-temps devraient être possibles sur le modèle $\phi_1 X \phi_2^\dagger - \phi_2 X \phi_1^\dagger$ puisque l'algèbre Cl_3 est de dimension 8. Seulement trois de ces sept choix : $X = -\sigma_3$, $X = i$, $X = 1$ sont compatibles avec (4.59)⁹ et on a établi [16] que cela donne les trois autres photons de G. Lochak [41][43]. D'abord si $X = -\sigma_3$

$$iB = \phi_1 \widehat{\sigma}_3 \phi_2^\dagger - \phi_2 \widehat{\sigma}_3 \phi_1^\dagger ; F_m = \nabla \widehat{iB} \quad (4.102)$$

donne le photon magnétique. Comme avec le photon électrique chaque grandeur est réelle ou avec des composantes réelles. Il est possible de considérer un champ total $F = F_e + F_m$ vérifiant

$$F = \nabla(\widehat{A + iB}) \quad (4.103)$$

$$\widehat{\nabla} F = -m^2(\widehat{A + iB}) \quad (4.104)$$

qui sont les lois de l'électromagnétisme avec charges électriques et monopôles magnétiques, avec densités de courant électrique j et de courant magnétique k

9. C'est lié à la non commutativité du produit dans Cl_3 . Comme σ_{12} est présent dans l'équation de Dirac, seuls les termes commutant avec σ_{12} marchent ici.

vérifiant

$$j = -\frac{c}{4\pi}m^2A ; \quad k = -\frac{c}{4\pi}m^2B \quad (4.105)$$

très petits puisque m_0 est très petit. Même si A et B sont des vecteurs contravariants, la variance de m permet à j et k d'être des vecteurs covariants sous Cl_3^* , variant comme ∇ , et non comme x .

$$A_{(i)} = \phi_1 i \phi_2^\dagger - \phi_2 i \phi_1^\dagger ; \quad s = \nabla \widehat{A}_{(i)} \quad (4.106)$$

définit un champ scalaire invariant s tandis que

$$iB_{(1)} = \phi_1 \phi_2^\dagger - \phi_2 \phi_1^\dagger ; \quad ip = \nabla \widehat{iB_{(1)}} \quad (4.107)$$

définit un champ pseudo-scalaire invariant ip . On peut mettre ensemble les cas $X = i$ et $X = 1$. On pose

$$P = A_{(i)} + iB_{(1)} ; \quad F_0 = \nabla \widehat{P} = s + ip \quad (4.108)$$

et l'on obtient

$$\widehat{\nabla} F_0 = -m^2 \widehat{P} \quad (4.109)$$

Ainsi il est possible d'obtenir, dans le cadre de Cl_3 les quatre photons de la théorie de de Broglie complétée par Lochak et le tout est invariant sous Cl_3^* . Il y a des différences en comparaison avec la construction basée sur les matrices de Dirac : les grandeurs physiques sont réelles ou ont des composantes réelles et elles sont obtenues par produits antisymétriques de spineurs. C'est très facile à obtenir avec la multiplication interne à l'algèbre Cl_3 et c'était très difficile à faire à partir des matrices complexes uni-colonnes. Ces deux différences sont avantageuses parce que les vecteurs et tenseurs de l'électromagnétisme classique et de l'optique ont seulement des composantes réelles. Et de Broglie a compris très tôt que l'antisymétrisation des produits est suffisante pour obtenir la statistique de Bose-Einstein pour les bosons composés d'un nombre pair de fermions. Le champ scalaire de Lochak et le champ pseudo-scalaire pour lequel de Broglie était prudent sont peut-être à rapprocher du boson scalaire de Higgs qui vient d'être identifié expérimentalement. Comme les champs s et p sont obtenus ici indépendamment du champ des photons électriques et magnétiques, leur masse n'est pas nécessairement très petite et peut même être énorme. Étrangement c'était la première idée de de Broglie sur la partie non-maxwellienne de sa théorie. Est-ce que les bosons de Higgs furent entrevus dès 1934 ?

4.5 Unicité du champ électromagnétique

L'équation de Dirac contient un terme privilégié σ_3 qui peut être généralisé en σ_j , $j = 1, 2, 3$. On généralise alors (3.62)-(3.63) si on pose

$$A_{(j)} = \phi_1 i \sigma_j \phi_2^\dagger - \phi_2 i \sigma_j \phi_1^\dagger \quad (4.110)$$

$$F_e = \nabla \hat{A}_{(j)} \quad (4.111)$$

avec des ondes ϕ_1 et ϕ_2 vérifiant

$$\nabla \hat{\phi}_1 = \frac{m}{2} \phi_1 (-i \sigma_j) \quad (4.112)$$

$$\nabla \hat{\phi}_2 = \frac{m}{2} \phi_2 (-i \sigma_j) \quad (4.113)$$

On peut aussi partir des champs et obtenir à partir d'eux les potentiels. Le champ électromagnétique est alors défini par (3.69)

$$F_e = m(\phi_1 \bar{\phi}_2 - \phi_2 \bar{\phi}_1) \quad (4.114)$$

Les termes de potentiel sont reliés à ce champ par les équations de Dirac (3.92) et (3.93), ils vérifient

$$F_e = \nabla \hat{A}_{(j)} ; \quad \hat{\nabla} F_e = -m^2 \hat{A}_{(j)} \quad (4.115)$$

Il est intéressant de noter que F_e est indépendant de l'indice j , de sorte que le champ électromagnétique est unique, un fait qui nous sera très utile dans le chapitre 5.

4.6 Remarques

L'onde quantique du photon est effectivement une onde électromagnétique, avec un champ et un potentiel qui ont des composantes réelles.

Tous les objets ont été définis par produit antisymétrique de spineurs. Ils peuvent disparaître dès que les deux spineurs sont égaux. Ils peuvent apparaître dès que les deux spineurs ne sont pas égaux.

La principale différence en comparaison avec l'électromagnétisme classique concerne les potentiels. Ce ne sont pas des vecteurs de convenance résultants de calculs adéquats. Ce sont des grandeurs essentielles. Les champs se calculent à partir d'eux. C'est un renforcement de la place des potentiels en physique quantique. Il faut rappeler que les équations d'onde de la mécanique quantique contiennent les potentiels. Les champs sont seconds.

Le résultat des conditions (4.78) de de Broglie est une linéarisation de la dérivation de produits qui donne des équations linéaires pour les bosons construits à partir de fermions. C'est pour cela que l'opérateur linéaire ∇ agit à la fois dans l'équation de Dirac et dans les équations de Maxwell. Cette linéarisation donne les lois de Maxwell.

L'invariance de forme des lois physiques sous Cl_3^* est générale et régit la construction des bosons à partir des fermions. La symétrie de jauge est ici seulement approchée, parce que la masse propre non nulle du photon limite la symétrie.

Chapitre 5

Conséquences

On étudie une première conséquence de l'existence de deux variétés d'espace-temps et des dilatations de l'une des variétés dans l'autre : l'anisotropie de la variété intrinsèque. On relie ceci à l'existence de trois sortes de leptons. On présente de nouvelles possibilités pour l'onde de systèmes de particules identiques. On étudie une équation d'onde sans possibilité de mécanisme lagrangien.

L'onde de l'électron induit, en chaque point de l'espace-temps, une transformation géométrique de l'espace-tangent à la variété intrinsèque liée à l'onde, dans l'espace-temps usuel de la relativité restreinte. L'espace-temps intrinsèque, contrairement à l'espace-temps usuel, n'est pas isotrope, et nous étudions maintenant cette anisotropie.

5.1 Anisotropie

Le fait qu'il existe, en théorie de Dirac, une direction privilégiée fut remarquée par de Broglie dès son premier travail sur l'équation de Dirac [24] p.138 : *“Les fonctions ψ_i solutions de ces équations sont donc intimement liées au choix des axes comme dans la théorie de Pauli ; elles doivent servir à calculer des probabilités pour lesquelles l'axe des z joue un rôle particulier”*. La solution à cette difficulté est qu'avec une rotation il est toujours possible de mettre l'axe des z dans n'importe quelle direction de l'espace.

La résolution de ce problème utilise donc un élément convenablement choisi de Cl_3^* , qui engendre une rotation spatiale et qui tourne le troisième axe de coordonnées dans la direction choisie. Il y a toujours deux solutions, et alors l'espace-temps final, l'espace-temps relatif, est isotrope, n'a pas de direction privilégiée. Mais l'espace-temps initial, espace-temps intrinsèque à l'onde, reste au contraire parfaitement non isotrope : après comme avant la rotation, c'est toujours σ_3 qui est privilégié. On a remarqué précédemment qu'avec le formalisme des matrices complexes les γ_μ sont invariantes. Elles sont identiques après

ou avant la rotation. Quelque soit le formalisme utilisé c'est toujours la troisième composante du spin qui est mesuré, ainsi que le carré du vecteur de spin, jamais la première ou la seconde composante du spin. La raison en est évidente si on regarde l'équation d'onde ou la densité lagrangienne dans l'algèbre de Clifford d'espace. Cette troisième direction est présente dans l'équation d'onde et dans le lagrangien qui contiennent tous deux un $i\sigma_3$.

Maintenant, et c'est la première conséquence concrète des calculs dans l'algèbre de Pauli, il est parfaitement possible d'écrire deux autres lagrangiens, deux autres équations d'onde semblables à l'équation de Dirac :

$$\nabla\hat{\phi} + qA\hat{\phi}\sigma_{23} + me^{-i\beta}\phi\sigma_{23} = 0 \quad (5.1)$$

$$\nabla\hat{\phi} + qA\hat{\phi}\sigma_{31} + me^{-i\beta}\phi\sigma_{31} = 0 \quad (5.2)$$

Les équations d'onde invariantes que l'on obtient en multipliant à gauche par $\bar{\phi}$ sont

$$\bar{\phi}(\nabla\hat{\phi})\sigma_{32} + \bar{\phi}qA\hat{\phi} + m\rho = 0 \quad (5.3)$$

$$\bar{\phi}(\nabla\hat{\phi})\sigma_{13} + \bar{\phi}qA\hat{\phi} + m\rho = 0 \quad (5.4)$$

Avec l'équation d'onde (5.1)(5.3), C'est le premier axe qui est privilégié. Les vecteurs d'espace-temps conservatifs sont D_0 et D_1 . Pour résoudre l'équation (5.1) pour l'atome d'hydrogène, on prendra à nouveau la méthode de séparation des variables de l'appendice C, faisant une permutation circulaire p sur les indices de matrices 1, 2, 3 : $\sigma : 1 \mapsto 2, 2 \mapsto 3, 3 \mapsto 1$, et sur les indices de (C.1). Comme c'est tout ce qui change, les résultats seront les mêmes.

Avec l'équation d'onde (5.2), c'est le second axe qui est privilégié. Les vecteurs d'espace-temps conservatifs sont D_0 et D_2 . Pour résoudre l'équation (5.2) pour l'atome d'hydrogène, on prendra à nouveau la méthode de séparation des variables de l'appendice D, faisant une permutation circulaire $p^2 = p^{-1}$ sur les indices 1, 2, 3 de matrices σ , et sur les indices de (C.1). Comme c'est tout ce qui change, les résultats seront les mêmes.

Dans tout ce que nous savons aujourd'hui à partir de la physique expérimentale il existe quelque chose de très similaire. A côté des électrons il existe aussi des muons et des taus. Les trois sortes d'objets sont très similaires et néanmoins différents. Les muons sont connus depuis plus de 70 ans, et jusqu'à maintenant sans la moindre explication simple disant pourquoi ils existent, ni ce qui les distingue des électrons. On associera ici à chaque catégorie, c'est-à-dire à chacune des trois générations, une des trois équations d'onde (3.9), (5.3) et (5.4). La similarité entre les équations d'onde permet d'expliquer pourquoi les électrons, les muons et les taus ont les mêmes propriétés, se comportent exactement de la même manière dans un champ coulombien. En fait, pour voir une différence entre ces trois équations, il est nécessaire de dépasser l'équation d'onde d'une particule seule et d'entrer dans la question d'un système composé de différentes sortes de particules.¹

1. On sait par exemple qu'un muon à l'intérieur d'un nuage électronique n'est pas soumis

On ne peut pas nous objecter que la troisième direction **ou** la première direction peuvent être placées, après une rotation, dans une direction quelconque : une rotation ne peut pas tourner à la fois la troisième direction **et** la première direction dans une direction donnée. Aussi dans cette direction il est impossible de mesurer à la fois le spin d'un électron suivant (3.9) **et** le spin d'un muon suivant (5.3).

De plus nous savons qu'un muon, même si c'est une particule de spin $\frac{1}{2}$ comme l'électron, ne peut pas se désintégrer spontanément en un électron seul. Sa désintégration donne un électron plus un neutrino muonique et un anti-neutrino électrique. Ceci peut être interprété de la manière suivante : l'onde du neutrino muonique, comme l'onde du muon a la propriété d'avoir un spin mesurable dans la première direction et emporte avec lui le spin du muon. Le spin de l'électron qui se mesure dans la troisième direction est apporté par l'antineutrino avec un spin opposé à celui de l'électron.

Jusqu'à présent on a supposé arbitrairement que l'électron suit (3.9) et que le muon suit (5.3). L'un ou l'autre pourrait évidemment suivre (5.4), rien ne nous permet de choisir. D'un autre côté le choix fait par la Nature de l'une ou l'autre équation explique le fait que l'espace physique est orienté : considérons dans l'espace intrinsèque trois vecteurs d'espace ayant respectivement la troisième direction et la longueur d'onde de l'électron, la première direction et la longueur d'onde du muon, la seconde direction et la longueur d'onde du tau. Ces trois vecteurs constituent une base de l'espace intrinsèque. Maintenant si l'on échange le second et le troisième vecteur, on obtient une autre base, avec l'autre orientation.

Les trois équations (3.9), (5.3) et 5.4 ne sont équivalentes que si les termes de masse sont égaux dans les différentes équations. Or l'expérience montre que ces masses sont complètement différentes d'une génération à l'autre. Cette différence, d'origine inconnue, contribue à différencier les trois générations de leptons.

5.1.1 Torsion

On a calculé la connexion affine de la variété intrinsèque en [16]. Dans le cas des ondes planes étudiées dans les chapitres 2 et 3 seulement deux termes du tenseur de torsion sont non nuls et donnent donc une variété avec torsion. Ces termes de torsion sont liés à la masse propre de la particule.

5.2 Systèmes d'électrons

La théorie non relativiste d'un système de particules donne pour un système de deux particules sans spin une onde $\psi = \psi_1\psi_2$ qui est le produit des ondes

au principe d'exclusion de Pauli. C'est plutôt facile à expliquer si le principe d'exclusion est lié au spin des différentes particules, parce que le spin d'un électron suivant l'équation (3.10) est toujours mesuré dans la troisième direction et ne peut pas être ajouté ou soustrait au spin du muon suivant l'équation d'onde (5.1), qui est toujours mesuré dans la première direction.

de chaque particule, quand il est possible de négliger l'interaction entre ces particules. On ne peut pas transposer $\psi_1\psi_2$ en $\phi_1\phi_2$ qui serait transformé en $M\phi_1M\phi_2$ sous la dilatation R définie en (1.42), car M ne commute pas avec ϕ . Un autre produit est suggéré par (4.14) parce que si $\phi_{12} = \phi_1\phi_2^{-1}$ on a

$$\phi'_{12} = \phi'_1\phi'^{-1}_2 = M\phi_1\phi_2^{-1}M^{-1} = M\phi_{12}M^{-1}. \quad (5.5)$$

Et ϕ_{12} se transforme sous une dilatation comme un champ électromagnétique. Mais le facteur $e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$ de la mécanique quantique non relativiste devient dans le cas de l'électron $e^{-\frac{E}{\hbar c}x^0\sigma_{12}}$ avec l'algèbre Cl_3 , et avec $\phi_1\phi_2^{-1}$ les énergies ne sont pas ajoutées mais retranchées. Pour obtenir l'addition des énergies on peut considérer des termes comme $\phi_1\sigma_1\phi_2^{-1}$ ou $\phi_1\sigma_2\phi_2^{-1}$ parce que σ_1 and σ_2 anticommute avec σ_{12} et

$$\sigma_1 e^{-\frac{E}{\hbar c}x^0\sigma_{12}} = e^{\frac{E}{\hbar c}x^0\sigma_{12}}\sigma_1. \quad (5.6)$$

Comme on a

$$\sigma_2 = \sigma_1\sigma_{12} = \sigma_1 e^{\frac{\pi}{2}\sigma_{12}} \quad (5.7)$$

σ_1 et σ_2 ne diffèrent que par un facteur de jauge fixe et l'on peut choisir σ_1 . Comme on sait que deux électrons sont identiques on peut ne considérer que les termes tels que $\phi_1\sigma_1\phi_2^{-1} \pm \phi_2\sigma_1\phi_1^{-1}$. Le principe de Pauli nous invite à considérer pour l'onde d'un système de deux électrons

$$\phi_{12} = \phi_1\sigma_1\phi_2^{-1} - \phi_2\sigma_1\phi_1^{-1} \quad (5.8)$$

qui est antisymétrique

$$\phi_{21} = -\phi_{12} \quad (5.9)$$

et se transforme sous une dilatation R de "dilatateur" M comme F [15]

$$\phi'_{12} = M\phi_{12}M^{-1}. \quad (5.10)$$

Pour un système de trois électrons dont les ondes respectives sont ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 on considère

$$\phi_{123} = \phi_{12}\phi_3 + \phi_{23}\phi_1 + \phi_{31}\phi_2 \quad (5.11)$$

qui vérifie

$$\phi_{123} = \phi_{231} = \phi_{312} = -\phi_{132} = -\phi_{321} = -\phi_{123}, \quad (5.12)$$

$$\phi'_{123} = M\phi_{123}. \quad (5.13)$$

Le principe de Pauli est vérifié et ϕ_{123} se transforme comme une onde électronique². Ensuite pour quatre électrons on considère

$$\phi_{1234} = \phi_{12}\phi_{34} + \phi_{23}\phi_{14} + \phi_{31}\phi_{24} + \phi_{34}\phi_{12} + \phi_{14}\phi_{23} + \phi_{31}\phi_{24} \quad (5.14)$$

2. Si une construction semblable est possible pour les quarks, ceci pourrait expliquer pourquoi un proton ou un neutron, composés de trois quarks, est vu comme un spineur unique se transformant sous une rotation de Lorentz comme l'onde d'un unique électron.

qui est antisymétrique et se transforme aussi comme le champ électromagnétique

$$\phi'_{1234} = M\phi_{1234}M^{-1}. \quad (5.15)$$

On peut aisément généraliser à n électrons. On obtient $n + 1$ équations d'onde, une pour chaque onde électronique

$$\nabla \hat{\phi}_k + qA_k \hat{\phi}_k \sigma_{12} + me^{-i\beta_k} \phi_k \sigma_{12} = 0 \quad (5.16)$$

où A_k est la somme du potentiel électromagnétique extérieur A et du potentiel créé par les $n - 1$ autres électrons, β_k est l'angle d'Yvon-Takabayasi du k ème électron. Et l'onde du système est antisymétrique. L'équation d'onde de cette onde est déterminée par les n équations d'onde de chaque particule. Si n est pair $\phi_{12\dots n}$ se transforme sous une dilatation comme un champ électromagnétique F . L'onde d'un système pair apparaît comme une onde de boson. Les systèmes pairs composent des systèmes plus grands symétriquement comme en (5.14). Ceci est la source des statistiques de Bose-Einstein. Si n est impair $\phi_{12\dots n}$ se transforme sous une dilatation comme un unique spineur ϕ . L'onde d'un système impair d'électrons se transforme dans une dilatation comme l'onde d'un unique électron.

L'onde d'un système se propage, comme l'onde de chaque électron, dans l'espace-temps usuel. Il n'est pas nécessaire de se servir d'un espace de configuration. Les difficultés venant de la différence entre un temps unique et plusieurs espaces disparaissent. L'espace est, comme le temps, unique dans cette construction. L'onde d'un système n'est pas très différente de l'onde de ses parties individuelles, elles continuent d'exister et de se propager.

Ce modèle peut aussi expliquer pourquoi un muon, dans un nuage électronique, ne suit pas le principe d'exclusion de Pauli : avec une équation d'onde (5.1) par exemple la phase contient non pas un facteur σ_{12} mais à la place un facteur σ_{23} et le muon ne peut pas ajouter son impulsion-énergie et entrer dans le processus de construction d'une onde de système décrit ici.

5.3 Équation sans formalisme lagrangien

On a vu en 2.4 que la densité lagrangienne de l'onde de Dirac est exactement la partie scalaire de l'équation d'onde invariante. Le formalisme lagrangien est une conséquence, et non pas la cause de l'équation de Dirac. Par conséquent, si on modifie l'équation d'onde sans changer sa partie scalaire, on obtiendra une équation d'onde qui ne peut pas résulter d'un mécanisme lagrangien, puisque la partie scalaire donne l'équation de Dirac sans changement [19].

Une telle onde peut ne correspondre à rien de physique, puisque le formalisme lagrangien marche très bien pour toutes les situations physiques. On étudiera cependant un cas, comme les failles et les accidents sont scrutés dans l'industrie ou comme les contre-exemples sont précieux en mathématiques. On

considère l'équation d'onde invariante

$$\bar{\phi}(\nabla\hat{\phi})\sigma_{21} + \bar{\phi}qA\hat{\phi} + m\bar{\phi}\phi(1 + \epsilon\sigma_3) = 0. \quad (5.17)$$

où ϵ est une constante réelle très petite. Seul le terme de masse est changé par rapport à l'équation invariante (2.81) équivalente à l'équation de Dirac. Le calcul des premiers termes est inchangé, le terme de masse est

$$\begin{aligned} m\bar{\phi}\phi(1 + \epsilon\sigma_3) &= m(\Omega_1 + i\Omega_2)(1 + \epsilon\sigma_3) \\ &= m\Omega_1 + m\epsilon\Omega_1\sigma_3 + m\epsilon\Omega_2i\sigma_3 + im\Omega_2. \end{aligned} \quad (5.18)$$

et le système (2.118) à (2.125) devient

$$0 = w^3 + V^0 + m\Omega_1 \quad (5.19)$$

$$0 = v^2 + V^1 \quad (5.20)$$

$$0 = -v^1 + V^2 \quad (5.21)$$

$$0 = w^0 + V^3 + m\epsilon\Omega_1 \quad (5.22)$$

$$0 = -v^3 + m\Omega_2 \quad (5.23)$$

$$0 = w^2 \quad (5.24)$$

$$0 = -w^1 \quad (5.25)$$

$$0 = -v^0 + m\epsilon\Omega_2 \quad (5.26)$$

Cette dernière égalité signifie que le courant de probabilité n'est plus conservatif donc l'équation d'onde est certainement inusuelle. Maintenant il est facile d'éviter ce problème de non conservation des probabilités : on part pour cela de l'équation non linéaire homogène (3.9) et on lui ajoute le même terme de masse

$$\bar{\phi}(\nabla\hat{\phi})\sigma_{21} + \bar{\phi}qA\hat{\phi} + m\rho(1 + \epsilon\sigma_3) = 0. \quad (5.27)$$

Le système (3.21) à (3.28) devient

$$0 = w^3 + V^0 + m\rho \quad (5.28)$$

$$0 = v^2 + V^1 \quad (5.29)$$

$$0 = -v^1 + V^2 \quad (5.30)$$

$$0 = w^0 + V^3 + m\epsilon\rho \quad (5.31)$$

$$0 = -v^3 \quad (5.32)$$

$$0 = w^2 \quad (5.33)$$

$$0 = -w^1 \quad (5.34)$$

$$0 = -v^0 \quad (5.35)$$

Et comme précédemment nous avons deux courants conservatifs, $J = D_0$ et $K = D_3$. Il est facile de voir que (5.27) est invariante de forme sous Cl_3^* , il y a

deux invariances de jauge (voir 3.1). Les moments cinétiques de la théorie de Dirac sont encore disponibles, mais il n'y a pas de hamiltonien pour commuter avec eux. Cette équation d'onde ne peut pas venir d'une densité lagrangienne parce qu'une telle densité modifierait (5.28), qui donne (3.9), et pas (5.27).

5.3.1 Ondes planes

On considère une onde plane avec une phase φ vérifiant (3.35) avec le vecteur v défini en (3.35). Sans champ électromagnétique extérieur on obtient à la place de (3.39)

$$-mv\widehat{\phi} + me^{-i\beta}\phi(1 + \epsilon\sigma_3) = 0. \quad (5.36)$$

Ceci donne

$$\phi(1 + \epsilon\sigma_3) = e^{i\beta}v\widehat{\phi}. \quad (5.37)$$

En conjuguant, on obtient alors

$$\widehat{\phi}(1 - \epsilon\sigma_3) = e^{-i\beta}\widehat{v}\phi. \quad (5.38)$$

Ensemble on a

$$\begin{aligned} \phi(1 + \epsilon\sigma_3)(1 - \epsilon\sigma_3) &= e^{i\beta}v\widehat{\phi}(1 - \epsilon\sigma_3) \\ \phi(1 - \epsilon^2) &= e^{i\beta}ve^{-i\beta}\widehat{v}\phi \\ (1 - \epsilon^2)\phi &= v\widehat{v}\phi \end{aligned} \quad (5.39)$$

et nous avons

$$v \cdot v = v\widehat{v} = 1 - \epsilon^2 \quad (5.40)$$

$$\|v\| = \sqrt{1 - \epsilon^2} \quad (5.41)$$

On pose donc

$$c' = c\sqrt{1 - \epsilon^2}; \quad v = v'\sqrt{1 - \epsilon^2}. \quad (5.42)$$

Et on obtient

$$\|v'\| = 1. \quad (5.43)$$

Première conséquence, c'est c' et non pas c qui est la vitesse limite de cet objet quantique inhabituel. La présente étude n'a pas d'application physique connue, mais cette équation d'onde indique que la vitesse limite c n'est pas si générale qu'on le pensait [19]. De plus, si ϵ tend vers 1 la vitesse limite tend vers 0 et peut être très petite.

Chapitre 6

Interactions électro-faibles et fortes

D'abord on se sert de l'algèbre de Clifford de l'espace-temps pour étudier les interactions électro-faibles. On commence avec les interactions faibles de l'électron avec son neutrino et leurs ondes conjuguées de charge. Puis on étudie l'invariance de ces interactions. On étend le groupe de jauge au secteur des quarks, en utilisant l'algèbre $Cl_{5,1}$. On présente dans ce cadre le groupe $SU(3)$ de la chromodynamique. On étudie la transformation géométrique liée à l'onde complète dans le cadre de cet espace-temps de dimension 6. On obtient deux identités remarquables qui rendent habituelle l'inversibilité de l'onde. On obtient des équations d'onde avec terme de masse, invariants de forme et invariants de jauge.

6.1 Le modèle de Weinberg-Salam pour l'électron et son neutrino

Une extension de l'équation de Dirac aux interactions électro-faibles [51] fut tentée par D. Hestenes [31] et par R. Boudet [3] [4] dans le cadre de l'algèbre de Clifford $Cl_{1,3}$ de l'espace-temps. On utilise en [18] un autre point de départ qui est le cadre plus vaste $Cl_{2,3}$. Un cadre plus vaste était nécessaire si on voulait n'utiliser aucune condition supplémentaire. Maintenant, l'étude qu'on va faire dans ce chapitre nécessite d'utiliser la condition (2.120) et (2.125) qui est utilisée dans le modèle standard pour lier l'onde de la particule et l'onde de l'antiparticule. Par conséquent le cadre mathématique reste l'algèbre d'espace-temps qui a 16 dimensions, assez pour rendre compte des 8 paramètres réels de l'onde de l'électron et des 8 paramètres réels de l'onde du neutrino électronique.¹ On a vu en 3.5 que la condition (2.125) est compatible avec

1. On verra en 6.6 que seulement 4 de ces paramètres sont non nuls.

l'équation d'onde non linéaire et qu'elle résout le puzzle des énergies négatives.

On commence par le cas de l'électron et on suit [29]. On ne change rien à l'onde de l'électron, notée ψ_e dans le formalisme de Dirac et ϕ_e en algèbre d'espace, l'onde du neutrino électronique est notée ψ_n , l'onde du positron est notée ψ_p et l'onde de l'anti-neutrino électronique est notée ψ_a . On utilise les mêmes notations que précédemment pour les spineurs de Weyl. Les spineurs droits sont des ξ et les spineurs gauches sont des η .

$$\psi_e = \begin{pmatrix} \xi_e \\ \eta_e \end{pmatrix} ; \psi_n = \begin{pmatrix} \xi_n \\ \eta_n \end{pmatrix} ; \psi_p = \begin{pmatrix} \xi_p \\ \eta_p \end{pmatrix} ; \psi_a = \begin{pmatrix} \xi_a \\ \eta_a \end{pmatrix}. \quad (6.1)$$

On a

$$\phi_e = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \xi_e & -i\sigma_2 \eta_e^* \end{pmatrix} ; \hat{\phi}_e = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \eta_e & -i\sigma_2 \xi_e^* \end{pmatrix} \quad (6.2)$$

$$\phi_n = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \xi_n & -i\sigma_2 \eta_n^* \end{pmatrix} ; \hat{\phi}_n = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \eta_n & -i\sigma_2 \xi_n^* \end{pmatrix} \quad (6.3)$$

$$\hat{\phi}_p = \hat{\phi}_e \sigma_1 ; \hat{\phi}_a = \hat{\phi}_n \sigma_1 \quad (6.4)$$

qui donne

$$\hat{\phi}_p = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \eta_p & -i\sigma_2 \xi_p^* \end{pmatrix} ; \phi_p = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \xi_p & -i\sigma_2 \eta_p^* \end{pmatrix} \quad (6.5)$$

$$\hat{\phi}_a = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \eta_a & -i\sigma_2 \xi_a^* \end{pmatrix} ; \phi_a = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \xi_a & -i\sigma_2 \eta_a^* \end{pmatrix} \quad (6.6)$$

$$\begin{aligned} \xi_{1p} &= \eta_{2e}^*, & \xi_{2p} &= -\eta_{1e}^*, & \eta_{1p} &= -\xi_{2e}^*, & \eta_{2p} &= \xi_{1e}^* \\ \xi_{1a} &= \eta_{2n}^*, & \xi_{2a} &= -\eta_{1n}^*, & \eta_{1a} &= -\xi_{2n}^*, & \eta_{2a} &= \xi_{1n}^*. \end{aligned} \quad (6.7)$$

On a utilisé en [18] une onde Ψ qui est une fonction de l'espace-temps à valeur dans l'algèbre $Cl_{2,3} = M_4(\mathbb{C})$. On dispose les ondes des particules sur la première ligne et les ondes des antiparticules sur la seconde ligne pour obtenir la forme correcte des transformations des ondes gauches et droites sous une dilatation de Lorentz, comme on le reverra en 6.5. On a utilisé un facteur σ_1 qui a joué le rôle d'un facteur nécessaire échangeant les termes ξ and η . Ceci suffit pour obtenir les ondes des quatre objets quantiques du secteur électronique² et avec le lien (2.125) entre l'onde de la particule et l'onde de l'antiparticule on a

$$\Psi = \begin{pmatrix} \phi_e & \phi_n \\ \hat{\phi}_a \sigma_1 & \hat{\phi}_p \sigma_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_e & \phi_n \\ \hat{\phi}_n & \hat{\phi}_e \end{pmatrix} \quad (6.8)$$

Maintenant grâce à (6.4) et (6.8) l'onde est une fonction de l'espace-temps à valeur dans l'algèbre de Clifford de l'espace-temps. Le modèle de Weinberg-Salam utilise ξ_e, η_e, η_n et suppose $\xi_n = 0$. Cette hypothèse sera utilisée seulement plus loin en 6.6. Pour séparer ξ_e, η_e et η_n le modèle de Weinberg-Salam utilise les

2. On pourrait échanger les positions de ϕ_e et ϕ_n . Avec (6.8) l'onde de l'électron est à valeur dans la sous-algèbre paire d'espace-temps et le neutrino a valeur dans la partie paire de l'algèbre. L'autre choix est possible à condition d'adapter les définitions des projecteurs en (6.12) à (6.16)

Dirac :

$$\frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\psi = \psi_L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta \end{pmatrix} \quad (6.9)$$

$$\frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\psi = \psi_R = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (6.10)$$

Alors pour les particules les ondes gauches sont des ondes η et les ondes droites sont des ondes ξ . Ceci est invariant sous Cl_3^* , et par conséquent invariant relativiste, puisque sous une dilatation de Lorentz D engendrée par M tel que $D : x \mapsto x' = MxM^\dagger$ on a (1.30) : $\xi' = M\xi$, $\eta' = \widehat{M}\eta$. La matrice γ_5 ne fait pas partie de l'algèbre d'espace-temps³, mais ce n'est pas un problème, parce que les projecteurs séparant ξ de η sont en algèbre de Pauli $\frac{1}{2}(1 \pm \sigma_3)$:

$$\begin{aligned} \phi_R &= \sqrt{2} \begin{pmatrix} \xi & 0 \end{pmatrix} = \phi \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \phi \frac{1}{2}(1 + \sigma_3) \\ \phi_L &= \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_2\eta^* \end{pmatrix} = \phi \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \phi \frac{1}{2}(1 - \sigma_3) \\ \widehat{\phi}_L &= \sqrt{2} \begin{pmatrix} \eta & 0 \end{pmatrix} = \widehat{\phi} \frac{1}{2}(1 + \sigma_3) ; \quad \widehat{\phi}_R = \widehat{\phi} \frac{1}{2}(1 - \sigma_3). \end{aligned} \quad (6.11)$$

On définit maintenant deux projecteurs $P_\pm$ et quatre opérateurs P_0, P_1, P_2, P_3 agissant comme suit dans l'algèbre d'espace-temps :

$$P_\pm(\Psi) = \frac{1}{2}(\Psi \pm \mathbf{i}\Psi\gamma_{21}) ; \quad \mathbf{i} = \gamma_{0123} \quad (6.12)$$

$$P_0(\Psi) = \Psi\gamma_{21} + \frac{1}{2}\Psi\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{i}\Psi\gamma_{30} = \Psi\gamma_{21} + P_-(\Psi)\mathbf{i} \quad (6.13)$$

$$P_1(\Psi) = \frac{1}{2}(\mathbf{i}\Psi\gamma_0 + \Psi\gamma_{012}) = P_+(\Psi)\gamma_3\mathbf{i} \quad (6.14)$$

$$P_2(\Psi) = \frac{1}{2}(\Psi\gamma_3 - \mathbf{i}\Psi\gamma_{123}) = P_+(\Psi)\gamma_3 \quad (6.15)$$

$$P_3(\Psi) = \frac{1}{2}(-\Psi\mathbf{i} + \mathbf{i}\Psi\gamma_{30}) = P_+(\Psi)(-\mathbf{i}). \quad (6.16)$$

Notant $P_\mu P_\nu(\Psi) = P_\mu[P_\nu(\Psi)]$ ils vérifient

$$\begin{aligned} P_1P_2 &= P_3 = -P_2P_1 \\ P_2P_3 &= P_1 = -P_3P_2 \\ P_3P_1 &= P_2 = -P_1P_3 \\ P_1^2 &= P_2^2 = P_3^2 = -P_+ \\ P_0P_j &= P_jP_0 = -\mathbf{i}P_j, \quad j = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (6.17)$$

3. Ceci a été faussement considéré comme une raison de réfuter l'utilité de l'algèbre d'espace-temps.

Le modèle de Weinberg-Salam remplace les dérivées partielles ∂_μ par les dérivées covariantes :

$$D_\mu = \partial_\mu - ig_1 \frac{Y}{2} B_\mu - ig_2 T_j W_\mu^j \quad (6.18)$$

avec $T_j = \frac{\tau_j}{2}$ pour un doublet de particules gauches et $T_j = 0$ pour un singulet de particule droite. Y est l'hypercharge faible, $Y_L = -1$, $Y_R = -2$ pour l'électron. Pour transposer cela en algèbre d'espace-temps, on pose

$$D = \sigma^\mu D_\mu ; \quad \mathbf{D} = \gamma^\mu D_\mu = \begin{pmatrix} 0 & D \\ \widehat{D} & 0 \end{pmatrix} \quad (6.19)$$

$$B = \sigma^\mu B_\mu ; \quad \mathbf{B} = \gamma^\mu B_\mu = \begin{pmatrix} 0 & B \\ \widehat{B} & 0 \end{pmatrix} \quad (6.20)$$

$$W^j = \sigma^\mu W_\mu^j ; \quad \mathbf{W}^j = \gamma^\mu W_\mu^j = \begin{pmatrix} 0 & W^j \\ \widehat{W}^j & 0 \end{pmatrix} \quad (6.21)$$

On va prouver maintenant que (6.18) vient de

$$\mathbf{D} = \boldsymbol{\partial} + \frac{g_1}{2} \mathbf{B} P_0 + \frac{g_2}{2} (\mathbf{W}^1 P_1 + \mathbf{W}^2 P_2 + \mathbf{W}^3 P_3). \quad (6.22)$$

Tout d'abord on a en algèbre d'espace-temps (voir 1.4.1)

$$\boldsymbol{\partial} \Psi = \begin{pmatrix} 0 & \nabla \\ \widehat{\nabla} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_e & \phi_n \\ \widehat{\phi}_a \sigma_1 & \widehat{\phi}_p \sigma_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla \widehat{\phi}_a \sigma_1 & \nabla \widehat{\phi}_p \sigma_1 \\ \widehat{\nabla} \phi_e & \widehat{\nabla} \phi_n \end{pmatrix} \quad (6.23)$$

tandis qu'on obtient à partir de (6.19)

$$\mathbf{D} \Psi = \begin{pmatrix} 0 & D \\ \widehat{D} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_e & \phi_n \\ \widehat{\phi}_a \sigma_1 & \widehat{\phi}_p \sigma_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D \widehat{\phi}_a \sigma_1 & D \widehat{\phi}_p \sigma_1 \\ \widehat{D} \phi_e & \widehat{D} \phi_n \end{pmatrix}. \quad (6.24)$$

pour calculer $P_0(\Psi)$ on se servira de

$$P_0(\Psi) = \begin{pmatrix} p_0(\phi_e) & p_0(\phi_n) \\ p_0(\widehat{\phi}_a) \sigma_1 & p_0(\widehat{\phi}_p) \sigma_1 \end{pmatrix}. \quad (6.25)$$

Et on obtient

$$\Psi \gamma_{21} = i \begin{pmatrix} \phi_e \sigma_3 & \phi_n \sigma_3 \\ -\widehat{\phi}_a \sigma_3 \sigma_1 & -\widehat{\phi}_p \sigma_3 \sigma_1 \end{pmatrix} \quad (6.26)$$

$$\frac{1}{2} \Psi \mathbf{i} = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} \phi_e & -\phi_n \\ \widehat{\phi}_a \sigma_1 & -\widehat{\phi}_p \sigma_1 \end{pmatrix} \quad (6.27)$$

$$\frac{1}{2} \mathbf{i} \Psi \gamma_{30} = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} \phi_e \sigma_3 & -\phi_n \sigma_3 \\ \widehat{\phi}_a \sigma_3 \sigma_1 & -\widehat{\phi}_p \sigma_3 \sigma_1 \end{pmatrix}. \quad (6.28)$$

Alors on obtient

$$P_0(\Psi) = i \begin{pmatrix} \phi_e \frac{1+3\sigma_3}{2} & \phi_n \frac{-1+\sigma_3}{2} \\ \hat{\phi}_a \frac{1-\sigma_3}{2} \sigma_1 & \hat{\phi}_p \frac{-1-3\sigma_3}{2} \sigma_1 \end{pmatrix} \quad (6.29)$$

$$p_0(\phi_e) = i\phi_e \frac{1+3\sigma_3}{2} = i(2\phi_{eR} - \phi_{eL}) \quad (6.30)$$

$$p_0(\phi_n) = i\phi_n \frac{-1+\sigma_3}{2} = -i\phi_{nL} \quad (6.31)$$

$$p_0(\hat{\phi}_p) = i\hat{\phi}_p \frac{-1-3\sigma_3}{2} = -i(2\hat{\phi}_{pL} - \hat{\phi}_{pR}) \quad (6.32)$$

$$p_0(\hat{\phi}_a) = i\hat{\phi}_a \frac{1-\sigma_3}{2} = i\hat{\phi}_{aR} \quad (6.33)$$

avec

$$\phi_{eL} = \phi_e \frac{1-\sigma_3}{2}; \quad \phi_{eR} = \phi_e \frac{1+\sigma_3}{2} \quad (6.34)$$

$$\phi_{nL} = \phi_n \frac{1-\sigma_3}{2}; \quad \phi_{nR} = \phi_n \frac{1+\sigma_3}{2} \quad (6.35)$$

$$\hat{\phi}_{pL} = \hat{\phi}_p \frac{1+\sigma_3}{2}; \quad \hat{\phi}_{pR} = \hat{\phi}_p \frac{1-\sigma_3}{2} \quad (6.36)$$

$$\hat{\phi}_{aL} = \hat{\phi}_a \frac{1+\sigma_3}{2}; \quad \hat{\phi}_{aR} = \hat{\phi}_a \frac{1-\sigma_3}{2} \quad (6.37)$$

qui donne

$$\begin{aligned} \mathbf{B}P_0(\Psi) &= \begin{pmatrix} 0 & B \\ \hat{B} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0(\phi_e) & p_0(\phi_n) \\ p_0(\hat{\phi}_a)\sigma_1 & p_0(\hat{\phi}_p)\sigma_1 \end{pmatrix} \\ &= i \begin{pmatrix} B\hat{\phi}_{aR}\sigma_1 & -B(2\hat{\phi}_{pL} - \hat{\phi}_{pR})\sigma_1 \\ \hat{B}(2\phi_{eR} - \phi_{eL}) & -\hat{B}\phi_{nL} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (6.38)$$

Ensuite on pose

$$P_j(\Psi) = \begin{pmatrix} p_j(\phi_e) & p_j(\phi_n) \\ p_j(\hat{\phi}_a)\sigma_1 & p_j(\hat{\phi}_p)\sigma_1 \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, 3. \quad (6.39)$$

On obtient pour $j = 1$

$$\begin{aligned} \mathbf{i}\Psi\gamma_0 &= i \begin{pmatrix} \phi_n & \phi_e \\ -\hat{\phi}_p\sigma_1 & -\hat{\phi}_a\sigma_1 \end{pmatrix}; \quad \Psi\gamma_{012} = i \begin{pmatrix} -\phi_n\sigma_3 & -\phi_e\sigma_3 \\ \hat{\phi}_p\sigma_3\sigma_1 & \hat{\phi}_a\sigma_3\sigma_1 \end{pmatrix} \\ P_1(\Psi) &= i \begin{pmatrix} \phi_n \frac{1-\sigma_3}{2} & \phi_e \frac{1-\sigma_3}{2} \\ \hat{\phi}_p \frac{-1+\sigma_3}{2} \sigma_1 & \hat{\phi}_a \frac{-1+\sigma_3}{2} \sigma_1 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} \phi_{nL} & \phi_{eL} \\ -\hat{\phi}_{pR}\sigma_1 & -\hat{\phi}_{aR}\sigma_1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6.40)$$

$$\begin{aligned} p_1(\phi_e) &= i\phi_{nL}; \quad p_1(\phi_n) = i\phi_{eL} \\ p_1(\hat{\phi}_a) &= -i\hat{\phi}_{pR}; \quad p_1(\hat{\phi}_p) = -i\hat{\phi}_{aR}. \end{aligned} \quad (6.41)$$

On obtient pour $j = 2$

$$\Psi\gamma_3 = \begin{pmatrix} -\phi_n\sigma_3 & \phi_e\sigma_3 \\ \hat{\phi}_p\sigma_3\sigma_1 & -\hat{\phi}_a\sigma_3\sigma_1 \end{pmatrix} ; -\mathbf{i}\Psi\gamma_{123} = \begin{pmatrix} \phi_n & -\phi_e \\ -\hat{\phi}_p\sigma_1 & \hat{\phi}_a\sigma_1 \end{pmatrix}$$

$$P_2(\Psi) = \begin{pmatrix} \phi_n \frac{1-\sigma_3}{2} & \phi_e \frac{-1+\sigma_3}{2} \\ \hat{\phi}_p \frac{-1+\sigma_3}{2}\sigma_1 & \hat{\phi}_a \frac{1-\sigma_3}{2}\sigma_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{nL} & -\phi_{eL} \\ -\hat{\phi}_{pR}\sigma_1 & \hat{\phi}_{aR}\sigma_1 \end{pmatrix} \quad (6.42)$$

$$p_2(\phi_e) = \phi_{nL} ; p_2(\phi_n) = -\phi_{eL}$$

$$p_2(\hat{\phi}_a) = -\hat{\phi}_{pR} ; p_2(\hat{\phi}_p) = \hat{\phi}_{aR}. \quad (6.43)$$

On obtient pour $j = 3$

$$-\Psi\mathbf{i} = i \begin{pmatrix} -\phi_e & \phi_n \\ -\hat{\phi}_a\sigma_1 & \hat{\phi}_p\sigma_1 \end{pmatrix} ; \mathbf{i}\Psi\gamma_{30} = i \begin{pmatrix} \phi_e\sigma_3 & -\phi_n\sigma_3 \\ \hat{\phi}_a\sigma_3\sigma_1 & -\hat{\phi}_p\sigma_3\sigma_1 \end{pmatrix}$$

$$P_3(\Psi) = i \begin{pmatrix} \phi_e \frac{-1+\sigma_3}{2} & \phi_n \frac{1-\sigma_3}{2} \\ \hat{\phi}_a \frac{-1+\sigma_3}{2}\sigma_1 & \hat{\phi}_p \frac{1-\sigma_3}{2}\sigma_1 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} -\phi_{eL} & \phi_{nL} \\ -\hat{\phi}_{aR}\sigma_1 & \hat{\phi}_{pR}\sigma_1 \end{pmatrix} \quad (6.44)$$

$$p_3(\phi_e) = -i\phi_{eL} ; p_3(\phi_n) = i\phi_{nL}$$

$$p_3(\hat{\phi}_a) = -i\hat{\phi}_{aR} ; p_3(\hat{\phi}_p) = i\hat{\phi}_{pR}. \quad (6.45)$$

On a aussi

$$\mathbf{W}^j P_j(\Psi) = \begin{pmatrix} 0 & W^j \\ \widehat{W}^j & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_j(\phi_e) & p_j(\phi_n) \\ p_j(\hat{\phi}_a)\sigma_1 & p_j(\hat{\phi}_p)\sigma_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} W^j p_j(\hat{\phi}_a)\sigma_1 & W^j p_j(\hat{\phi}_p)\sigma_1 \\ \widehat{W}^j p_j(\phi_e) & \widehat{W}^j p_j(\phi_n) \end{pmatrix}. \quad (6.46)$$

Par conséquent (6.22) donne le système

$$D\hat{\phi}_a = \nabla\hat{\phi}_a + \frac{g_1}{2}Bp_0(\hat{\phi}_a) + \frac{g_2}{2}W^j p_j(\hat{\phi}_a) \quad (6.47)$$

$$D\hat{\phi}_p = \nabla\hat{\phi}_p + \frac{g_1}{2}Bp_0(\hat{\phi}_p) + \frac{g_2}{2}W^j p_j(\hat{\phi}_p) \quad (6.48)$$

$$\hat{D}\phi_e = \widehat{\nabla}\phi_e + \frac{g_1}{2}\hat{B}p_0(\phi_e) + \frac{g_2}{2}\widehat{W}^j p_j(\phi_e) \quad (6.49)$$

$$\hat{D}\phi_n = \widehat{\nabla}\phi_n + \frac{g_1}{2}\hat{B}p_0(\phi_n) + \frac{g_2}{2}\widehat{W}^j p_j(\phi_n). \quad (6.50)$$

Avec (6.30) à (6.33), (6.41), (6.43) et (6.45) ceci donne

$$D\hat{\phi}_a = \nabla\hat{\phi}_a + i\frac{g_1}{2}B\hat{\phi}_{aR} + \frac{g_2}{2}[(-iW^1 - W^2)\hat{\phi}_{pR} - iW^3\hat{\phi}_{aR}] \quad (6.51)$$

$$D\hat{\phi}_p = \nabla\hat{\phi}_p + i\frac{g_1}{2}B(-2\hat{\phi}_{pL} + \hat{\phi}_{pR}) + \frac{g_2}{2}[(-iW^1 + W^2)\hat{\phi}_{aR} + iW^3\hat{\phi}_{pR}] \quad (6.52)$$

$$\hat{D}\phi_e = \widehat{\nabla}\phi_e + i\frac{g_1}{2}\hat{B}(2\phi_{eR} - \phi_{eL}) + \frac{g_2}{2}[(i\widehat{W}^1 + \widehat{W}^2)\phi_{nL} - i\widehat{W}^3\phi_{eL}] \quad (6.53)$$

$$\hat{D}\phi_n = \widehat{\nabla}\phi_n - i\frac{g_1}{2}\hat{B}\phi_{nL} + \frac{g_2}{2}[(i\widehat{W}^1 - \widehat{W}^2)\phi_{eL} + i\widehat{W}^3\phi_{nL}]. \quad (6.54)$$

En utilisant la conjugaison $M \mapsto \widehat{M}$ dans (6.53) et (6.54) ceci donne

$$D\widehat{\phi}_a = \nabla\widehat{\phi}_a + i\frac{g_1}{2}B\widehat{\phi}_{aR} + i\frac{g_2}{2}[(-W^1 + iW^2)\widehat{\phi}_{pR} - W^3\widehat{\phi}_{aR}] \quad (6.55)$$

$$D\widehat{\phi}_p = \nabla\widehat{\phi}_p + i\frac{g_1}{2}B(-2\widehat{\phi}_{pL} + \widehat{\phi}_{pR}) + i\frac{g_2}{2}[-(W^1 + iW^2)\widehat{\phi}_{aR} + W^3\widehat{\phi}_{pR}] \quad (6.56)$$

$$D\widehat{\phi}_e = \nabla\widehat{\phi}_e + i\frac{g_1}{2}B(-2\widehat{\phi}_{eR} + \widehat{\phi}_{eL}) + i\frac{g_2}{2}[-(W^1 + iW^2)\widehat{\phi}_{nL} + W^3\widehat{\phi}_{eL}] \quad (6.57)$$

$$D\widehat{\phi}_n = \nabla\widehat{\phi}_n + i\frac{g_1}{2}B\widehat{\phi}_{nL} + i\frac{g_2}{2}[(-W^1 + iW^2)\widehat{\phi}_{eL} - W^3\widehat{\phi}_{nL}]. \quad (6.58)$$

On étudie d'abord le cas de l'électron et de son neutrino. On a avec (6.34)

$$\widehat{\phi}_{eL} = \widehat{\phi}_e \frac{1 + \sigma_3}{2} ; \widehat{\phi}_{eL}\sigma_3 = \widehat{\phi}_{eL} \quad (6.59)$$

$$\widehat{\phi}_{eR} = \widehat{\phi}_e \frac{1 - \sigma_3}{2} ; \widehat{\phi}_{eR}\sigma_3 = -\widehat{\phi}_{eR} \quad (6.60)$$

$$-2\widehat{\phi}_{eR} + 2\widehat{\phi}_{eL} = 2(\widehat{\phi}_{eR} + \widehat{\phi}_{eL})\sigma_3 = 2\widehat{\phi}_e\sigma_3 \quad (6.61)$$

et on a avec (6.57) et (6.58)

$$D\widehat{\phi}_e = \nabla\widehat{\phi}_e + g_1B\widehat{\phi}_e i\sigma_3 + \frac{i}{2}(-g_1B + g_2W^3)\widehat{\phi}_{eL} - i\frac{g_2}{2}(W^1 + iW^2)\widehat{\phi}_{nL} \quad (6.62)$$

$$D\widehat{\phi}_n = \nabla\widehat{\phi}_n - \frac{i}{2}(-g_1B + g_2W^3)\widehat{\phi}_{nL} + i\frac{g_2}{2}(-W^1 + iW^2)\widehat{\phi}_{eL}. \quad (6.63)$$

On sépare les ondes droites des ondes gauches :

$$D\widehat{\phi}_{nR} = \nabla\widehat{\phi}_{nR} ; \widehat{D}\phi_{nR} = \widehat{\nabla}\phi_{nR} \quad (6.64)$$

$$D\widehat{\phi}_{nL} = \nabla\widehat{\phi}_{nL} + \frac{i}{2}(g_1B - g_2W^3)\widehat{\phi}_{nL} + i\frac{g_2}{2}(-W^1 + iW^2)\widehat{\phi}_{eL} \quad (6.65)$$

$$D\widehat{\phi}_{eR} = \nabla\widehat{\phi}_{eR} - ig_1B\widehat{\phi}_{eR} ; \widehat{D}\phi_{eR} = \widehat{\nabla}\phi_{eR} + ig_1\widehat{B}\phi_{eR} \quad (6.66)$$

$$D\widehat{\phi}_{eL} = \nabla\widehat{\phi}_{eL} + \frac{i}{2}(g_1B + g_2W^3)\widehat{\phi}_{eL} - i\frac{g_2}{2}(W^1 + iW^2)\widehat{\phi}_{nL}. \quad (6.67)$$

ce qui est équivalent à ⁴

$$D_\mu\xi_n = \partial_\mu\xi_n \quad (6.68)$$

$$D_\mu\eta_n = \partial_\mu\eta_n + i\frac{g_1}{2}B_\mu\eta_n - i\frac{g_2}{2}[(W_\mu^1 - iW_\mu^2)\eta_e + W_\mu^3\eta_n] \quad (6.69)$$

$$D_\mu\xi_e = \partial_\mu\xi_e + ig_1B_\mu\xi_e \quad (6.70)$$

$$D_\mu\eta_e = \partial_\mu\eta_e + i\frac{g_1}{2}B_\mu\eta_e - i\frac{g_2}{2}[(W_\mu^1 + iW_\mu^2)\eta_n - W_\mu^3\eta_e]. \quad (6.71)$$

4. Comme $\phi_{eR} = \sqrt{2}(\xi_e - 0)$ on doit utiliser la seconde égalité (6.66) pour obtenir (6.70).

(6.69) et (6.71) donnent pour le "doublet leptonique" $\psi_L = \begin{pmatrix} \eta_n \\ \eta_e \end{pmatrix}$ d'isospin faible $Y = -1$:

$$D_\mu \psi_L = \partial_\mu \psi_L - ig_1 \frac{Y}{2} B_\mu \psi_L - i \frac{g_2}{2} W_\mu^j \tau_j \psi_L$$

$$\tau_1 = \gamma_0 ; \tau_2 = \gamma_{123} ; \tau_3 = \gamma_5 \quad (6.72)$$

Avec (6.68) on voit que la partie droite de l'onde du neutrino n'interagit pas. (6.70) est interprété comme un singlet sous $SU(2)$: $\psi_R = \xi$ avec isospin faible $Y = -2$:

$$D_\mu \psi_R = \partial_\mu \psi_R - ig_1 \frac{Y}{2} B_\mu \psi_R \quad (6.73)$$

Finalement on voit ici que tous les aspects des interactions faibles, avec un doublet d'ondes gauches, un singlet d'onde droite, un neutrino droit n'interagissant pas, une conjugaison de charge échangeant ondes gauches et droites, sont obtenues ici à partir d'hypothèses simples :

1 - L'onde de l'ensemble des composantes du secteur leptonique, électron, positron, neutrino électronique et son antineutrino, est la fonction (6.8) de l'espace et du temps à valeur dans l'algèbre de Clifford de l'espace-temps.

2 - Quatre opérateurs P_0, P_1, P_2, P_3 sont définis par (6.13) à (6.16).

3 - Une dérivation covariante est définie par (6.22).

Maintenant il est facile d'utiliser le système (6.55) à (6.58) pour obtenir les autres aspects du modèle de Weinberg-Salam. Il considère les "courants chargés" W^+ et W^- définis par

$$W_\mu^+ = W_\mu^1 + iW_\mu^2 ; \quad W_\mu^- = -W_\mu^1 + iW_\mu^2$$

$$W^+ = W^1 + iW^2 ; \quad W^- = -W^1 + iW^2 \quad (6.74)$$

où $i = \sigma_{123}$ est le générateur de la jauge chirale⁵, et non pas le i_3 de la jauge électrique. On utilisera (6.61) et de même

$$\hat{\phi}_{pR} = \hat{\phi}_p \frac{1 - \sigma_3}{2} ; \quad \hat{\phi}_{pR} \sigma_3 = -\hat{\phi}_{pR} \quad (6.75)$$

$$\hat{\phi}_{pL} = \hat{\phi}_p \frac{1 + \sigma_3}{2} ; \quad \hat{\phi}_{pL} \sigma_3 = \hat{\phi}_{pL} \quad (6.76)$$

$$\hat{\phi}_{pL} - \hat{\phi}_{pR} = \hat{\phi}_{pL} \sigma_3 + \hat{\phi}_{pR} \sigma_3 = (\hat{\phi}_{pL} + \hat{\phi}_{pR}) \sigma_3 = \hat{\phi}_p \sigma_3. \quad (6.77)$$

5. Ceci est une autre raison suffisante d'abandonner le formalisme des matrices de Dirac, qui utilise un i unique. Il y est donc difficile de séparer les différentes invariances de jauge en action.

Alors (6.55) à (6.58) s'écrivent

$$D\hat{\phi}_a = \nabla\hat{\phi}_a + \frac{i}{2}(g_1B - g_2W^3)\hat{\phi}_{aR} + i\frac{g_2}{2}W^-\hat{\phi}_{pR} \quad (6.78)$$

$$D\hat{\phi}_p = \nabla\hat{\phi}_p + ig_1B(\hat{\phi}_{pR} - \hat{\phi}_{pL}) + \frac{i}{2}(-g_1B + g_2W^3)\hat{\phi}_{pR} - i\frac{g_2}{2}W^+\hat{\phi}_{aR} \quad (6.79)$$

$$D\hat{\phi}_n = \nabla\hat{\phi}_n + \frac{i}{2}(g_1B - g_2W^3)\hat{\phi}_{nL} + \frac{i}{2}g_2W^-\hat{\phi}_{eL} \quad (6.80)$$

$$D\hat{\phi}_e = \nabla\hat{\phi}_e + ig_1B(\hat{\phi}_{eL} - \hat{\phi}_{eR}) + \frac{i}{2}(-g_1B + g_2W^3)\hat{\phi}_{eL} - \frac{i}{2}g_2W^+\hat{\phi}_{nL}. \quad (6.81)$$

Le modèle de Weinberg-Salam utilise un potentiel électromagnétique A , un angle θ_W et un terme Z^0 vérifiant⁶

$$g_1 = \frac{q}{\cos(\theta_W)} ; \quad g_2 = \frac{q}{\sin(\theta_W)} ; \quad q = \frac{e}{\hbar c} \quad (6.82)$$

$$-g_1B + g_2W^3 = \sqrt{g_1^2 + g_2^2}Z^0 = \frac{2q}{\sin(2\theta_W)}Z^0 \quad (6.83)$$

$$B = \cos(\theta_W)A - \sin(\theta_W)Z^0 ; \quad W^3 = \sin(\theta_W)A + \cos(\theta_W)Z^0 \quad (6.84)$$

$$B + iW^3 = e^{i\theta_W}(A + iZ^0) ; \quad A + iZ^0 = e^{-i\theta_W}(B + iW^3). \quad (6.85)$$

Avec (6.77) ceci donne pour le système (6.78) à (6.81)

$$D\hat{\phi}_a = \nabla\hat{\phi}_a - \frac{iq}{\sin(2\theta_W)}Z^0\hat{\phi}_{aR} + i\frac{g_2}{2}W^-\hat{\phi}_{pR} \quad (6.86)$$

$$D\hat{\phi}_p = \nabla\hat{\phi}_p - qA\hat{\phi}_p\sigma_{12} + q\tan(\theta_W)Z^0\hat{\phi}_p\sigma_{12} + i\frac{q}{\sin(2\theta_W)}Z^0\hat{\phi}_{pR} - i\frac{g_2}{2}W^+\hat{\phi}_{aR} \quad (6.87)$$

$$D\hat{\phi}_e = \nabla\hat{\phi}_e + qA\hat{\phi}_e\sigma_{12} - q\tan(\theta_W)Z^0\hat{\phi}_e\sigma_{12} + i\frac{q}{\sin(2\theta_W)}Z^0\hat{\phi}_{eL} - i\frac{g_2}{2}W^+\hat{\phi}_{nL} \quad (6.88)$$

$$D\hat{\phi}_n = \nabla\hat{\phi}_n - \frac{iq}{\sin(2\theta_W)}Z^0\hat{\phi}_{nL} + i\frac{g_2}{2}W^-\hat{\phi}_{eL}. \quad (6.89)$$

L'équation (6.88) contient le premier et le second terme $\nabla\hat{\phi} + qA\hat{\phi}\sigma_{12}$ de l'équation de Dirac, donnant l'interaction électromagnétique de l'électron. L'équation (6.87) contient le premier et le second terme $-\nabla\hat{\phi} + qA\hat{\phi}\sigma_{12}$ de l'équation d'onde du positron. Il n'y a de potentiel A ni en (6.86), ni en (6.89) : l'antineutrino et le neutrino n'ont pas d'interaction électromagnétique. Comme on a

$$\hat{\phi}_e\sigma_{12} = i(-\hat{\phi}_{eR} + \hat{\phi}_{eL}) \quad (6.90)$$

6. (6.85) indique que Z^0 est semblable au B de Cabibbo-Ferrari de (4.36).

on peut lire (6.89) et (6.88) comme

$$D\hat{\phi}_{nR} = \nabla\hat{\phi}_{nR} \quad (6.91)$$

$$D\hat{\phi}_{nL} = \nabla\hat{\phi}_{nL} - i\frac{q}{\sin(2\theta_W)}Z^0\hat{\phi}_{nL} + i\frac{q}{2\sin(\theta_W)}W^-\hat{\phi}_{eL} \quad (6.92)$$

$$D\hat{\phi}_{eR} = \nabla\hat{\phi}_{eR} + qA\hat{\phi}_{eR}\sigma_{12} + iq\tan(\theta_W)Z^0\hat{\phi}_{eR} \quad (6.93)$$

$$D\hat{\phi}_{eL} = \nabla\hat{\phi}_{eL} + qA\hat{\phi}_{eL}\sigma_{12} + iq[-\tan(\theta_W) + \frac{1}{\sin(2\theta_W)}]Z^0\hat{\phi}_{eL} - i\frac{q}{2\sin(\theta_W)}W^+\hat{\phi}_{nL} \quad (6.94)$$

Les termes contenant W^+ et W^- qui couplent électron gauche et neutrino gauche engendrent les «courants chargés», les termes contenant Z^0 engendrent les «courants neutres». Le boson Z^0 est lié à ϕ_L , ϕ_{nL} et ϕ_R , pas à ϕ_{nR} . De même on peut lire (6.86) et (6.87) comme

$$D\hat{\phi}_{aL} = \nabla\hat{\phi}_{aL} \quad (6.95)$$

$$D\hat{\phi}_{aR} = \nabla\hat{\phi}_{aR} - i\frac{q}{\sin(2\theta_W)}Z^0\hat{\phi}_{aR} + i\frac{q}{2\sin(\theta_W)}W^-\hat{\phi}_{pR} \quad (6.96)$$

$$D\hat{\phi}_{pL} = \nabla\hat{\phi}_{pL} - qA\hat{\phi}_{pL}\sigma_{12} + iq\tan(\theta_W)Z^0\hat{\phi}_{pL} \quad (6.97)$$

$$D\hat{\phi}_{pR} = \nabla\hat{\phi}_{pR} - qA\hat{\phi}_{pR}\sigma_{12} + iq[-\tan(\theta_W) + \frac{1}{\sin(2\theta_W)}]Z^0\hat{\phi}_{pR} - i\frac{q}{2\sin(\theta_W)}W^+\hat{\phi}_{aR}. \quad (6.98)$$

(6.95) signifie que l'antineutrino droit n'interagit pas par interactions électro-faibles. La charge électrique du positron apparaît bien opposée à la charge de l'électron. Mais la comparaison avec la même relation pour l'électron montre que, contrairement à ce qui se dit de la conjugaison de charge, pensée comme changeant le signe de tout nombre quantique, seul l'échange entre ondes droites et gauches, plus la multiplication à droite par σ_3 donnent un changement de signe. Les autres coefficients sont conservés quand on passe de l'électron au positron ou du neutrino à l'antineutrino. La conjugaison de charge doit être vue comme une transformation purement quantique agissant uniquement sur l'onde, comme décrite en 3.5.⁷ Un résultat semblable a été obtenu par Lochak [39] pour le monopôle magnétique : la conjugaison de charge ne change pas le signe des charges magnétiques et il n'y a pas de polarisation du vide résultant de la création spontanée de paires. C'est pareil pour les neutrinos, il n'y a pas de création de paires neutrino-antineutrino semblable à la création de paires particule-antiparticule avec charges opposées.⁸

7. De plus, si on essaie de construire une conjugaison de charge changeant les autres signes, on obtient à la place de (6.17) des relations qui ne donnent pas un groupe d'invariance de jauge $U(1) \times SU(2)$.

8. Ceci est consistant avec (4.76)-(4.77) où la conjugaison de charge, dans le cas du neutrino, donne la même équation d'onde.

6.2 Invariances

Comme pour l'électromagnétisme, on peut élargir l'invariance relativiste au plus grand groupe Cl_3^* . Avec la dilatation de Lorentz R définie par un élément M de Cl_3^* vérifiant $x \mapsto x' = MxM^\dagger$ on a ;

$$\begin{aligned} \phi'_e &= M\phi_e ; \quad \phi'_n = M\phi_n ; \quad \widehat{\phi}'_p = \widehat{M}\widehat{\phi}_p ; \quad \widehat{\phi}'_a = \widehat{M}\widehat{\phi}_a ; \quad \Psi' = N\Psi \\ N &= \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & \widehat{M} \end{pmatrix} ; \quad \widetilde{N} = \begin{pmatrix} \overline{M} & 0 \\ 0 & M^\dagger \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6.99)$$

On peut considérer g_1B et g_2W^j , liés à qA , comme des vecteurs covariants :

$$\begin{aligned} g_1B &= \overline{M}g'_1B'\widehat{M} ; \quad g_2W^j = \overline{M}g'_2W^{j'}\widehat{M} \\ g_1\mathbf{B} &= \widetilde{N}g'_1\mathbf{B}'N ; \quad g_2\mathbf{W}^j = \widetilde{N}g'_2\mathbf{W}^{j'}N. \end{aligned} \quad (6.100)$$

Ceci permet à D d'être un vecteur covariant, c'est-à-dire variant comme ∇ ;

$$\begin{aligned} D &= \overline{M}D'\widehat{M} ; \quad \nabla = \overline{M}\nabla'\widehat{M} \\ \mathbf{D} &= \widetilde{N}\mathbf{D}'N. \end{aligned} \quad (6.101)$$

Ceci donne aussi pour l'angle de Weinberg-Salam :

$$B' + iW'^3 = e^{i\theta_W}(A' + iZ'^0) \quad (6.102)$$

qui signifie que l'angle θ_W est Cl_3^* invariant, donc est un invariant relativiste. On obtient

$$D\widehat{\phi}_e = \overline{M}D'\widehat{\phi}'_e ; \quad D\widehat{\phi}_n = \overline{M}D'\widehat{\phi}'_n \quad (6.103)$$

$$D\widehat{\phi}_p = \overline{M}D'\widehat{\phi}'_p ; \quad D\widehat{\phi}_a = \overline{M}D'\widehat{\phi}'_a \quad (6.104)$$

$$\mathbf{D}\Psi = \widetilde{N}\mathbf{D}'\Psi' \quad (6.105)$$

et l'invariance sous Cl_3^* des interactions électro-faibles est complètement semblable à l'invariance de l'électromagnétisme.

Les opérateurs P_0 , P_1 , P_2 et P_3 sont construits à partir de projecteurs et ne sont pas inversibles. Ils ne sont pas directement les éléments du groupe de jauge. Cependant on peut construire un groupe de Yang-Mills en utilisant la fonction exponentielle. Utilisant quatre nombre réels a^0 , a^1 , a^2 , a^3 , on définit

$$\exp(a^0P_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a^0P_0)^n}{n!} \quad (6.106)$$

$$\exp(a^jP_j) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a^1P_1 + a^2P_2 + a^3P_3)^n}{n!} \quad (6.107)$$

On obtient avec (6.25), (6.30) à (6.33)

$$\exp(a^0 P_0)(\Psi) = \begin{pmatrix} \exp(a^0 p_0)(\phi_e) & \exp(a^0 p_0)(\phi_n) \\ \exp(a^0 p_0)(\hat{\phi}_a)\sigma_1 & \exp(a^0 p_0)(\hat{\phi}_p)\sigma_1 \end{pmatrix} \quad (6.108)$$

$$\exp(a^0 p_0)(\phi_{nL}) = e^{-ia^0} \phi_{nL} ; \quad \exp(a^0 p_0)(\phi_{nR}) = \phi_{nR} \quad (6.109)$$

$$\exp(a^0 p_0)(\phi_{eL}) = e^{-ia^0} \phi_{eL} ; \quad \exp(a^0 p_0)(\phi_{eR}) = e^{2ia^0} \phi_{eR} \quad (6.110)$$

$$\exp(a^0 p_0)(\phi_{aR}) = e^{ia^0} \phi_{aR} ; \quad \exp(a^0 p_0)(\phi_{aL}) = \phi_{aL} \quad (6.111)$$

$$\exp(a^0 p_0)(\phi_{pR}) = e^{ia^0} \phi_{pR} ; \quad \exp(a^0 p_0)(\phi_{pL}) = e^{-2ia^0} \phi_{pL} \quad (6.112)$$

$$\exp(-a^0 P_0) = [\exp(a^0 P_0)]^{-1} \quad (6.113)$$

Puis on pose

$$a = \sqrt{(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2} ; \quad S = a^j P_j \quad (6.114)$$

et l'on obtient

$$[\exp(S)](\Psi) = \Psi + [-1 + \cos(a)]P_+(\Psi) + \frac{\sin(a)}{a}S(\Psi) \quad (6.115)$$

$$[\exp(-S)](\Psi) = \Psi + [-1 + \cos(a)]P_+(\Psi) - \frac{\sin(a)}{a}S(\Psi) \quad (6.116)$$

ce qui donne

$$\exp(-S) = [\exp(S)]^{-1}. \quad (6.117)$$

Comme P_0 commute avec S (voir (6.16)) on obtient

$$\exp(a^0 P_0 + S) = \exp(a^0 P_0) \exp(S) = \exp(S) \exp(a^0 P_0) \quad (6.118)$$

L'ensemble des opérateurs $\exp(a^0 P_0 + S)$ est un groupe de Lie $U(1) \times SU(2)$. L'invariance sous ce groupe de jauge locale résulte de la dérivation des produits. Si l'on utilise

$$\Psi' = [\exp(a^0 P_0 + S)](\Psi) ; \quad \mathbf{D} = \gamma^\mu D_\mu \quad (6.119)$$

alors $D_\mu \Psi$ est remplacé par $D'_\mu \Psi'$ où

$$D'_\mu \Psi' = \exp(a^0 P_0 + S) D_\mu \Psi \quad (6.120)$$

$$B'_\mu = B_\mu - \frac{2}{g_1} \partial_\mu a^0 \quad (6.121)$$

$$W'^j_\mu P_j = \left[\exp(S) W^j_\mu P_j - \frac{2}{g_2} \partial_\mu [\exp(S)] \right] \exp(-S). \quad (6.122)$$

6.3 Le secteur des quarks

Pour la première génération de fermions fondamentaux le modèle standard comprend 16 fermions, 8 particules et leurs antiparticules. On vient d'étudier le cas de l'électron, son neutrino, son antiparticule le positron et son antineutrino. On a placé ces ondes dans une onde unique (6.8) qui sera nommée maintenant Ψ_l . Chaque génération comporte aussi deux quarks avec chacun trois états, donc nous obtenons six ondes semblables à ϕ_e ou ϕ_n . Les quarks de la première génération sont appelés u et d et le couple d-u est semblable à n-e pour les interactions électro-faibles, mais avec des différences parce que la charge électrique du quark u est $\frac{2}{3}|e|$, la charge du quark d est $-\frac{1}{3}|e|$. Comme pour le secteur des leptons, les charges des antiparticules sont opposées aux charges des particules. Trois états dits de «couleur» sont appelés r, g, b (red, green, blue). Nous proposons donc une onde pour tous les fermions de la première génération sous la forme :

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_l & \Psi_r \\ \Psi_g & \Psi_b \end{pmatrix} \quad (6.123)$$

où Ψ_l est définie par (6.8) et Ψ_r, Ψ_g, Ψ_b sont définis sur le même modèle :

$$\Psi_r = \begin{pmatrix} \phi_{dr} & \phi_{ur} \\ \hat{\phi}_{\bar{u}r}\sigma_1 & \hat{\phi}_{\bar{d}r}\sigma_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{dr} & \phi_{ur} \\ \hat{\phi}_{ur} & \hat{\phi}_{dr} \end{pmatrix} \quad (6.124)$$

$$\Psi_g = \begin{pmatrix} \phi_{dg} & \phi_{ug} \\ \hat{\phi}_{\bar{u}g}\sigma_1 & \hat{\phi}_{\bar{d}g}\sigma_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{dg} & \phi_{ug} \\ \hat{\phi}_{ug} & \hat{\phi}_{dg} \end{pmatrix} \quad (6.125)$$

$$\Psi_b = \begin{pmatrix} \phi_{db} & \phi_{ub} \\ \hat{\phi}_{\bar{u}b}\sigma_1 & \hat{\phi}_{\bar{d}b}\sigma_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{db} & \phi_{ub} \\ \hat{\phi}_{ub} & \hat{\phi}_{db} \end{pmatrix}. \quad (6.126)$$

L'onde est une fonction de l'espace-temps à valeur dans $Cl_{5,1}$ qui est une sous-algèbre de $Cl_{5,2} = M_8(\mathbb{C})$ (voir 1.5). Comme précédemment les interactions faibles sont obtenues en remplaçant les dérivées partielles par des dérivées covariantes. On utilise toujours les notations de 1.5 et on pose :

$$\underline{W}^j = \Lambda^\mu W_\mu^j, \quad j = 1, 2, 3; \quad \underline{D} = \Lambda^\mu D_\mu; \quad \Lambda^0 = -\Lambda_0; \quad \Lambda^j = \Lambda_j \quad (6.127)$$

pour $j = 1, 2, 3$. La dérivation covariante s'écrit maintenant

$$\underline{D}(\Psi) = \underline{\partial}(\Psi) + \frac{g_1}{2} \underline{B} \underline{P}_0(\Psi) + \frac{g_2}{2} \underline{W}^j \underline{P}_j(\Psi). \quad (6.128)$$

On utilise deux projecteurs $\underline{P}_\pm$ vérifiant

$$\underline{P}_\pm(\Psi) = \frac{1}{2}(\Psi \mp \mathbf{i}\Psi\Lambda_{21}); \quad \mathbf{i} = \Lambda_{0123} \quad (6.129)$$

Trois opérateurs agissent sur le secteur des quarks comme sur le secteur leptonique :

$$\underline{P}_1 = \underline{P}_+(\Psi)\Lambda_{53} \quad (6.130)$$

$$\underline{P}_2 = \underline{P}_+(\Psi)\Lambda_{0125} \quad (6.131)$$

$$\underline{P}_3 = \underline{P}_+(\Psi)\Lambda_{0132}. \quad (6.132)$$

Le quatrième opérateur, quant à lui, agit différemment sur l'onde des leptons et sur le secteur des quarks⁹ :

$$\underline{P}_0 = \begin{pmatrix} P_0(\Psi_l) & P'_0(\Psi_r) \\ P'_0(\Psi_g) & P'_0(\Psi_b) \end{pmatrix} \quad (6.133)$$

$$P_0(\Psi_l) = \Psi_l \gamma_{21} + P_-(\Psi_l)\mathbf{i} = \Psi_l \gamma_{21} + \frac{1}{2}(\Psi_l \mathbf{i} + \mathbf{i} \Psi_l \gamma_{30}) \quad (6.134)$$

$$P'_0(\Psi_r) = -\frac{1}{3}\Psi_r \gamma_{21} + P_-(\Psi_r)\mathbf{i} = -\frac{1}{3}\Psi_r \gamma_{21} + \frac{1}{2}(\Psi_r \mathbf{i} + \mathbf{i} \Psi_r \gamma_{30}) \quad (6.135)$$

Et l'on obtient deux formules identiques en remplaçant l'indice r par g et b. Maintenant on va abréger les notations et enlever les indices r, g, b pour étudier la dérivation covariante électro-faible. On pose

$$P'_0(\Psi) = \begin{pmatrix} p'_0(\phi_d) & p'_0(\phi_u) \\ p'_0(\hat{\phi}_{\bar{u}})\sigma_1 & p'_0(\hat{\phi}_{\bar{d}})\sigma_1 \end{pmatrix} \quad (6.136)$$

ce qui donne avec (6.135) :

$$\begin{aligned} P'_0(\Psi) = & -\frac{i}{3} \begin{pmatrix} \phi_d \sigma_3 & \phi_u \sigma_3 \\ -\hat{\phi}_{\bar{u}} \sigma_3 \sigma_1 & -\hat{\phi}_{\bar{d}} \sigma_3 \sigma_1 \end{pmatrix} \\ & + \frac{i}{2} \begin{pmatrix} \phi_d & -\phi_u \\ \hat{\phi}_{\bar{u}} \sigma_1 & -\hat{\phi}_{\bar{d}} \sigma_1 \end{pmatrix} + \frac{i}{2} \begin{pmatrix} \phi_d \sigma_3 & -\phi_u \sigma_3 \\ \hat{\phi}_{\bar{u}} \sigma_3 \sigma_1 & -\hat{\phi}_{\bar{d}} \sigma_3 \sigma_1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6.137)$$

On obtient alors le système :

$$\begin{aligned} p'_0(\phi_d) &= -\frac{i}{3}\phi_d \sigma_3 + \frac{i}{2}\phi_d + \frac{i}{2}\phi_d \sigma_3 = \frac{i}{3}(2\phi_{dR} + \phi_{dL}) \\ p'_0(\phi_u) &= -\frac{i}{3}\phi_u \sigma_3 - \frac{i}{2}\phi_u - \frac{i}{2}\phi_u \sigma_3 = \frac{i}{3}(-4\phi_{uR} + \phi_{uL}) \\ p'_0(\hat{\phi}_{\bar{u}}) &= \frac{i}{3}\hat{\phi}_{\bar{u}} \sigma_3 + \frac{i}{2}\hat{\phi}_{\bar{u}} + \frac{i}{2}\hat{\phi}_{\bar{u}} \sigma_3 = \frac{i}{3}(4\hat{\phi}_{\bar{u}L} - \hat{\phi}_{\bar{u}R}) \\ p'_0(\hat{\phi}_{\bar{d}}) &= \frac{i}{3}\hat{\phi}_{\bar{d}} \sigma_3 - \frac{i}{2}\hat{\phi}_{\bar{d}} - \frac{i}{2}\hat{\phi}_{\bar{d}} \sigma_3 = \frac{i}{3}(-2\hat{\phi}_{\bar{d}L} - \hat{\phi}_{\bar{d}R}). \end{aligned} \quad (6.138)$$

9. Ceci est très important, puisque c'est la raison expliquant pourquoi un lepton n'est pas un quark. Si les quatre opérateurs agissaient de manière similaire, on obtiendrait quatre états et un groupe de jauge SU(4) pour la chromodynamique et l'électron serait sensible aux interactions fortes. Comme seulement trois parties de l'onde sont similaires, on obtiendra au prochain paragraphe un groupe SU(3) pour la chromodynamique.

comme P_1 , P_2 et P_3 restent inchangés quand on passe au secteur des quarks, on obtient à partir de (6.41), (6.43) et (6.45)

$$p_1(\phi_d) = i\phi_{uL} ; p_1(\phi_u) = i\phi_{dL} ; p_1(\widehat{\phi}_{\bar{u}}) = -i\widehat{\phi}_{\bar{d}R} ; p_1(\widehat{\phi}_{\bar{d}}) = -i\widehat{\phi}_{\bar{u}R} \quad (6.139)$$

$$p_2(\phi_d) = \phi_{uL} ; p_2(\phi_u) = -\phi_{dL} ; p_2(\widehat{\phi}_{\bar{u}}) = -\widehat{\phi}_{\bar{d}R} ; p_2(\widehat{\phi}_{\bar{d}}) = \widehat{\phi}_{\bar{u}R} \quad (6.140)$$

$$p_3(\phi_d) = -i\phi_{dL} ; p_3(\phi_u) = i\phi_{uL} ; p_3(\widehat{\phi}_{\bar{u}}) = -i\widehat{\phi}_{\bar{u}R} ; p_3(\widehat{\phi}_{\bar{d}}) = i\widehat{\phi}_{\bar{d}R}. \quad (6.141)$$

Maintenant (6.129) donne

$$\mathbf{D}\Psi_r = \boldsymbol{\partial}\Psi_r + \frac{g_1}{2}\mathbf{B}P'_0(\Psi_r) + \frac{g_2}{2}\mathbf{W}^j P_j(\Psi_r) \quad (6.142)$$

et l'on a, de manière similaire à (6.47) jusqu'à (6.50)

$$D\widehat{\phi}_{\bar{u}} = \nabla\widehat{\phi}_{\bar{u}} + \frac{g_1}{2}Bp'_0(\widehat{\phi}_{\bar{u}}) + \frac{g_2}{2}W^j p_j(\widehat{\phi}_{\bar{u}}) \quad (6.143)$$

$$D\widehat{\phi}_{\bar{d}} = \nabla\widehat{\phi}_{\bar{d}} + \frac{g_1}{2}Bp'_0(\widehat{\phi}_{\bar{d}}) + \frac{g_2}{2}W^j p_j(\widehat{\phi}_{\bar{d}}) \quad (6.144)$$

$$\widehat{D}\phi_d = \widehat{\nabla}\phi_d + \frac{g_1}{2}\widehat{B}p'_0(\phi_d) + \frac{g_2}{2}\widehat{W}^j p_j(\phi_d) \quad (6.145)$$

$$\widehat{D}\phi_u = \widehat{\nabla}\phi_u + \frac{g_1}{2}\widehat{B}p'_0(\phi_u) + \frac{g_2}{2}\widehat{W}^j p_j(\phi_u). \quad (6.146)$$

Avec les égalités (6.138) à (6.141) ceci donne

$$\begin{aligned} D\widehat{\phi}_{\bar{u}} &= \nabla\widehat{\phi}_{\bar{u}} + \frac{g_1}{2}B\frac{i}{3}(4\widehat{\phi}_{\bar{u}L} - \widehat{\phi}_{\bar{u}R}) \\ &\quad + \frac{g_2}{2}[W^1(-i\widehat{\phi}_{\bar{d}R}) + W^2(-\widehat{\phi}_{\bar{d}R}) + W^3(-i\widehat{\phi}_{\bar{u}R})] \end{aligned} \quad (6.147)$$

$$\begin{aligned} D\widehat{\phi}_{\bar{d}} &= \nabla\widehat{\phi}_{\bar{d}} + \frac{g_1}{2}B\frac{i}{3}(-2\widehat{\phi}_{\bar{d}L} - \widehat{\phi}_{\bar{d}R}) \\ &\quad + \frac{g_2}{2}[W^1(-i\widehat{\phi}_{\bar{u}R}) + W^2\widehat{\phi}_{\bar{u}R}) + W^3i\widehat{\phi}_{\bar{d}R}] \end{aligned} \quad (6.148)$$

$$\begin{aligned} \widehat{D}\phi_d &= \widehat{\nabla}\phi_d + \frac{g_1}{2}\widehat{B}\frac{i}{3}(2\phi_{dR} + \phi_{dL}) \\ &\quad + \frac{g_2}{2}[\widehat{W}^1(i\phi_{uL}) + \widehat{W}^2(\phi_{uL}) + \widehat{W}^3(-i\phi_{dL})] \end{aligned} \quad (6.149)$$

$$\begin{aligned} \widehat{D}\phi_u &= \widehat{\nabla}\phi_u + \frac{g_1}{2}\widehat{B}\frac{i}{3}(-4\phi_{uR} + \phi_{uL}) \\ &\quad + \frac{g_2}{2}[\widehat{W}^1(i\phi_{dL}) + \widehat{W}^2(-\phi_{dL}) + \widehat{W}^3(i\phi_{uL})] \end{aligned} \quad (6.150)$$

On sépare les ondes droites et gauches, ceci donne

$$D\hat{\phi}_{\bar{u}L} = \nabla\hat{\phi}_{\bar{u}L} - i(-\frac{2}{3})g_1B\hat{\phi}_{\bar{u}L} ; D_\mu\eta_{\bar{u}} = \partial_\mu\eta_{\bar{u}} - i(-\frac{2}{3})g_1B_\mu\eta_{\bar{u}} \quad (6.151)$$

$$D\hat{\phi}_{\bar{d}L} = \nabla\hat{\phi}_{\bar{d}L} - i(+\frac{1}{3})g_1B\hat{\phi}_{\bar{d}L} ; D_\mu\eta_{\bar{d}} = \partial_\mu\eta_{\bar{d}} - i(+\frac{1}{3})g_1B_\mu\eta_{\bar{d}} \quad (6.152)$$

$$\hat{D}\phi_{dR} = \hat{\nabla}\phi_{dR} - i(-\frac{1}{3})g_1\hat{B}\phi_{dR} ; D_\mu\xi_d = \partial_\mu\xi_d - i(-\frac{1}{3})g_1B_\mu\xi_d \quad (6.153)$$

$$\hat{D}\phi_{uR} = \hat{\nabla}\phi_{uR} - i(+\frac{2}{3})g_1\hat{B}\phi_{uR} ; D_\mu\xi_u = \partial_\mu\xi_u - i(+\frac{2}{3})g_1B_\mu\xi_u. \quad (6.154)$$

La comparaison avec 6.1 montre que les quarks et les antiquarks ont les charges attendues : $-\frac{2}{3}|e|$ pour l'antiquark $\bar{u}$, $+\frac{1}{3}|e|$ pour l'antiquark $\bar{d}$, $+\frac{2}{3}|e|$ pour le quark u et $-\frac{1}{3}|e|$ pour le quark d. La séparation des ondes droites et gauches dans (6.147) à (6.150) donne aussi

$$D\hat{\phi}_{\bar{u}R} = \nabla\hat{\phi}_{\bar{u}R} - i\frac{g_1}{6}B\hat{\phi}_{\bar{u}R} + \frac{g_2}{2}[-iW^1\hat{\phi}_{\bar{d}R}) - W^2\hat{\phi}_{\bar{d}R} - iW^3\hat{\phi}_{\bar{u}R}] \quad (6.155)$$

$$D\hat{\phi}_{\bar{d}R} = \nabla\hat{\phi}_{\bar{d}R} - i\frac{g_1}{6}B\hat{\phi}_{\bar{d}R} + \frac{g_2}{2}[-iW^1\hat{\phi}_{\bar{u}R}) + W^2\hat{\phi}_{\bar{u}R}) + iW^3\hat{\phi}_{\bar{d}R}] \quad (6.156)$$

$$\hat{D}\phi_{dL} = \hat{\nabla}\phi_{dL} + i\frac{g_1}{6}\hat{B}\phi_{dL} + \frac{g_2}{2}[i\hat{W}^1\phi_{uL}) + \hat{W}^2\phi_{uL} - i\hat{W}^3\phi_{dL}] \quad (6.157)$$

$$\hat{D}\phi_{uL} = \hat{\nabla}\phi_{uL} + i\frac{g_1}{6}\hat{B}\phi_{uL} + \frac{g_2}{2}[i\hat{W}^1\phi_{dL}) - \hat{W}^2\phi_{dL} + i\hat{W}^3\phi_{uL}]. \quad (6.158)$$

En se servant de la conjugaison $\phi \mapsto \hat{\phi}$ on obtient

$$\hat{D}\phi_{\bar{u}R} = \hat{\nabla}\phi_{\bar{u}R} + i\frac{g_1}{6}\hat{B}\phi_{\bar{u}R} + \frac{g_2}{2}[+i\hat{W}^1\phi_{\bar{d}R}) - \hat{W}^2\phi_{\bar{d}R} + i\hat{W}^3\phi_{\bar{u}R}] \quad (6.159)$$

$$\hat{D}\phi_{\bar{d}R} = \hat{\nabla}\phi_{\bar{d}R} + i\frac{g_1}{6}\hat{B}\phi_{\bar{d}R} + \frac{g_2}{2}[+i\hat{W}^1\phi_{\bar{u}R}) + \hat{W}^2\phi_{\bar{u}R}) - i\hat{W}^3\phi_{\bar{d}R}] \quad (6.160)$$

$$D\hat{\phi}_{dL} = \nabla\hat{\phi}_{dL} - i\frac{g_1}{6}B\hat{\phi}_{dL} + \frac{g_2}{2}[-iW^1\hat{\phi}_{uL}) + W^2\hat{\phi}_{uL} + iW^3\hat{\phi}_{dL}] \quad (6.161)$$

$$D\hat{\phi}_{uL} = \nabla\hat{\phi}_{uL} - i\frac{g_1}{6}B\hat{\phi}_{uL} + \frac{g_2}{2}[-iW^1\hat{\phi}_{dL}) - W^2\hat{\phi}_{dL} - iW^3\hat{\phi}_{uL}]. \quad (6.162)$$

Ceci donne un doublet gauche pour les particules et un doublet droit pour les antiparticules. Avec (6.72) et

$$\psi_L = \begin{pmatrix} \eta_u \\ \eta_d \end{pmatrix} ; \quad \psi_R = \begin{pmatrix} \xi_{\bar{u}} \\ \xi_{\bar{d}} \end{pmatrix} \quad (6.163)$$

on obtient

$$D_\mu\psi_L = \partial_\mu\psi_L - i\frac{g_1}{6}B_\mu\psi_L - i\frac{g_2}{2}(W_\mu^1\tau_1 + W_\mu^2\tau_2 + W_\mu^3\tau_3)\psi_L \quad (6.164)$$

$$D_\mu\psi_R = \partial_\mu\psi_R + i\frac{g_1}{6}B_\mu\psi_R - i\frac{g_2}{2}(W_\mu^1\tau_1 - W_\mu^2\tau_2 + W_\mu^3\tau_3)\psi_R. \quad (6.165)$$

On peut donc dire que la conjugaison de charge n'est pas seulement un changement de signe des charges électriques, mais elle échange les ondes droites et

gauches. Elle change aussi l'orientation de l'espace des τ_j , où une base directe (τ_1, τ_2, τ_3) , est remplacée par une base inverse $(\tau_1, -\tau_2, \tau_3)$. On a rencontré cette base tant ici que pour l'onde de l'antiparticule (3.44) utilisée par de Broglie

6.4 Chromodynamique

On part des générateurs λ_k du groupe $SU(3)$ de la chromodynamique

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (6.166)$$

Pour simplifier les notations on écrit l, r, g, b au lieu de $\Psi_l, \Psi_r, \Psi_g, \Psi_b$. Donc on a $\Psi = \begin{pmatrix} l & r \\ g & b \end{pmatrix}$. Alors (6.166) donne

$$\begin{aligned} \lambda_1 \begin{pmatrix} r \\ g \\ b \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} g \\ r \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda_2 \begin{pmatrix} r \\ g \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ig \\ ir \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda_3 \begin{pmatrix} r \\ g \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ -g \\ 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_4 \begin{pmatrix} r \\ g \\ b \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ r \end{pmatrix}, \lambda_5 \begin{pmatrix} r \\ g \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ib \\ 0 \\ ir \end{pmatrix}, \lambda_6 \begin{pmatrix} r \\ g \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ g \end{pmatrix} \\ \lambda_7 \begin{pmatrix} r \\ g \\ b \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ -ib \\ ig \end{pmatrix}, \lambda_8 \begin{pmatrix} r \\ g \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} r \\ g \\ -2b \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (6.167)$$

On appelle Γ_k les opérateurs correspondant aux λ_k agissant sur Ψ . On obtient avec (1.93)

$$\Gamma_1(\Psi) = \frac{1}{2}(\Lambda_4\Psi\Lambda_4 + \Lambda_{01235}\Psi\Lambda_{01235}) = \begin{pmatrix} 0 & g \\ r & 0 \end{pmatrix} \quad (6.168)$$

$$\Gamma_2(\Psi) = \frac{1}{2}(\Lambda_5\Psi\Lambda_4 - \Lambda_{01234}\Psi\Lambda_{01235}) = \begin{pmatrix} 0 & -ig \\ ir & 0 \end{pmatrix} \quad (6.169)$$

$$\Gamma_3(\Psi) = P^+\Psi P^- - P^-\Psi P^+ = \begin{pmatrix} 0 & r \\ -g & 0 \end{pmatrix} \quad (6.170)$$

$$\Gamma_4(\Psi) = \Lambda_4 \Psi P^- = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & r \end{pmatrix} ; \Gamma_5(\Psi) = \Lambda_5 \Psi P^- = \begin{pmatrix} 0 & -ib \\ 0 & ir \end{pmatrix} \quad (6.171)$$

$$\Gamma_6(\Psi) = P^- \Psi \Lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & g \end{pmatrix} ; \Gamma_7(\Psi) = \mathbf{i} P^- \Psi \Lambda_{01235} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -ib & ig \end{pmatrix} \quad (6.172)$$

$$\Gamma_8(\Psi) = -\frac{1}{\sqrt{3}}(P^- \Psi \Lambda_{012345} + \Lambda_{012345} \Psi P^-) = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 & r \\ g & -2b \end{pmatrix}. \quad (6.173)$$

Partout les termes en haut à gauche sont nuls, donc tous les Γ_k projettent l'onde Ψ sur son secteur des quarks. On peut étendre la dérivation covariante des interactions électro-faibles (6.127) :

$$\underline{D}(\Psi) = \underline{\partial}(\Psi) + \frac{g_1}{2} \underline{B} \underline{P}_0(\Psi) + \frac{g_2}{2} \underline{W}^j \underline{P}_j(\Psi) + \frac{g_3}{2} \underline{G}^k \mathbf{i} \Gamma_k(\Psi). \quad (6.174)$$

où g_3 est une autre constante et les $\underline{G}^k$ sont 8 vecteurs potentiels appelés gluons. Comme I_4 commute avec tout élément de $Cl_{1,3}$ et comme $P_j(\mathbf{i}\Psi_{ind}) = \mathbf{i}P_j(\Psi_{ind})$ pour $j = 0, 1, 2, 3$ et $ind = l, r, g, b$ chaque opérateur $\mathbf{i}\Gamma_k$ commute avec tous les opérateurs $\underline{P}_j$.

On utilise maintenant 12 réels $a^0, a^j, j = 1, 2, 3, b^k, k = 1, 2, \dots, 8$, on pose

$$S_1 = \sum_{j=1}^3 a^j \underline{P}_j ; S_2 = \sum_{k=1}^8 b^k \mathbf{i} \Gamma_k \quad (6.175)$$

et l'on obtient, en utilisant l'exponentielle (voir 6.2)

$$\exp(a^0 \underline{P}_0 + S_1 + S_2) = \exp(a^0 \underline{P}_0) \exp(S_1) \exp(S_2) \quad (6.176)$$

L'ensemble de ces opérateur est un groupe de Lie $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$. La seule différence avec le modèle standard est qu'on n'a pas besoin de postuler cette structure, elle résulte du calcul des commutateurs. L'invariance sous Cl_3^* (et par conséquent l'invariance relativiste) de cette dérivation covariante est semblable à (6.105) mais avec des termes soulignés. L'invariance de jauge s'écrit avec

$$\Psi' = [\exp(a^0 \underline{P}_0 + S_1 + S_2)](\Psi) ; \underline{D} = \Lambda^\mu \underline{D}_\mu ; \underline{D}' = \Lambda^\mu \underline{D}'_\mu \quad (6.177)$$

$$\underline{D}'_\mu \Psi' = \exp(a^0 \underline{P}_0 + S_1 + S_2) \underline{D}_\mu \Psi \quad (6.178)$$

$$B'_\mu = B_\mu - \frac{2}{g_1} \partial_\mu a^0 \quad (6.179)$$

$$W'^j_\mu \underline{P}_j = \left[\exp(S_1) W^j_\mu \underline{P}_j - \frac{2}{g_2} \partial_\mu [\exp(S_1)] \right] \exp(-S_1) \quad (6.180)$$

$$\underline{G}'^k_\mu \mathbf{i} \Gamma_k = \left[\exp(S_2) \underline{G}^k_\mu \mathbf{i} \Gamma_k - \frac{2}{g_3} \partial_\mu [\exp(S_2)] \right] \exp(-S_2). \quad (6.181)$$

Le groupe $SU(3)$ de la chromodynamique, engendré par les projecteurs sur le secteur des quarks, agit seulement sur ce secteur de l'onde :

$$P^+ [\exp(b^k \mathbf{i} \Gamma_k)](\Psi) P^+ = P^+ \Psi P^+ = \begin{pmatrix} \Psi_l & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.182)$$

Nous obtenons donc un groupe de jauge $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$ pour une onde incorporant tous les fermions de la première génération. Ce groupe n'agit sur le secteur leptonique que par sa partie $U(1) \times SU(2)$. La traduction physique est : les leptons ne peuvent interagir par interactions fortes, ils ne sont capables que d'interactions électromagnétiques et faibles. Ceci est parfaitement vérifié expérimentalement. La nouveauté tient seulement à ce que cela vient de la structure elle-même de l'onde quantique. Puisque c'est indépendant de l'échelle des énergies, on peut comprendre pourquoi les théories de grande unification n'ont pas marché.

6.4.1 Trois générations, quatre neutrinos

La finalité de la théorie physique est de comprendre les faits expérimentaux. Aujourd'hui on doit justifier à la fois pourquoi il y a seulement trois sortes de leptons et de quarks, et aussi un quatrième neutrino, sans interactions électro-faibles. L'expérience montre à la fois la limitation à trois sortes de leptons légers à partir de l'étude de la désintégration du Z^0 , et la possibilité de l'existence d'un quatrième neutrino sans interactions électro-faibles. Nous avons justifié l'existence de trois sortes de leptons au chapitre 5. Ceci se généralise facilement aux trois générations du modèle standard. Les deux autres générations s'obtiennent en remplaçant la direction privilégiée σ_3 de l'équation de Dirac par σ_1 ou σ_2 , partout où cette direction sert. En outre le passage de l'une à l'autre des générations doit être vu comme une permutation circulaire des indices $1 \mapsto 2 \mapsto 3 \mapsto 1$ ou $1 \mapsto 3 \mapsto 2 \mapsto 1$ pour l'autre. Par exemple le σ_3 de (6.11) qui est utilisé pour les projecteurs définissant onde droite et onde gauche doit être remplacé par σ_1 ou σ_2 . Et le σ_1 de (6.8) qui lie l'onde de la particule et l'onde de l'antiparticule doit être remplacé par σ_2 ou σ_3 . Ces changements obligent à traiter séparément chaque génération, et c'est la raison de ce traitement séparé des générations dans le modèle standard. Maintenant pour une quatrième génération nous n'avons plus de possibilité semblable car l'algèbre Cl_3 est celle de l'espace physique à 3 dimensions. On ne peut pas y obtenir un quatrième ensemble d'opérateurs similaires aux P_μ .

Mais l'existence d'un quatrième neutrino [19] est possible parce que Cl_3 possède quatre termes indépendants de carré -1 . L'équation d'onde de l'électron contient l'un de ces quatre termes, $i\sigma_3 = \sigma_{12}$. Ensuite $i\sigma_1 = \sigma_{23}$ et $i\sigma_2 = \sigma_{31}$ expliquent pourquoi deux autres sortes de leptons existent. Or on peut aussi construire une équation d'onde invariante avec le quatrième générateur, $i = \sigma_{123}$:

$$\widehat{\phi}(\nabla\widehat{\phi})\sigma_{123} + m\rho = 0. \quad (6.183)$$

Multipliant à gauche par $\overline{\phi}^{-1}$ on obtient avec $\rho = e^{-i\beta}\overline{\phi}\phi$ l'équation équivalente

$$\nabla\widehat{\phi}i + me^{-i\beta}\phi = 0 ; \quad \nabla\widehat{\phi} = ime^{-i\beta}\phi. \quad (6.184)$$

Contrairement à notre équation d'onde non linéaire homogène (3.9) qui a l'équation de Dirac comme approximation linéaire, cette équation d'onde ne peut pas venir de la théorie quantique linéaire, elle n'a pas d'approximation linéaire parce que l'angle β n'est pas petit, c'est maintenant l'angle de la phase de l'onde¹⁰. On peut néanmoins en obtenir les ondes planes. On cherche maintenant des solutions vérifiant

$$\phi = e^{-i\varphi} \phi_0 ; \quad \varphi = mv_\mu x^\mu ; \quad v = \sigma^\mu v_\mu. \quad (6.185)$$

où v est une vitesse réduite fixe et ϕ_0 est aussi un terme fixe, on obtient :

$$\nabla \hat{\phi} = \sigma^\mu \partial_\mu (e^{i\varphi} \hat{\phi}_0) = imve^{i\varphi} \hat{\phi}_0. \quad (6.186)$$

Et nous avons

$$\phi \bar{\phi} = e^{-i\varphi} \phi_0 e^{-i\varphi} \bar{\phi}_0 = e^{-2i\varphi} \phi_0 \bar{\phi}_0. \quad (6.187)$$

Alors si l'on pose

$$\phi_0 \bar{\phi}_0 = \rho_0 e^{i\beta_0} \quad (6.188)$$

on obtient

$$\beta = \beta_0 - 2\varphi ; \quad e^{-i\beta} \phi = e^{-i(\beta_0 - 2\varphi)} e^{-i\varphi} \phi_0 = e^{-i(\beta_0 - \varphi)} \phi_0 \quad (6.189)$$

Alors (6.177) est équivalent à

$$imve^{i\varphi} \hat{\phi}_0 = ime^{-i(\beta_0 - \varphi)} \phi_0 \quad (6.190)$$

$$v \hat{\phi}_0 = e^{-i\beta_0} \phi_0$$

$$e^{i\beta_0} v \hat{\phi}_0 = \phi_0. \quad (6.191)$$

En conjuguant on obtient

$$e^{-i\beta_0} \hat{v} \phi_0 = \hat{\phi}_0. \quad (6.192)$$

Aussi on a

$$\phi_0 = e^{i\beta_0} v \hat{\phi}_0 = e^{i\beta_0} v [e^{-i\beta_0} \hat{v} \phi_0] = v \hat{v} \phi_0. \quad (6.193)$$

Alors si $\phi_0 \neq 0$ on obtient

$$1 = v \hat{v} \quad (6.194)$$

qui donne (2.73) ou (3.40) et puisque (6.191) entraîne (3.43) on obtient le même résultat qu'avec notre équation d'onde non linéaire : existence d'ondes planes

10. C'est une autre raison de penser que l'équation d'onde non linéaire homogène est meilleure que son approximation linéaire.

avec seulement des énergies positives. En développant (6.176) on obtient un système de 8 équations numériques semblable au système (2.92) à (2.99) et quatre de ces équations sont les lois de conservation des courants D_μ ($\partial_\nu D_\mu^\nu = 0$) [19]. Donc la densité de probabilité est conservée et il n'y a pas de désintégration possible d'une telle particule. Sans un ensemble d'opérateurs P_μ il n'y a pas de force électro-faible. Par conséquent seules les interactions gravitationnelles restent possibles. Un tel objet ferait nécessairement partie de la matière noire puisqu'il est incapable d'émettre des photons.

6.5 Transformation géométrique liée à l'onde

On a vu en 3.3 que l'onde de l'électron définit en chaque point de l'espace-temps une transformation géométrique (3.55) de l'espace-temps tangent à la variété intrinsèque sur l'espace-temps tangent à notre variété d'espace-temps. Que devient cette transformation quand on passe à l'onde leptonique Ψ_l d'un couple électron-neutrino, ou à l'onde complète Ψ de la première génération ?

6.5.1 En algèbre d'espace-temps

Tout élément M de Cl_3 est somme d'un scalaire s , d'un vecteur $\vec{v}$, d'un bivecteur $i\vec{w}$ et d'un pseudo-scalaire ip . On a

$$\begin{aligned} M &= s + \vec{v} + i\vec{w} + ip; \quad \widehat{M} = s - \vec{v} + i\vec{w} - ip \\ M^\dagger &= s + \vec{v} - i\vec{w} - ip; \quad \overline{M} = s - \vec{v} - i\vec{w} + ip. \end{aligned} \quad (6.195)$$

Avec la représentation matricielle de l'algèbre d'espace-temps étudiée en 1.4.1 et le N de (1.80) on associe à $x = x^\mu \sigma_\mu$ de Cl_3 le vecteur d'espace-temps

$$\mathbf{x} = x^\mu \gamma_\mu = \begin{pmatrix} 0 & x \\ \widehat{x} & 0 \end{pmatrix} \quad (6.196)$$

Alors la dilatation R définie par (1.42) associe au vecteur d'espace-temps $\mathbf{x}$ le vecteur d'espace-temps $\mathbf{x}'$ vérifiant

$$\mathbf{x}' = N\mathbf{x}\tilde{N} \quad (6.197)$$

tandis que l'opérateur différentiel $\boldsymbol{\partial} = \gamma^\mu \partial_\mu$ vérifie

$$\boldsymbol{\partial} = \tilde{N}\boldsymbol{\partial}'N. \quad (6.198)$$

Et la dilatation D définie par (3.55) associe au vecteur d'espace-temps $\mathbf{y}$, élément de l'espace-temps tangent à la variété intrinsèque liée à l'onde, un vecteur d'espace-temps $\mathbf{x}$ de l'espace-temps usuel, vérifiant

$$\mathbf{x} = \Psi\mathbf{y}\tilde{\Psi}; \quad \Psi = \begin{pmatrix} \phi & 0 \\ 0 & \widehat{\phi} \end{pmatrix}; \quad \tilde{\Psi} = \begin{pmatrix} \overline{\phi} & 0 \\ 0 & \phi^\dagger \end{pmatrix}; \quad \mathbf{y} = y^\mu \gamma_\mu = \begin{pmatrix} 0 & y \\ \widehat{y} & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.199)$$

Maintenant on considère l'onde du cas leptonique Ψ_l qui s'écrit

$$\Psi_l = \begin{pmatrix} \phi_e & \phi_n \\ \widehat{\phi}_n & \widehat{\phi}_e \end{pmatrix}; \quad \widetilde{\Psi}_l = \begin{pmatrix} \overline{\phi}_e & \phi_n^\dagger \\ \overline{\phi}_n & \phi_e^\dagger \end{pmatrix}. \quad (6.200)$$

La généralisation de (6.199) est

$$\mathbf{x} = \Psi_l \mathbf{y} \widetilde{\Psi}_l. \quad (6.201)$$

Or puisque

$$\widetilde{\mathbf{x}} = \Psi_l \mathbf{y} \widetilde{\Psi}_l = \mathbf{x} \quad (6.202)$$

$\mathbf{x}$ est forcément la somme d'un scalaire, d'un vecteur et d'un pseudo-scalaire.¹¹ Pour obtenir seulement un vecteur, on doit séparer la partie vectorielle. Notant $\langle M \rangle_1$ la partie vectorielle du multivecteur M , nous posons donc à la place de (6.201)

$$\mathbf{x} = \langle \Psi_l \mathbf{y} \widetilde{\Psi}_l \rangle_1 \quad (6.203)$$

On a

$$\begin{aligned} \Psi_l \mathbf{y} \widetilde{\Psi}_l &= \begin{pmatrix} \phi_e & \phi_n \\ \widehat{\phi}_n & \widehat{\phi}_e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & y \\ \widehat{y} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\phi}_e & \phi_n^\dagger \\ \overline{\phi}_n & \phi_e^\dagger \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \phi_n \widehat{y} \overline{\phi}_e + \phi_e y \overline{\phi}_n & \phi_e y \phi_e^\dagger + \phi_n \widehat{y} \phi_n^\dagger \\ \widehat{\phi}_e \widehat{y} \overline{\phi}_e + \widehat{\phi}_n y \overline{\phi}_n & \widehat{\phi}_n y \phi_e^\dagger + \widehat{\phi}_e \widehat{y} \phi_n^\dagger \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6.204)$$

qui donne

$$\mathbf{x} = \langle \Psi_l \mathbf{y} \widetilde{\Psi}_l \rangle_1 = \begin{pmatrix} 0 & x \\ \widehat{x} & 0 \end{pmatrix}; \quad x = \phi_e y \phi_e^\dagger + \phi_n \widehat{y} \phi_n^\dagger. \quad (6.205)$$

On pose

$$D = D_e + D_n; \quad D_e(y) = \phi_e y \phi_e^\dagger; \quad D_n(y) = \phi_n \widehat{y} \phi_n^\dagger \quad (6.206)$$

D_e est une dilatation directe, conservant l'orientation du temps et de l'espace. D_n est une dilatation inverse, conservant l'orientation du temps mais changeant celle de l'espace. La transformation géométrique $D : y \mapsto x$ est la somme de ces deux dilatations.

L'élément $\mathbf{y}$ est indépendant de l'observateur relativiste : si M est un élément quelconque de Cl_3^* et si N est donné par (1.80), la dilatation R définie

11. Le même raisonnement dans Cl_3 prouve que x est la somme d'un scalaire et d'un vecteur et c'est exact pour un vecteur d'espace-temps.

en (1.42) vérifie

$$x' = MxM^\dagger ; \quad \phi'_e = M\phi_e ; \quad \phi'_n = M\phi_n \quad (6.207)$$

$$\Psi'_l = \begin{pmatrix} \phi'_e & \phi'_n \\ \widehat{\phi}'_n & \widehat{\phi}'_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M\phi_e & M\phi_n \\ \widehat{M}\widehat{\phi}_n & \widehat{M}\widehat{\phi}_e \end{pmatrix} = N\Psi_l \quad (6.208)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= \begin{pmatrix} 0 & x' \\ \widehat{x}' & 0 \end{pmatrix} = N\mathbf{x}\tilde{N} = N < \Psi_l \mathbf{y} \tilde{\Psi}_l >_1 \tilde{N} = < N\Psi_l \mathbf{y} \tilde{\Psi}_l \tilde{N} >_1 \\ &= < \Psi'_l \mathbf{y} \tilde{\Psi}'_l >_1 . \end{aligned} \quad (6.209)$$

On a alors

$$\mathbf{x} = < \Psi_l \mathbf{y} \tilde{\Psi}_l >_1 ; \quad \mathbf{x}' = < \Psi'_l \mathbf{y} \tilde{\Psi}'_l >_1 \quad (6.210)$$

avec le même $\mathbf{y}$ pour l'observateur de $\mathbf{x}$ et pour l'observateur de $\mathbf{x}'$.

6.5.2 Extension à l'onde complète

L'onde complète Ψ incorporant les ondes des leptons et des quarks de la première génération, définie en (6.123) vérifie (la preuve est en A.2)

$$\tilde{\Psi} = \begin{pmatrix} \tilde{\Psi}_b & \tilde{\Psi}_r \\ \tilde{\Psi}_g & \tilde{\Psi}_l \end{pmatrix} \quad (6.211)$$

L'onde est à valeur dans l'algèbre de Clifford $Cl_{5,1}$. Chaque élément de cette algèbre s'écrit

$$\Psi = \sum_{n=0}^{n=6} < \Psi >_n \quad (6.212)$$

où $< \Psi >_n$ est appelé un n-vecteur. Le renversé vérifie

$$\tilde{\Psi} = < \Psi >_0 + < \Psi >_1 - < \Psi >_2 - < \Psi >_3 + < \Psi >_4 + < \Psi >_5 - < \Psi >_6 . \quad (6.213)$$

On définit la v-partie A_v de tout multivecteur A dans l'espace-temps complet comme la somme de la partie vectorielle et de la partie pseudo-vectorielle :

$$A_v = < A >_v = < A >_1 + < A >_5 \quad (6.214)$$

parce que c'est cette v-partie qui remplace dans $Cl_{5,1}$ la partie vectorielle $< M >_1$ de l'algèbre d'espace-temps. C'est lié au fait que les vecteurs de $Cl_{1,5}$ sont les pseudo-vecteurs de $Cl_{5,1}$ et vice-versa. On obtiendrait donc la même

définition de la v -partie en utilisant $Cl_{1,5}$. On se sert de

$$\mathbf{y} = \sum_{\mu=0}^{\mu=3} y^\mu \gamma_\mu ; \quad \mathbf{y}_5 = \sum_{\mu=0}^{\mu=3} y_5^\mu \gamma_\mu \quad (6.215)$$

$$< y >_1 = \sum_{a=0}^{a=5} y^a \Lambda_a = \sum_{\mu=0}^{\mu=3} y^\mu \Lambda_\mu + y^4 \Lambda_4 + y^5 \Lambda_5 \quad (6.216)$$

$$< y >_5 = \sum_{a=0}^{a=5} y_5^a \Lambda_a \Lambda_{0123} = \left(\sum_{\mu=0}^{\mu=3} y_5^\mu \Lambda_\mu + y_5^4 \Lambda_4 + y_5^5 \Lambda_5 \right) \Lambda_{0123}. \quad (6.217)$$

Ceci donne avec (1.84) et (1.87)

$$< y >_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{y} + y^4 - y^5 \mathbf{i} \\ \mathbf{y} + y^4 + y^5 \mathbf{i} & 0 \end{pmatrix} \quad (6.218)$$

$$< y >_5 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{y}_5 + y_5^4 - y_5^5 \mathbf{i} \\ \mathbf{y}_5 + y_5^4 + y_5^5 \mathbf{i} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{i} & 0 \\ 0 & \mathbf{i} \end{pmatrix} \quad (6.219)$$

$$y_v = < y >_v = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{y}_v + y_v^4 - y_v^5 \mathbf{i} \\ \mathbf{y}_v + y_v^4 + y_v^5 \mathbf{i} & 0 \end{pmatrix} \quad (6.220)$$

avec

$$\mathbf{y}_v = \mathbf{y} + \mathbf{y}_5 \mathbf{i} ; \quad y_v^4 = y^4 + y_5^4 \mathbf{i} ; \quad y_v^5 = -y_5^5 + y^5 \mathbf{i} \quad (6.221)$$

La généralisation de (6.203) est la transformation :

$$f : y_v \mapsto x_v = < \Psi y_v \tilde{\Psi} >_v \quad (6.222)$$

On utilise pour x les mêmes notations qu'en (6.215), (6.216), (6.217), (6.221), avec x à la place de y et l'on obtient

$$\Psi y_v \tilde{\Psi} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} ; \quad x_v = < \Psi y_v \tilde{\Psi} >_v = \begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_v + x_v^4 + x_v^5 = C = \Psi_b(\mathbf{y}_v + y_v^4 + y_v^5) \tilde{\Psi}_b + \Psi_g(-\mathbf{y}_v + y_v^4 - y_v^5) \tilde{\Psi}_g \quad (6.223)$$

$$-\mathbf{x}_v + x_v^4 - x_v^5 = B = \Psi_r(\mathbf{y}_v + y_v^4 + y_v^5) \tilde{\Psi}_r + \Psi_l(-\mathbf{y}_v + y_v^4 - y_v^5) \tilde{\Psi}_l. \quad (6.224)$$

Cette égalité contient le terme $\Psi_l \mathbf{y}_v \tilde{\Psi}_l$ et des termes semblables venant de l'onde des quarks. On peut remarquer que les dimensions supplémentaires sont mélangées avec les dimensions ordinaires. On remarque aussi que x_v ou y_v sont maintenant somme d'un vecteur et d'un 5-vecteur, c'est-à-dire d'un pseudo-vecteur de $Cl_{5,1}$. Les composantes de ces sommes peuvent s'écrire comme

$$x_v^a = x^a + x_5^a \mathbf{i} \quad (6.225)$$

L'espace-temps complet a donc une structure naturelle d'espace vectoriel complexe de dimension 6, avec le $\mathbf{i}$ de la jauge chirale.

6.5.3 Invariance

La dilatation R induite par un élément quelconque M de Cl_3 vérifiant (1.42) s'écrit en algèbre d'espace-temps, avec le N de (1.68) :

$$\mathbf{x}' = N\mathbf{x}\tilde{N} ; \mathbf{x} = \sum_{\mu=0}^{\mu=3} x^\mu \gamma_\mu ; \mathbf{x}' = \sum_{\mu=0}^{\mu=3} x'^\mu \gamma_\mu ; \Psi'_l = N\Psi_l \quad (6.226)$$

et l'on attend la même transformation pour les ondes des quarks :

$$\Psi'_r = N\Psi_r ; \Psi'_g = N\Psi_g ; \Psi'_b = N\Psi_b. \quad (6.227)$$

On pose

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & \widehat{N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \widehat{M} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \widehat{M} \end{pmatrix}. \quad (6.228)$$

On obtient alors

$$\tilde{\mathbf{N}} = \begin{pmatrix} \tilde{N} & 0 \\ 0 & \tilde{N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{M} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M^\dagger & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \overline{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M^\dagger \end{pmatrix}. \quad (6.229)$$

Avec

$$\mathbf{x}_5 = \sum_{\mu=0}^{\mu=3} x_5^\mu \gamma_\mu ; \mathbf{x}'_5 = \sum_{\mu=0}^{\mu=3} x'^\mu_5 \gamma_\mu \quad (6.230)$$

$$\mathbf{x}_v = \mathbf{x} + \mathbf{x}_5 \mathbf{i} ; \mathbf{x}'_v = \mathbf{x}' + \mathbf{x}'_5 \mathbf{i} \quad (6.231)$$

$$x_v^4 = x^4 + x_5^4 \mathbf{i} ; x_v^5 = -x_5^5 + x^5 \mathbf{i} ; x_v'^4 = x'^4 + x_5'^4 \mathbf{i} ; x_v'^5 = -x_5'^5 + x'^5 \mathbf{i} \quad (6.232)$$

$$\begin{aligned} x_v &= \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{x}_v + x_v^4 - x_v^5 \\ \mathbf{x}_v + x_v^4 + x_v^5 & 0 \end{pmatrix} \\ x'_v &= \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{x}'_v + x_v'^4 - x_v'^5 \\ \mathbf{x}'_v + x_v'^4 + x_v'^5 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6.233)$$

la généralisation de (6.209) dans $Cl_{5,1}$ s'écrit

$$x'_v = \mathbf{N} x_v \tilde{\mathbf{N}} ; \Psi' = \mathbf{N} \Psi \quad (6.234)$$

ce qui donne

$$\tilde{\Psi}' = \widetilde{\mathbf{N} \Psi} = \tilde{\Psi} \tilde{\mathbf{N}}. \quad (6.235)$$

Donc la première égalité (6.234) est équivalente au système :

$$\mathbf{x}'_v + x'^5_v = N(\mathbf{x}_v + x^5_v)\tilde{N} \quad (6.236)$$

$$x'^4_v = x^4_v N \tilde{N}. \quad (6.237)$$

Et comme on peut séparer, dans (6.236), les différentes parties multivectorielles, c'est équivalent au système :

$$\mathbf{x}' = N\mathbf{x}\tilde{N} \quad (6.238)$$

$$\mathbf{x}'_5 = N\mathbf{x}_5\tilde{N} \quad (6.239)$$

$$x'^4_v = x^4_v N \tilde{N} \quad (6.240)$$

$$x'^5_v = x^5_v N \tilde{N}.$$

Avec (1.43) (6.237) et (6.240) s'écrivent

$$x'^4 + ix'^5_5 = re^{i\theta}(x^4 + ix^5_5) \quad (6.241)$$

$$-x'^5_5 + ix'^5 = re^{i\theta}(-x^5_5 + ix^5) \quad (6.242)$$

La séparation entre les différentes composantes de l'espace-temps global explique pourquoi nous ne pouvons voir habituellement que les composantes réelles des vecteurs de l'espace-temps $\mathbf{x}$. Seule la partie usuelle de l'espace-temps a des composantes réelles. (6.241) et (6.242) montrent à la fois que ces deux dimensions supplémentaires sont des dimensions complexes, et que cela sépare complètement l'espace-temps usuel dans l'espace-temps global. Un espace-temps avec une ou deux dimensions supplémentaires a été essayé très tôt [49]. Le problème a alors toujours été de justifier pourquoi la physique ordinaire ne voit pas ces dimensions supplémentaires. Ici ce problème est automatiquement résolu par la différence qui survient du groupe d'invariance des lois physiques.

l'invariance de forme de la transformation géométrique f résulte de (6.231) et de (6.232) qui donnent

$$f : y_v \mapsto x_v = \langle \Psi y_v \tilde{\Psi} \rangle_v \quad (6.243)$$

$$\begin{aligned} f : y_v \mapsto x'_v &= \langle \Psi' y_v \tilde{\Psi}' \rangle_v = \langle \mathbf{N} \Psi y_v \tilde{\Psi} \tilde{\mathbf{N}} \rangle_v \\ &= \mathbf{N} \langle \Psi y_v \tilde{\Psi} \rangle_v \tilde{\mathbf{N}} = \mathbf{N} x_v \tilde{\mathbf{N}}. \end{aligned} \quad (6.244)$$

Comme on l'a dit au paragraphe 3.3, y_v est indépendant de l'observateur, intrinsèque à l'onde.

6.6 Existence de l'inverse

Notre étude en 5.2 des systèmes d'électrons a introduit l'inverse ϕ^{-1} qui n'est défini que là où $\det \phi \neq 0$. On peut voir que cette condition est vérifiée

partout pour chacun des états liés de l'atome d'hydrogène (voir l'appendice C). On a vu précédemment que l'onde de l'électron est une partie de l'onde Ψ_l à valeur dans $Cl_{1,3}$ qui se devrait donc aussi d'être inversible. Il nous faut donc obtenir $\det(\Psi_l) \neq 0$.

Nous n'avons pas encore utilisé un des préceptes du modèle standard, parce que nous n'en avons pas eu l'utilité jusqu'ici : la partie droite de l'onde du neutrino n'interagissant pas, le modèle standard s'en passe complètement et on peut alors supposer que

$$\xi_{1n} = \xi_{2n} = 0 \quad (6.245)$$

On a alors avec (6.2), (6.3) et (6.8) :

$$\Psi_l = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \xi_{1e} & -\eta_{2e}^* & 0 & -\eta_{2n}^* \\ \xi_{2e} & \eta_{1e}^* & 0 & \eta_{1n}^* \\ \eta_{1n} & 0 & \eta_{1e} & -\xi_{2e}^* \\ \eta_{2n} & 0 & \eta_{2e} & \xi_{1e}^* \end{pmatrix} \quad (6.246)$$

On pose

$$\rho_e = |\det(\phi_e)| = 2|\xi_{1e}\eta_{1e}^* + \xi_{2e}\eta_{2e}^*| \quad (6.247)$$

$$\rho_L = |\det(\phi_L)| ; \quad \phi_L = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \eta_{1n} & \eta_{1e} \\ \eta_{2n} & \eta_{2e} \end{pmatrix} \quad (6.248)$$

$$\rho_l = [\det(\Psi_l)]^{1/2} \quad (6.249)$$

Le calcul du déterminant de la matrice (6.246) donne l'identité remarquable :

$$\rho_l = \sqrt{\rho_e^2 + \rho_L^2}. \quad (6.250)$$

Il est donc très facile d'obtenir un Ψ_l inversible, cela arrive dès que ϕ_e est inversible (c'est notamment le cas pour chaque état lié de l'atome d'hydrogène), ou dès que η_e et η_n sont linéairement indépendants. Ceci est une utilisation fort intéressante de la condition $\xi_n = 0$, et cela veut dire que tous les aspects du modèle standard sont importants. Cela signifie en outre que le bon cadre mathématique est bien celui des algèbres de Clifford, parce que l'existence en chaque point de l'inverse est physiquement utile. En outre nous pouvons étendre ce résultat à l'onde complète incorporant tous les fermions de la première génération. Le modèle standard n'utilise que les ondes gauches pour les quarks, on obtient alors pour la couleur r :

$$\Psi_r = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & -\eta_{2dr}^* & 0 & -\eta_{2ur}^* \\ 0 & \eta_{1dr}^* & 0 & \eta_{1ur}^* \\ \eta_{1ur} & 0 & \eta_{1dr} & 0 \\ \eta_{2ur} & 0 & \eta_{2dr} & 0 \end{pmatrix} \quad (6.251)$$

et nous avons deux égalités semblables pour les couleurs g et b . Maintenant nous considérons deux matrices 4×4 :

$$L = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \eta_{1e} & \eta_{1n} & \eta_{1dr} & \eta_{1ur} \\ \eta_{2e} & \eta_{2n} & \eta_{2dr} & \eta_{2ur} \\ \eta_{1dg} & \eta_{1ug} & \eta_{1db} & \eta_{1ub} \\ \eta_{2dg} & \eta_{2ug} & \eta_{2db} & \eta_{2ub} \end{pmatrix}; M = \sqrt{2} \begin{pmatrix} -\xi_{2e}^* & \eta_{1e} & \eta_{1dr} & \eta_{1ur} \\ \xi_{1e}^* & \eta_{2e} & \eta_{2dr} & \eta_{2ur} \\ 0 & \eta_{1dg} & \eta_{1db} & \eta_{1ub} \\ 0 & \eta_{2dg} & \eta_{2db} & \eta_{2ub} \end{pmatrix} \quad (6.252)$$

Et on obtient avec (6.123) l'identité remarquable

$$\det(\Psi) = |\det(L)|^2 + |\det(M)|^2 \quad (6.253)$$

Nous pouvons donc voir les ondes du modèle standard comme ayant le nombre maximal de degrés de liberté compatible avec l'existence de l'onde inverse Ψ^{-1} .

Dans la matrice M de (6.252) la couleur g est moins présente que les 2 autres couleurs r et b , ce qui a priori est anormal. Techniquement, la raison est simple : comme le seul terme droit, en ksi , est sur la même colonne que l'onde ug , quand on supprime les termes de toute une colonne et de toute une ligne dans le calcul d'un déterminant, le terme ug disparaît forcément.

Mais, plus important, l'outil mathématique fondamental est l'algèbre de Clifford, pas l'algèbre matricielle complexe. Cela se traduit par le fait que l'algèbre d'espace-temps n'est pas identique à l'algèbre des matrices complexes 4×4 , l'algèbre $Cl_{5,1}$ de l'espace-temps de dimension 6 n'est pas identique à l'algèbre des matrices complexes 8×8 . On n'a affaire qu'à des sous-algèbres, et encore pas en tant qu'espaces vectoriels complexes, mais en tant qu'algèbres réelles. L'utilisation des matrices complexes repose, au fond, sur une sorte d'accident ou de coïncidence fortuite, qui est l'identification possible entre l'algèbre de Clifford d'espace et l'algèbre des matrices complexes 2×2 , même si c'est uniquement en tant qu'algèbres sur le corps des réels.

Cela a pour conséquence, par exemple, que les matrices Ψ ne sont pas du tout symétriques. Les zéros sont en colonnes, pas en lignes. Les lignes 1, 2 et 5, 6 de la matrice Ψ sont multipliées par M tandis que les lignes 3, 4 et 7, 8 sont multipliées, elles, par $\widehat{M}$ dans le groupe d'invariance de forme. On peut aussi remarquer que tous les termes des matrices L et M de (6.252) sont des termes gauches, multipliés par $\widehat{M}$ dans l'invariance de forme. Lorsque l'on regarde les opérateurs de l'invariance de jauge électro-faible, on peut voir aussi qu'ils opèrent sur les colonnes des matrices, pas sur les lignes.

Autre conséquence, prendre l'adjoint n'est pas la transformation importante, ce qui serait le cas si la théorie des espaces hermitiens et des matrices unitaires était fondamentale. La transformation importante, que l'on retrouve tout au long de ce livre, c'est le renversement (ou retournement, A devenant $\tilde{A}$). Celui-ci a du sens dans toute algèbre de Clifford, et c'est ce renversement, et lui seul, qui apparaît dans les calculs. Il se trouve que le renversement est identique à l'adjoint, dans l'algèbre d'espace, et seulement dans cette algèbre. Que ce soit dans l'algèbre d'espace-temps ou de l'espace-temps de dimension

6, le renversement n'est pas identique à l'adjoint, et s'accompagne de l'échange entre le bloc matriciel haut gauche et le bloc matriciel bas droit, tandis que les blocs haut droit et bas gauche restent en place, étant échangés deux fois. Si le $SU(3)$ qui échange les états r, g, b était fondamental, il serait effectivement normal que la couleur green joue le même rôle, strictement, que les couleurs red et blue.

Et comme cela n'est pas le cas, on voit que la structure $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$ est largement "accidentelle" du point de vue mathématique, c'est-à-dire ne justifiant pas la nécessité de l'unitarité. La structure importante est l'algèbre $Cl_{5,1}$ et ses automorphismes multiplicatifs à gauche et à droite.

6.7 Équations d'onde

Le terme de masse de l'équation de Dirac relie l'onde droite et l'onde gauche, ainsi qu'on peut le voir en (2.31) et (2.32). Les termes en W^1 et W^2 dans la jauge électro-faible relient les ondes gauches η_e η_n de l'électron et du neutrino, tandis que les termes en B et W^3 traitent différemment onde gauche et onde droite. Le modèle de Weinberg-Salam a donc profité de la faible masse de l'électron pour négliger celle-ci¹². La masse est donc absente dans 6.1 à 6.6. L'existence des identités remarquables autorise un terme de masse pour une équation d'onde à la fois invariante de forme et invariante de jauge, on va le voir d'abord dans le cas de l'onde Ψ_l de l'électron et de son neutrino :

$$\tilde{\Psi}_l(\mathbf{D}\Psi_l)\gamma_{012} + m\rho_l = 0 \quad (6.254)$$

à condition d'admettre que ρ_l , défini en (6.250), est variable aussi bien dans l'invariance de jauge que dans l'invariance de forme. Pour l'invariance de forme (donc aussi l'invariance relativiste) on a, avec (2.64) et (6.248)

$$\begin{aligned} \rho'_e &= r\rho_e ; \quad \phi'_L = \widehat{M}\phi_L \\ \rho'_L &= |\det(\phi'_L)| = |\det(\widehat{M})||\det(\phi_L)| = r\rho_L \\ \rho'_l &= \sqrt{\rho'^2_e + \rho'^2_L} = r\sqrt{\rho_e^2 + \rho_L^2} = r\rho_l. \end{aligned} \quad (6.255)$$

L'équation d'onde (6.254) est donc invariante de forme sous la transformation R définie par M en (1.42) et N en (1.80), elle devient :

$$\tilde{\Psi}'_l(\mathbf{D}'\Psi'_l)\gamma_{012} + m'\rho'_l = 0 ; \quad m\rho_l = m'\rho'_l. \quad (6.256)$$

Cette équation d'onde ne pouvait pas être obtenue à partir de l'équation linéaire, car si l'invariant relativiste ρ , lié aux déterminants, existe toujours quand on utilise l'onde de la paire électron-neutrino, il n'existe pas d'angle

12. Cette approximation est justifiée a posteriori par le fait que la masse du boson Z^0 est 180 000 fois celle de l'électron. Elle est inévitable parce que le terme de masse linéaire de l'équation de Dirac ne peut pas être compatible avec l'invariance de jauge électro-faible.

d'Yvon-Takabayasi en dehors du cas du seul électron. Sous la transformation de jauge définie par (6.119) à (6.122) on obtient (le détail des calculs constitue l'appendice B) :

$$\tilde{\Psi}'_l(\mathbf{D}'\Psi'_l)\gamma_{012} + m'\rho'_l = 0 ; \quad \rho'_l = |\det(\Psi'_l)|^{1/2}. \quad (6.257)$$

Il n'est donc pas nécessaire d'utiliser un mécanisme compliqué de symétrie spontanément brisée pour réconcilier l'invariance de jauge électro-faible avec l'existence de la masse de l'électron, à condition d'admettre, bien sûr, que le terme ρ_l , qui dépend de Ψ , peut varier avec la transformation de jauge qui agit sur ce Ψ . La généralisation de (6.254) à l'onde complète comprenant les ondes des quarks de première génération est possible :

$$\tilde{\Psi}(\underline{\mathbf{D}}\Psi)\Lambda_{012} + m_q\rho = m\rho_l P^- ; \quad \rho = [\det(\Psi)]^{1/4} \quad (6.258)$$

où m_q est la masse réduite du quark u, ρ_l vérifie (6.250) et P^- est le projecteur défini en (1.93). L'autre quark est plus lourd, mais on doit rappeler que le quark d dont on parle dans tout ce chapitre n'est pas le quark ordinaire, mais le partenaire du quark u dans l'interaction faible, qui est une combinaison des quarks d et s, s étant le correspondant de d dans la seconde génération. Avec la transformation de jauge définie par (6.177) à (6.181) on obtient :

$$\tilde{\Psi}'(\underline{\mathbf{D}}'\Psi')\Lambda_{012} + m'_q\rho' = m'\rho'_l P^- \quad (6.259)$$

$$\rho' = [\det(\Psi')]^{1/4} ; \quad \rho'_l = [\det(\Psi'_l)]^{1/2}. \quad (6.260)$$

Dans un domaine de l'espace-temps où les ondes des quarks u et d sont nulles on a $\det(\Psi) = 0$ et l'équation d'onde(6.258) se réduit alors à (6.254).

Dans ce cas et dans un domaine de l'espace-temps où l'onde de l'électron est nulle ou négligeable on a $\rho_l = 0$ donc l'équation d'onde du neutrino se réduit à $\nabla\eta_n = 0$ qui est l'équation d'onde du neutrino usuel se déplaçant à la vitesse de la lumière. Cette onde est sans interaction, le neutrino n'interagissant plus avec l'électron et son onde ϕ_e . Cette onde est alors sans interaction.

Chapitre 7

Monopôles magnétiques

On présente ici les expériences récentes sur les monopôles magnétiques, Puis on applique au monopôle l'étude du chapitre 6 sur les interactions faibles.

7.1 Les travaux expérimentaux russes

Les travaux expérimentaux récents sur les monopôles magnétiques ont commencé avec V.F. Mikhailov [50]. Il reprenait les travaux effectués cinquante ans auparavant par F. Ehrenhaft. Un arc électrique produit des poussières ferromagnétiques qui sont transportées par un flux d'argon dans une chambre illuminée par un laser. Dans cette chambre les particules ferromagnétiques sont mues par un champ magnétique et par un champ électrique orthogonal au champ magnétique. Le sens des champs peut être inversé. Les mouvements sont observés, sous la lumière du laser, avec un microscope optique.

La mesure de la charge magnétique de ces particules bénéficie du fait que certaines d'entre elles possèdent aussi une charge électrique, dont on connaît bien le mouvement dans un champ électrique. Mikhailov a observé une charge magnétique élémentaire $g = n\alpha \frac{e}{6}$. La constante de structure fine α est petite ($\alpha \approx \frac{1}{137}$).

Mais la valeur attendue est complètement différente [29]. Un calcul de Dirac, ré-obtenu de manière subtile par Lochak à partir de sa théorie du monopôle [39] donne pour la charge magnétique élémentaire

$$\frac{eg}{\hbar c} = \frac{n}{2} \quad (7.1)$$

où n est un entier. La charge magnétique élémentaire observée par Mikhailov est beaucoup plus petite que la charge théorique. On peut se demander s'il y a une raison de réfuter le calcul théorique, ou s'il existe des raisons expérimentales à cette divergence. Les deux sont possibles, car chaque processus permettant

d'obtenir (7.1) contient un calcul des potentiels créés par les charges, calcul dont on peut douter de la validité. Quant aux charges magnétiques observées par Mikhailov elles ne sont visibles que pendant la durée de l'illumination par la lumière intense du laser et elles peuvent être un effet du second ordre provoqué par cette illumination. Mikhailov a aussi réalisé une expérience dans laquelle les particules ferromagnétiques sont incluses dans des gouttes d'eau, avec la symétrie sphérique. Il a alors mesuré une charge magnétique compatible avec la charge magnétique élémentaire calculée par Dirac. La valeur d'une telle charge est donc une question qui doit être résolue expérimentalement.

Le travail expérimental de L. Urutskoev n'a en commun avec celui de Mikhailov que l'usage d'un arc électrique. Pour détruire du béton, des petits trous sont faits qu'on remplit d'eau, un fil électrique est mis dans chaque trou et un condensateur électrique se décharge dans les fils. La décharge produit une explosion et cette explosion détruit le béton. Le premier fait expérimental surprenant fut la grande vitesse des morceaux de béton expédiés par l'explosion, qui entraîna un besoin de mieux voir ce qui se passait durant ces décharges.

La suite de l'expérimentation consista à tirer dans de l'eau pure et sans béton. Une illumination intense fut observée, partant d'au-dessus du dispositif de tir. La durée du phénomène, environ 5 ms, était beaucoup plus longue que la durée de la décharge, 0,15 ms. Une analyse spectrale de la lumière émise fut effectuée. Les raies de l'azote et de l'oxygène étaient très faibles, alors que cette lumière était émise dans l'air, et les raies les plus fortes montraient la présence de Ti, Fe, Cu, Zn, Cr, Ni, Ca, Na. la présence de Cu et Zn peut venir des fils électriques, la présence de Ti signifie que les fils de titane utilisés dans les décharges diffusent au-dessus du dispositif en dépit du couvercle. La présence des autres éléments chimiques était énigmatique. Cela a amené à analyser plus finement les poudres métalliques résultant de l'explosion du fusible de titane dans l'eau. Les observations faites alors furent encore plus étranges. Alors que le fusible était fait à 99.7% de Ti la proportion de Ti dans les poudres pouvait descendre à 92%. la quantité de titane qui disparaissait était corrélée à la quantité de nouveaux éléments apparaissant, Fe, Si, Al, Ca, Na, Cu, Zn, principalement. En outre une analyse isotopique montra que la composition isotopique du titane avait changé, avec un déclin significatif de la proportion de ^{48}Ti . Les expériences furent répétées de nombreuses fois, avec toutes les précautions nécessaires. D'autres métaux que le titane ont été utilisés, en particulier du zirconium. Les proportions de métaux autres changent avec la composition du fusible. Par exemple il y a beaucoup plus de Cr avec le zirconium qu'avec le titane, et beaucoup moins de Si et de Al.

Comme la transformation d'un élément dans un autre est d'habitude associée à la radioactivité, une recherche approfondie d'émissions radioactives fut effectuée. Il n'y a pas de détection de rayons X- γ , malgré les 10^{19} - 10^{20} atomes transformés à chaque tir. La détection de neutrons a aussi été effectuée. Des détecteurs à scintillation indiquent un pulse qui permet d'estimer la vitesse de la radiation à 20 - 40 m/s. Une vitesse aussi basse ne pourrait être celle d'un flux de neutron, parce que les neutrons devraient être ultra-froids. Une détection

de la radiation par photo-émulsion a été mise en place, faute de mieux. Nous reviendrons plus loin sur ce que l'on voit avec ces films. Urutskoev vit ensuite que la présence d'un fort champ magnétique changeait l'aspect de ces traces, et en déduisit que la radiation qui sortait lors de ses tirs avait des propriétés magnétiques. Il monta alors des expériences pour piéger cette radiation avec des aimants forts et se servit de l'effet Moessbauer pour prouver la réalité de ces captures.

Urutskoev nota aussi que les transformations concernent principalement les noyaux pairs-pairs, c'est-à-dire ceux avec un nombre pair de neutrons et de protons. Il nota que l'énergie de liaison moyenne des noyaux produits est très peu différente de celle des noyaux initiaux : il n'y a pas d'énergie nucléaire émise ou absorbée en quantité significative. Et tous les noyaux produits sont dans l'état fondamental, il n'y a pas de radioactivité.

Les expériences faites par N. G. Ivoilov [34] montrent qu'il est possible d'obtenir des traces similaires sur les plaques photographiques avec beaucoup moins d'énergie : il utilise un arc électrique dans l'eau, avec un courant ne dépassant pas 40 A sous une tension de 80 V. Il a obtenu des traces correspondant bien aux propriétés des monopôles magnétiques prédites par la théorie de Lochak.

7.2 Travaux à l'E.C.N.

Les travaux effectués à l'Ecole Centrale de Nantes, dans le laboratoire de Guillaume Racineux, par Didier Priem et Claude Daviau [45] avec l'aide de Henri Lehn et de la Fondation Louis de Broglie, avaient pour but de vérifier et de continuer les travaux d'Urutskoev. Cela semblait nécessaire par suite de la nature extraordinaire des résultats précédemment obtenus.

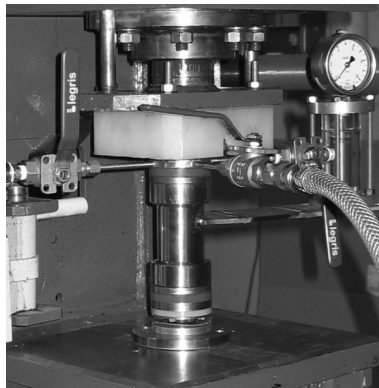


Figure 1 : Pot de tir

Le dispositif expérimental dépend de l'équipement disponible à l'E.C.N. et est donc différent, même si c'est le moins possible, de celui utilisé par Urutskoev. Le générateur est américain, de type Maxwell, avec une énergie maximum de 12kJ à 8,4 kV, une capacité de 360 μF et un pot de tir (Figure 1). Le premier pot de tir était en aluminium, il a été remplacé par un second capable de collecter

les gaz produits durant le tir. Les expériences faites par Urutskoev lui permirent de voir que le gaz produit est en quasi-totalité de l'hydrogène. Le second pot de tir était en acier inoxydable, il contenait un réservoir d'un diamètre intérieur de 20 mm recouvert par du polyuréthane. Le diamètre intérieur fut ensuite réduit à 16mm, ce qui a amélioré le rendement. Un troisième pot de tir a été fabriqué quand le second a été fatigué (flambage). Le courant venant du générateur est distribué entre deux électrodes, une en haut et l'autre en bas. Elles sont reliées par un fusible fabriqué en Ti40. Après un tir le gaz est collecté, son volume est mesuré. Les poudres sont collectées avec le liquide qui les contient, puis elles sont placées durant 24 heures sous une plaque photographique exposée donc à la radiation sortant des poudres. Ce film photographique est ensuite développé et examiné au microscope optique. Les poudres sont séchées puis examinées au microscope électronique de l'E.C.N.. Ceci nous a permis d'obtenir trois sortes de résultats, concernant les poudres, le gaz et les traces sur les plaques photographiques.

7.2.1 Résultats sur les poudres et le gaz

Nos observations confirment très largement les résultats obtenus par L. Urutskoev, même si nos taux de production sont plus bas que ceux qu'il a obtenus. L'énergie de la décharge étant plus basse que celle d'Urutskoev, et la décharge étant plus courte, cela n'a rien d'étonnant. Mais ceci dit, les éléments étrangers dont nous avons obtenu la spectrographie dans le microscope électronique ont une composition très proche de celle obtenue par Urutskoev. Dans le même temps nos observations rendent les choses encore plus étranges : quand nous notons la présence d'un pour cent de fer dans nos poudres, ce fer n'est pas dispersé un peu partout. Au contraire ce que l'on observe est : un pour cent des particules sont faites de tellement de fer que le titane est quasiment manquant. C'est souvent le fer qui est l'élément étranger dominant, mais il y a aussi des tirs à la suite desquels on trouve plus de cuivre que de fer. Les particules de cuivre ont toutes les tailles, certaines sont nombreuses et ont une taille d'environ un micromètre, d'autres, plus rares, sont plus grandes et même visibles à l'œil nu. La composition des particules exotiques peut être plus compliquée : on observe des particules de fer-chrome, de cuivre-zinc. Le fer est rarement seul, il est la plupart du temps avec du chrome, un peu de nickel, parfois 1% de manganèse, et avec du carbone et de l'oxygène. La composition des particules est souvent non homogène, une particule peut avoir du titane non transformé par endroits et ailleurs le titane peut avoir été remplacé presque en totalité.

La figure 2 montre une particule avec une évidente continuité, qui a des parties sombres et une partie claire, en plus de nombreux trous. Sur la gauche et dessous le titane reste intact. au centre l'analyse spectrale indique la composition suivante en masse : Fe 69,8%, Ti 10,81%, Ni 7.28%, Cr 4,33%, O 3,98%, C 3,8%. Les trous aussi sont significatifs, parce qu'ils indiquent une production de gaz juste avant la solidification provoquée par le refroidissement intense dans l'eau

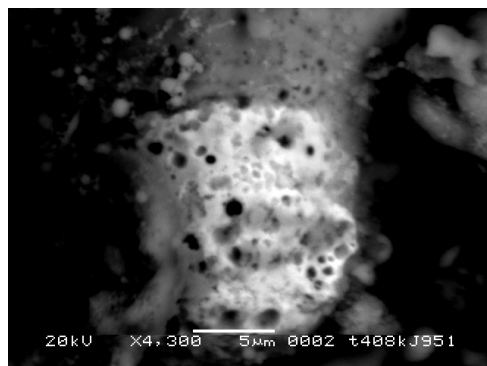


Figure 2 : Particule avec du fer localement

Le fait que le fer est rarement seul, et qu'il est associé au chrome et au nickel a beaucoup compliqué notre travail, parce que la composition de l'acier inox de notre cuve contient ces trois métaux, et on pouvait nous objecter que l'acier inox de la cuve contaminait les poudres. L'acier inox a donc été enlevé de la cuve, elle ne contient maintenant que du titane et du polyuréthane. La suppression de l'acier inox n'a en réalité rien changé. C'était prévisible parce que la composition indiquée plus haut n'est pas celle de l'acier inox de notre cuve. On peut aussi aisément vérifier que le Ti40 utilisé dans nos fusibles ne contient pas le pourcentage de fer, cuivre et autres matériaux trouvés dans les poudres.

Les résultats extraordinaires obtenus par Urutskoev sont donc bien réels. Ceux qui les diraient impossibles n'ont qu'à reproduire l'expérience. S'ils sont honnêtes, ils seront bien obligés de voir que quelque chose se passe.

Mais rien ne devrait arriver : les conditions de l'expérience ne déplacent qu'une énergie mesurée en kJ, ceci ne fournit tout au plus qu'une centaine d'électrons-Volt pour chaque atome concerné de titane. C'est ridiculement petit par rapport aux énergies liant les noyaux. En outre les interactions actuellement connues agissent d'une manière tout à fait différente. Par exemple les interactions faibles permettent de transformer un proton d'un noyau en neutron ou vice-versa, et ceci est soumis aux lois générales de la mécanique quantique, où le hasard joue un rôle essentiel et permanent. Si le noyau d'un atome de titane est transformé par interaction faible, il peut donner un noyau de scandium ou de vanadium. Aucune de ces métaux n'a été vu jusqu'alors. Nous n'avons pas vu une seule fois les raies du vanadium, alors que le vanadium est un passage obligé si l'on veut, par interactions faibles, aller du titane au fer ou au cuivre. Et si les interactions faibles agissaient, les noyaux transformés arriveraient au hasard, dans le temps et l'espace, pas dans des paquets macroscopiques.

Il ne faut pas oublier que notre expérience est une explosion et qu'une explosion n'est pas exactement la meilleure façon de rassembler en paquet des atomes dispersés. C'est au contraire un excellent moyen de disperser une matière concentrée. Puisque nous voyons des particules faites de fer, ou de cuivre, ou de nickel, ou de fer-chrome, avec très peu de titane, c'est que ces éléments

ont été produits ensemble. Nous ne comprenons pas comment c'est possible, mais cela ne change rien à la réalité du phénomène.

Il y a en plus la contrainte de l'énergie. La masse des éléments trouvés dans nos poudres et qui ne devraient pas y être est 10^{10} fois plus grande que l'énergie apportée par la décharge électrique. Avec une excellente précision on peut donc dire que l'énergie totale des atomes produits est égale à l'énergie totale des atomes détruits. La conservation de cette énergie totale restreint considérablement les possibilités de réaction. Par exemple on ne peut pas obtenir de vanadium. Les isotopes du vanadium sont plus lourds que ceux du titane, ce qui permet au ^{48}V d'être radioactif β^+ et de se désintégrer en ^{48}Ti . En outre comme on n'a pas de radioactivité liée à ces transformations, il est nécessaire que le nombre total d'électrons, de protons et de neutrons soit aussi conservé. Aussi étrange que cela puisse paraître, toutes ces conditions de conservation n'interdisent pas les transformations observées. Comme a dit Urutskoev, tout se passe comme si par exemple 100 noyaux de ^{48}Ti vont ensemble pour quelque raison former un gros "noyau", puis vont repartager leurs nucléons pour former en même temps des noyaux plus légers et plus lourds. En faisant cela ils respectent aussi les lois de conservation de l'énergie, de la charge électrique, du nombre baryonique, du nombre leptonique... Et en plus cette transformation magique ne s'accompagne d'aucune radioactivité significative !

Maintenant nous n'en savons pas assez pour avoir la moindre idée du mécanisme de transformation. Nous ne savons pas pourquoi après un tir on a beaucoup de particules de fer tandis qu'après le tir suivant on obtiendra à la place des particules de cuivre. Commencer à y comprendre quelque chose nécessitera probablement une analyse fine des particules obtenues et des conditions physiques à l'intérieur du pot de tir. Étant donné la brièveté de la décharge ($72\mu\text{s}$) et la pression énorme liée à l'onde de choc, il ne sera pas facile d'en apprendre davantage. Du gaz a toujours été produit durant les travaux de métallurgie fait à l'Ecole Centrale à l'aide d'arcs électriques. La présence de ce gaz était en outre considéré comme une nuisance limitant la répétitivité des tirs. Le dispositif que nous utilisons permet de mesurer aisément la quantité de gaz produite. Ce gaz est en quasi-totalité de l'hydrogène. Comme le titane porté à haute température est très actif, ceci n'est pas surprenant. Il est en plus difficile d'estimer la quantité d'oxygène emportés dans les poudres comme oxyde ou dioxyde de titane, ou par dissolution dans l'eau. On peut faire des estimations indiquant qu'une part de l'hydrogène ne vient pas de la dissociation de l'eau. Pour vérifier cela un tir dans de l'eau lourde a été effectué avec succès par Urutskoev. Il a obtenu non seulement D₂, mais aussi HD et H₂. Et cet hydrogène ne peut pas venir de l'eau. Les transformations du titane peuvent donner des protons isolés et des électrons qui peuvent former des atomes d'hydrogène. Cet hydrogène, qu'il soit d'origine chimique ou non, est formé à l'intérieur des particules, qui sont souvent si spongieuses qu'elles flottent à la surface de l'eau dans laquelle on collecte les poudres.

7.2.2 Taches

Après chaque essai, les poudres de titane formées à partir du fusible sont collectées avec l'eau contenue dans la chambre de tir et sont placées sous une plaque photographique. Les traces observées sont produites, non pas immédiatement lors de l'arc électrique, mais par ce qui est dans l'eau et les poudres et qui en sort encore, plusieurs heures après les tirs. Parfois quelque chose sort de l'eau, ce ne sont pas seulement les choses qui font les traces, mais aussi une partie de la poudre qui est à la surface de l'eau. Ces choses sortent de l'eau en dépit de la gravité et de la tension superficielle de l'eau, et ces choses se collent sur le papier d'emballage des plaques photographiques :

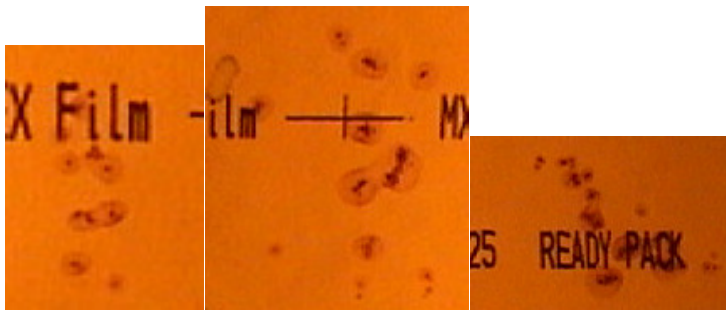


Figure 1 : Papier taché, tirs 103, 62, 79.

7.2.3 Traces

Les poudres collectées après un tir et la plaque photographique, grâce aux indications d'Urutskoev et de Lochak, sont placées entre deux plaques métalliques formant condensateur, sous une faible tension de 10V. Le mouvement d'un monopôle magnétique dans un champ électrique fixe et uniforme est analogue au mouvement d'une charge électrique dans un champ magnétique uniforme et fixe. La force de Laplace est

$$\vec{F} = g(\vec{H} - \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{E}) \quad (7.2)$$

où g est la charge du monopôle magnétique. Dans un champ électrique constant orthogonal au plan des plaques, un monopôle doit avoir un mouvement circulaire. Nous attendons donc des rotations dans le plan de la plaque photographique, et c'est ce qui arrive assez souvent, comme les figures 3 à 7 le montrent

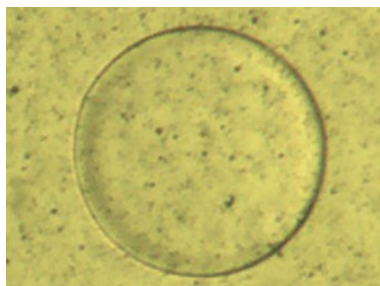


Figure 3 : Cercle, diamètre : 0,2 mm



Figure 4 : Cercle, longueur de l'image : 2,6 mm

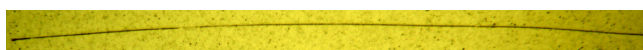


Figure 5 : Cercle, longueur de l'image : 2,47 mm

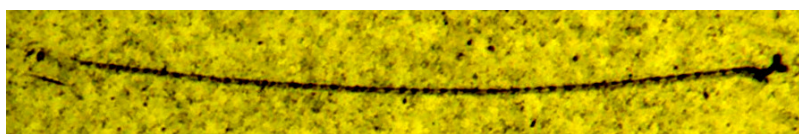


Figure 6 : Cercle, longueur de l'image : 0,95 mm



Figure 7 : Cercle, longueur de l'image : 1,45 mm

Nous ne devons pas nous attendre à ce que toutes les traces soient circulaires, parce que la présence de verre entre les plateaux induit certainement un champ électrique non uniforme. Il faut aussi noter que nous ne savons pas a priori ce que nous cherchons, nous ne voyons probablement qu'une petite partie des traces, en l'absence d'une connaissance complète de la dynamique des monopôles magnétiques. Nous ne savons pas non plus comment les monopôles interagissent avec les plaques photographiques. Et il est plus facile de voir les traces longues et très nettes, plus difficile de voir les traces courtes et faibles. Les cercles ne sont pas les seules traces courbes, nous obtenons aussi des traces en fer à cheval :

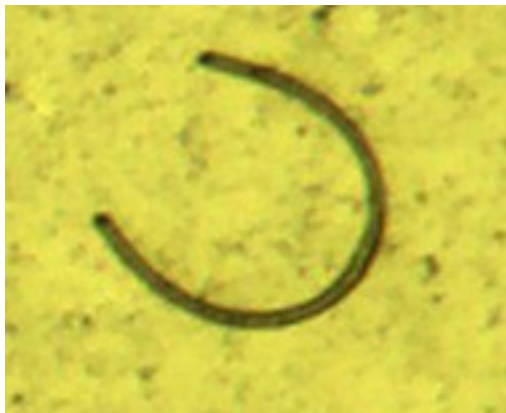


Figure 8 : Fer à cheval, longueur de l'image : 0,19 mm

On peut aussi s'attendre à des cercles imparfaits notamment parce que la perte d'énergie donne un rayon plus petit. Ceci est visible sur les images suivantes

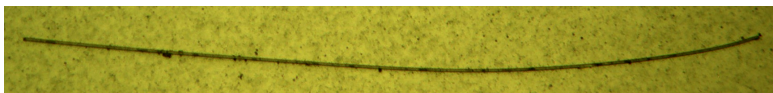


Figure 9 : Freinage, longueur de l'image : 1,78 mm

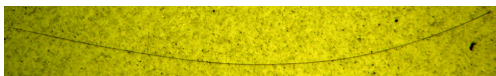


Figure 10 : Freinage, longueur de l'image : 1,9 mm



Figure 11 : Freinage, longueur de l'image : 0,57 mm



Figure 12 : Freinage, longueur de l'image : 0,2 mm

Des traces larges, comme dans les figures 8 ou 12, sont en réalité des traces doubles. Ce caractère double des traces est plus visible quand les deux traces sont bien séparées :



Figure 13 : Trace double, longueur de l'image : 2,67 mm

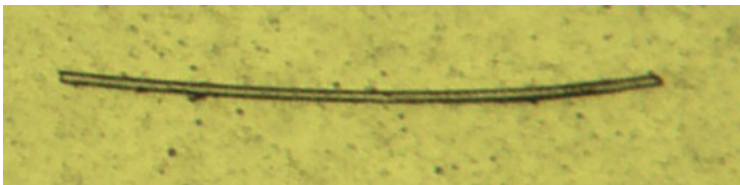


Figure 14 : Trace double, longueur de l'image : 0,58 mm

Le monopôle magnétique de Lochak est un objet chiral, construit autour d'un angle qui est pseudo-scalaire. L'objet le plus simple de notre monde usuel expliquant ce qu'est la chiralité est une vis. Il y a des vis gauches et des vis droites. Cette propriété est vérifiée pour plusieurs traces observées. On peut voir des spirales, souvent avec difficulté. Parfois la spirale est très visible, comme sur cette trace et ses agrandissements :

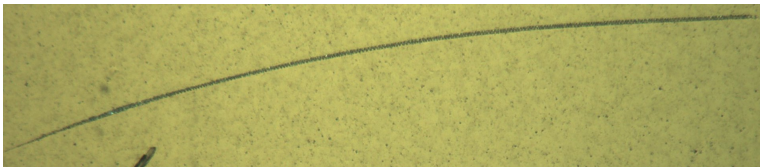


Figure 15 : Trace spirale (longueur 2mm)



Figures 16 et 17 : Agrandissements de la figure 15

Des ondulations sont souvent vues sur des agrandissements de nos images :

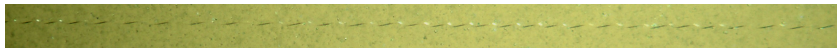


Figure 18 : Ondulation, longueur de l'image : 2,67 mm

Une longueur d'onde est directement mesurable sur cette image, où nous comptons 30 longueurs d'onde, ceci donne une longueur d'onde de $89\mu\text{m}$. Une longueur d'onde est aussi directement mesurable sur l'image suivante :

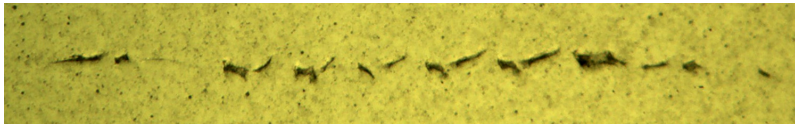


Figure 19 : Ondulation, longueur de l'image : 1,54 mm

En prenant en compte les quatre ondulations du milieu on peut estimer la longueur d'onde : $130\mu\text{m}$. De plus on voit une autre chose sur cette image, un double motif avec des traces alternativement montantes et descendantes.

La théorie du monopôle de Lochak peut rendre compte de ce double motif : L'onde est un spineur de Dirac fait de deux spineurs de Weyl, un spineur droit et un spineur gauche. Si la masse propre du monopole est nulle ces deux spineurs sont indépendants et peuvent se déplacer l'un sans l'autre. Si la masse propre n'est pas nulle les deux spineurs de Weyl sont couplés par le terme de masse. Il se peut que ce que l'on voit figure 19 soit exactement cela, une onde droite et une onde gauche dont on ne voit que des morceaux. Elles sont superposées aux extrémités et vues successivement au milieu. Un double motif est assez courant, on peut voir cela sur les figures suivantes :

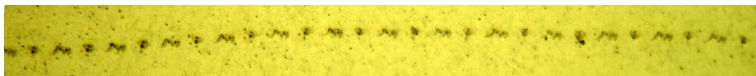


Figure 20 : Double motif, longueur de l'image : 2 mm

La longueur d'onde peut être estimée à $143\mu\text{m}$.

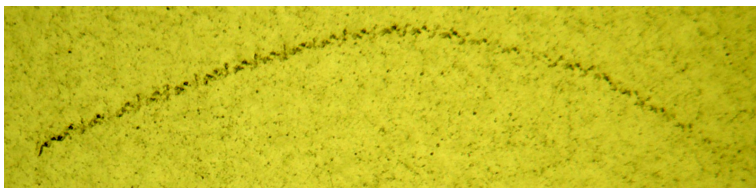


Figure 21 : Double motif, longueur de l'image : 1,64 mm

Ici la longueur d'onde peut être estimée à $65\mu\text{m}$.

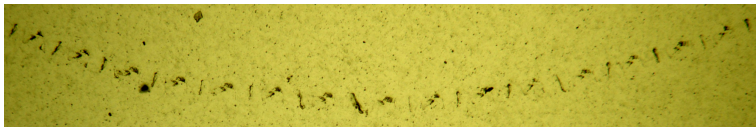


Figure 22 : Double motif, longueur de l'image : 2,65 mm

La longueur d'onde est estimée à $177\mu\text{m}$. Si la longueur d'onde est la longueur d'onde de de Broglie, et pas un artefact ¹, il est possible de calculer l'impulsion :

$$p = mv = \frac{h}{\lambda} \quad (7.3)$$

1. G. Lochak pense que ce que nous voyons n'est pas la longueur d'onde de de Broglie, mais seulement une échelle correspondant à la réponse de la plaque au mouvement de l'onde. Mais alors pourquoi deux motifs ?

Pour l'onde de la figure 21 où la longueur d'onde est la plus courte l'impulsion est de l'ordre de 10^{-29} kgm/s. La grande question est alors celle de la vitesse du monopôle magnétique. Si c'est la vitesse de la lumière l'énergie est très petite. Est-ce qu'une onde avec seulement $0,02\text{eV}c^{-2}$ peut produire les effets visibles sur la figure 21 ? C'est douteux. La seule vitesse expérimentale a été donnée par Urutskoev et est très basse : 20-40 m/s. Une vitesse de 20 m/s donne alors une masse de l'ordre de 5.10^{-31} kg, voisine de la masse propre de l'électron. Une vitesse encore plus basse est possible, car c'est peut-être en fin de freinage que nous voyons cette trace. Une autre possibilité théorique est donnée par (5.42) où la vitesse limite a elle-même une limite nulle quand ϵ tend vers 1.

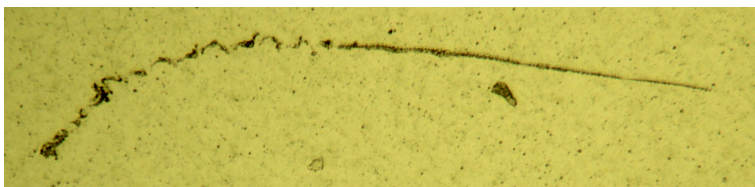


Figure 23 : Trace continue-discontinue, longueur de l'image : 1,47 mm.

La continuité de nombreuses traces est seulement une apparence venant d'une image floue. On peut voir cela sur l'image suivante, où un agrandissement numérique permet de compter les grains et d'estimer la distance entre deux grains à $8\mu\text{m}$.

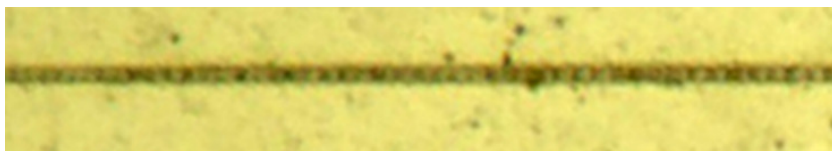


Figure 24 : Trace agrandie, longueur de l'image : 0,38 mm.

Un autre aspect fréquent de nos traces est le quasi-parallélisme de très longues traces, ainsi qu'on le voit sur l'image suivante :

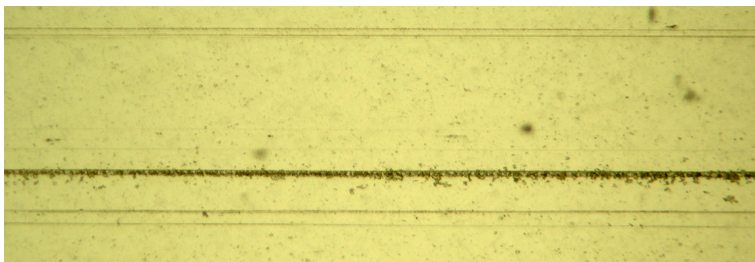


Figure 25 : Traces multiples, longueur de l'image : 1,97 mm.

La figure 25 montre seulement une partie de chaque trace qui s'étend des deux côtés de l'image. On voit cinq traces presque parallèles et on en devine deux

autres. On peut supposer que le caractère double de ces traces est lié au caractère double de l'onde, avec une partie droite et une partie gauche. En suivant cette hypothèse on peut penser que les traces simples sont dues au passage au même endroit des ondes gauches et droites. Le parallélisme de certaines traces peut venir d'une faible séparation de traces divergentes, comme sur la figure suivante :



Figure 26 : Traces divergentes, longueur de l'image : 2,67 mm.

Ces traces présentent à l'évidence une structure granulaire, avec des distances entre grains très semblables : cela plaide fortement pour l'hypothèse d'une onde unique, gauche et droite. La longueur d'onde peut être estimée à $19,6\mu\text{m}$. Quelques branchements entre traces sont visibles :

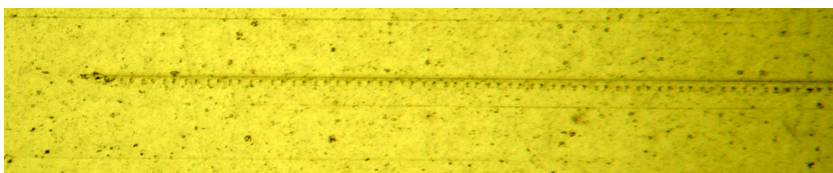


Figure 27 : Branchement, longueur de l'image : 1,87 mm.

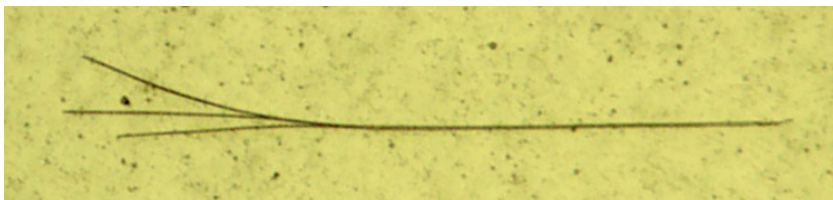


Figure 28 : Branchement, longueur de l'image : 0,77 mm.

La meilleure trace pour l'hypothèse des spineurs gauches et droits est la suivante, avec un agrandissement numérique de la trace du haut et un autre de la trace du bas :

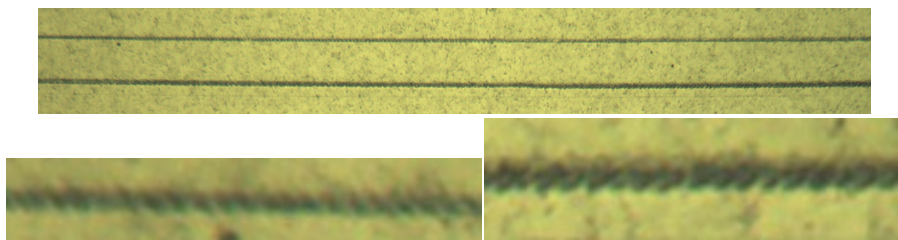


Figure 29 : Double spirale, longueur de l'image : 1,94 mm.

Les deux agrandissements font penser à deux vis tournant en sens inverse.

Toutes ces traces montrent de fortes différences par rapport à la physique des particules à charge électrique. Voir la nature gauche ou droite des traces nécessitera une observation en trois dimensions de ces traces. De telles observations indiquent que les monopôles font des creux sur la surface de la plaque photographique [20].

7.3 Electrons et monopôles

L'équation d'onde invariante (3.9) de l'électron a été obtenue à partir de l'équation d'onde du monopôle magnétique de G. Lochak (3.11) dans le cas particulier (3.12) où l'équation d'onde est homogène. Pour cela on a remplacé la jauge locale chirale par la jauge locale électrique. On obtiendra donc une équation d'onde invariante du monopôle magnétique en faisant la transformation inverse, c'est-à-dire en remplaçant la jauge électrique par la jauge chirale, dont on a vu qu'elle s'écrit en algèbre d'espace :

$$\phi' = e^{ia} \phi ; QB' = QB - \nabla a ; Q = \frac{g}{\hbar c} \quad (7.4)$$

où a est un réel et où g est la charge du monopôle. iB est le pseudo-vecteur d'espace-temps potentiel magnétique, qui est tout aussi bien le potentiel de Cabibbo-Ferrari de la théorie du monopôle que le potentiel en facteur du projecteur P_0 de (6.13). L'équation d'onde invariante du monopôle s'écrit donc :

$$\bar{\phi}(\nabla \hat{\phi})\sigma_{21} + \bar{\phi}Q iB \hat{\phi}\sigma_{21} + m\rho = 0. \quad (7.5)$$

Pour écrire les 8 équations numériques de cette équation d'onde invariante on utilise le vecteur d'espace-temps U tel que

$$\bar{\phi}QB\hat{\phi} = U^\mu \sigma_\mu \quad (7.6)$$

et l'on obtient à la place de (3.21) à (3.28) le système

$$0 = w^3 - U^3 + m\rho \quad (7.7)$$

$$0 = v^2 \quad (7.8)$$

$$0 = -v^1 \quad (7.9)$$

$$0 = w^0 - U^0 \quad (7.10)$$

$$0 = -v^3 \quad (7.11)$$

$$0 = w^2 + U^1 \quad (7.12)$$

$$0 = -w^1 - U^2 \quad (7.13)$$

$$0 = -v^0 \quad (7.14)$$

Comme pour l'électron, la partie réelle de l'équation invariante est la densité lagrangienne (7.7). Lochak a remarqué tout de suite que dans cette densité

lagrangienne le courant $J = D_0$ est remplacé par $K = D_3$, d'où l'indice 3 au lieu de l'indice 0 dans (7.7). On peut dire que l'équation d'onde invariante du monopôle est, en un certain sens, plus simple que l'équation d'onde de l'électron, parce que les quatre termes v^μ sont nuls, ce qui signifie que les quatre vecteurs D_μ sont conservatifs. Rappelons que la densité D_0^0 donne, dans le cas de l'électron, une densité que la théorie quantique interprète, avec l'équation de Schrödinger, comme une densité de probabilité. Lochak a montré que $K = D_3$ est le courant conservatif lié à l'invariance de la densité lagrangienne (7.7) sous l'invariance de jauge chirale (7.4). Les vecteurs D_1 et D_2 , conservatifs également, sont ignorés du formalisme des matrices complexes de Dirac. On a vu avec (2.103)-(2.104) que la jauge électrique se traduit par une rotation dans le plan (D_1, D_2) . La jauge chirale laisse invariant les quatre D_μ qui constituent avec (2.56) une base orthogonale, et dont les composantes sont les éléments de la matrice de la dilatation D de (3.55).

7.3.1 Conjugaison de charge

On se sert à nouveau du lien entre l'onde de la particule et l'onde de l'antiparticule. On note l'onde de l'antimonopôle ϕ_a :

$$\hat{\phi} = \hat{\phi}_a \sigma_1 ; \phi_a = -\phi \sigma_1 ; \bar{\phi} = \sigma_1 \bar{\phi}_a \quad (7.15)$$

L'équation d'onde invariante s'écrit donc :

$$\sigma_1 \bar{\phi}_a (\nabla \hat{\phi}_a) \sigma_1 \sigma_{21} + \sigma_1 \bar{\phi} Q i B \hat{\phi}_a \sigma_1 \sigma_{21} + m \rho = 0. \quad (7.16)$$

En multipliant à droite et à gauche par σ_1 on obtient

$$-\bar{\phi}_a (\nabla \hat{\phi}_a) \sigma_{21} - \bar{\phi}_a Q i B \hat{\phi}_a \sigma_{21} + m \rho = 0. \quad (7.17)$$

Ceci est habituellement simplifié en

$$\bar{\phi}_a (\nabla \hat{\phi}_a) \sigma_{21} + \bar{\phi}_a Q i B \hat{\phi}_a \sigma_{21} - m \rho = 0. \quad (7.18)$$

Par conséquent, et Lochak l'a remarqué immédiatement, la conjugaison de charge ne change pas le signe de la charge magnétique, contrairement au cas des charges électriques. Alors il n'y a pas de polarisation du vide venant des charges magnétiques [37] [38] [39]. Mais l'invariance de forme de l'équation indique que la bonne équation est (7.17), pas (7.18). Il serait donc plus correct de dire que, contrairement au cas de l'électron, la conjugaison de charge change ici non seulement le terme différentiel, mais aussi la charge, donc ne change pas la jauge ni le signe de la masse-énergie.

7.3.2 L'interaction électron-monopôle

Le vecteur d'espace-temps B est, comme le vecteur potentiel A un vecteur contravariant, ce qui est normal car O . Costa de Beauregard a expliqué

[22] pourquoi les termes de potentiel étaient attachés aux sources que sont les charges électriques et magnétiques. Le vecteur QB , tout comme le vecteur qA , est un vecteur covariant, permettant l'interaction par l'invariance de jauge. On a vu au chapitre 6 que l'angle de Weinberg θ_W est invariant sous le groupe des dilatations. Une charge électrique créant un potentiel A crée donc aussi, d'après (6.85), un potentiel :

$$B = \cos(\theta_W)A \quad (7.19)$$

Comme ce potentiel B est présent dans l'équation d'onde du monopôle, celui-ci verra la charge électrique, interagira avec elle. Cette interaction a été étudiée de manière détaillée par Lochak. La base de son calcul est la continuité de la fonction d'onde sous le groupe des rotations. La continuité de l'onde étant évidemment confortée par la continuité du potentiel, le raisonnement n'a pas besoin d'être repris ici, on se reportera à [37] [38]. Le potentiel B utilisé y posait néanmoins problème parce qu'il était discontinu en tout point de l'axe des z . C'est la raison pour laquelle le résultat, malgré la justesse du raisonnement physique, était légèrement incorrect. Dans le cas du potentiel créé par une charge électrique immobile on a

$$A^0 = -\frac{e}{r} ; B^0 = \cos(\theta_W)A^0 = \cos(\theta_W)\left(-\frac{e}{r}\right) = -\frac{e \cos(\theta_W)}{r} = -\frac{e'}{r} \quad (7.20)$$

où $e' = e \cos(\theta_W)$. La formule de Dirac de la charge magnétique obtenue par la condition de continuité de l'onde sous le groupe des rotations devient donc

$$\frac{e'g}{\hbar c} = \frac{n}{2} \quad (7.21)$$

où n est un entier, ce qui donne pour la plus petite valeur possible de la charge d'un monopôle magnétique :

$$g = \frac{\hbar c}{2e \cos(\theta_W)}. \quad (7.22)$$

On obtient donc une charge légèrement supérieure, 1,134 fois celle calculée par la formule de Dirac. Cette formule a été obtenue de diverses manières, à partir du moment cinétique du champ électromagnétique, ou à partir du mouvement d'une charge électrique dans le champ d'un monopôle magnétique. Dans ce cas c'est un potentiel iB qui est créé par la charge magnétique. L'électron verra le potentiel A qui en résulte selon (6.85) qui donne aussi

$$A = \cos(\theta_W)B \quad (7.23)$$

donc tout se passe comme si la charge du monopôle était réduite, $g' = g \cos(\theta_W)$. A la place de (7.21) on obtient

$$\frac{eg'}{\hbar c} = \frac{n}{2} \quad (7.24)$$

ce qui redonne la formule de Dirac modifiée (7.22). Cette modification de la valeur de la charge est la seule modification à apporter, l'équation de Poincaré [33] donnant la trajectoire d'un électron autour d'un monopôle magnétique n'est pas modifiée, ni le cône qu'il introduit et dont Lochak a montré qu'il était le cône de Poincaré de la toupie quantique [40].

La présence d'un terme σ_{21} dans l'équation d'onde invariante entraîne, comme dans le cas de l'électron, l'existence de deux autres équations d'ondes obtenues par permutation circulaire des indices 1, 2, 3, des matrices de Pauli (voir le chapitre 5). Une quatrième sorte de monopôles magnétiques vient de l'équation d'onde d'un quatrième neutrino (6.183) par addition d'un terme de jauge. On peut donc penser que quatre sortes de monopôles magnétiques peuvent exister, trois d'entre elles similairement au fait qu'à côté des électrons il y a des muons et des taus. Ces trois générations doivent être traitées de manière séparée dans les interactions électro-faibles que nous voyons maintenant.

7.3.3 Interactions électro-faibles des monopôles

Voulant pouvoir obtenir une identité similaire à (6.250) permettant à Ψ^{-1} d'exister partout, nous supposons que l'onde du monopôle interagissant est :

$$\Psi = \begin{pmatrix} \phi_L & \phi_n \\ \hat{\phi}_n & \hat{\phi}_L \end{pmatrix}; \quad \phi_n = \phi_{nL} + \phi_{nR} \quad (7.25)$$

où ϕ_n est l'onde du monopôle magnétique. On suit ici l'idée de Lochak du monopôle comme un état excité du neutrino, et on place l'onde du monopôle là où était la place du neutrino. Le spineur supplémentaire ϕ_L peut être vu comme une partie d'une onde électrique. On conserve la forme (6.22) de la dérivation covariante. Comme P_0 seul était changé quand on allait du cas leptonique au cas des quarks, on va utiliser les mêmes projecteurs $P_{\pm}$ de (6.12) et on se sert à nouveau des P_j définis en (6.14) à (6.16). A la place de (6.13) on pose

$$P_0(\Psi) = a\Psi\gamma_{21} + bP_-(\Psi)\mathbf{i} \quad (7.26)$$

où a et b sont des réels. On obtient les mêmes règles de commutation qu'en (6.17), à l'exception de la dernière relation de commutation qui doit être remplacée par :

$$P_0P_j = P_jP_0 = -a\mathbf{i}P_j. \quad (7.27)$$

Par conséquent le groupe de jauge a la même structure $U(1) \times SU(2)$. On obtient avec (7.25)

$$P_+(\Psi) = \begin{pmatrix} \phi_L & \phi_{nL} \\ \hat{\phi}_{nL} & \hat{\phi}_L \end{pmatrix}; \quad P_-(\Psi) = \begin{pmatrix} 0 & \phi_{nR} \\ \hat{\phi}_{nR} & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.28)$$

On rappelle que

$$\gamma_{21} = \begin{pmatrix} i\sigma_3 & 0 \\ 0 & i\sigma_3 \end{pmatrix}; \quad \phi_R\sigma_3 = \phi_R; \quad \phi_L\sigma_3 = -\phi_L. \quad (7.29)$$

On a alors

$$\Psi\gamma_{21} = i \begin{pmatrix} -\phi_L & \phi_{nR} - \phi_{nL} \\ -\widehat{\phi}_{nR} + \widehat{\phi}_{nL} & \widehat{\phi}_L \end{pmatrix} ; P_-(\Psi) = i \begin{pmatrix} 0 & -\phi_{nR} \\ \widehat{\phi}_{nR} & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_0(\Psi) = i \begin{pmatrix} -a\phi_L & (a-b)\phi_{nR} - a\phi_{nL} \\ (-a+b)\widehat{\phi}_{nR} + a\widehat{\phi}_{nL} & a\widehat{\phi}_L \end{pmatrix} \quad (7.30)$$

$$\mathbf{B}P_0(\Psi) = i \begin{pmatrix} (-a+b)B\widehat{\phi}_{nR} + aB\widehat{\phi}_{nL} & aB\widehat{\phi}_L \\ -aB\widehat{\phi}_L & (a-b)B\widehat{\phi}_{nR} - aB\widehat{\phi}_{nL} \end{pmatrix} \quad (7.31)$$

Utilisant (7.29) et (6.15), on obtient

$$P_2(\Psi) = \begin{pmatrix} \phi_{nL} & -\phi_L \\ -\widehat{\phi}_L & \widehat{\phi}_{nL} \end{pmatrix} \quad (7.32)$$

$$P_1(\Psi) = P_2(\Psi)\mathbf{i} = i \begin{pmatrix} \phi_{nL} & \phi_L \\ -\widehat{\phi}_L & -\widehat{\phi}_{nL} \end{pmatrix} \quad (7.33)$$

$$(\mathbf{W}^1P_1 + \mathbf{W}^2P_2)(\Psi) = i \begin{pmatrix} (-W^1 + iW^2)\widehat{\phi}_L & (-W^1 - iW^2)\widehat{\phi}_{nL} \\ (\widehat{W}^1 - i\widehat{W}^2)\phi_{nL} & (\widehat{W}^1 + i\widehat{W}^2)\phi_L \end{pmatrix} \quad (7.34)$$

Avec les W^+ et W^- définis en (6.74) on a

$$(\mathbf{W}^1P_1 + \mathbf{W}^2P_2)(\Psi) = i \begin{pmatrix} W^-\widehat{\phi}_L & -W^+\widehat{\phi}_{nL} \\ \widehat{W}^+\phi_{nL} & -\widehat{W}^-\phi_L \end{pmatrix} \quad (7.35)$$

On a aussi :

$$P_3(\Psi) = P_+(\Psi)(-\mathbf{i}) = i \begin{pmatrix} -\phi_L & \phi_{nL} \\ -\widehat{\phi}_{nL} & \widehat{\phi}_L \end{pmatrix} \quad (7.36)$$

$$\mathbf{W}^3P_3(\Psi) = i \begin{pmatrix} -W^3\widehat{\phi}_{nL} & W^3\widehat{\phi}_L \\ -\widehat{W}^3\phi_L & \widehat{W}^3\phi_{nL} \end{pmatrix} \quad (7.37)$$

La dérivation covariante (6.22) est donc équivalente au système :

$$D\widehat{\phi}_n = \nabla\widehat{\phi}_n + i\frac{g_1}{2}[aB\widehat{\phi}_{nL} + (-a+b)B\widehat{\phi}_{nR}] + i\frac{g_2}{2}(W^-\widehat{\phi}_L - W^3\widehat{\phi}_{nL}) \quad (7.38)$$

$$D\widehat{\phi}_L = \nabla\widehat{\phi}_L + i\frac{g_1}{2}aB\widehat{\phi}_L + i\frac{g_2}{2}(-W^+\widehat{\phi}_{nL} + W^3\widehat{\phi}_L) \quad (7.39)$$

Avec (6.83) on obtient

$$g_2W^3 = \sqrt{g_1^2 + g_2^2}Z^0 + g_1B \quad (7.40)$$

Donc (7.38) s'écrit

$$D\widehat{\phi}_n = \nabla\widehat{\phi}_n + i\frac{g_1}{2}[(a-1)B\widehat{\phi}_{nL} + (-a+b)B\widehat{\phi}_{nR}]$$

$$+ i\frac{g_2}{2}W^-\widehat{\phi}_L - \frac{i}{2}\sqrt{g_1^2 + g_2^2}Z^0\widehat{\phi}_{nL} \quad (7.41)$$

Comme on veut obtenir $\nabla\widehat{\phi}_n + iQB\widehat{\phi}_n$ on doit avoir

$$g_1(a-1) = g_1(b-a) = 2Q \quad (7.42)$$

La première de ces égalités donne $b = 2a - 1$ et si cette condition est vérifiée on obtient

$$\begin{aligned} g_1 &= \frac{q}{\cos(\theta_W)} = \frac{e}{\hbar c \cos(\theta_W)} \\ \frac{e(a-1)}{\hbar c \cos(\theta_W)} &= 2Q = \frac{2g}{\hbar c} \\ \frac{e(a-1)}{\cos(\theta_W)} &= 2g = \frac{\hbar c}{e \cos(\theta_W)} \\ a-1 &= \frac{\hbar c}{e^2} = \frac{1}{\alpha} \end{aligned} \quad (7.43)$$

où α est la constante de structure fine et l'on doit prendre

$$a = 1 + \frac{1}{\alpha} ; \quad b = 1 + \frac{2}{\alpha}. \quad (7.44)$$

Ceci donne dans (7.39)

$$D\widehat{\phi}_L = \nabla\widehat{\phi}_L + i\frac{g_1}{2}(1 + \frac{1}{\alpha})B\widehat{\phi}_L + i\frac{g_2}{2}(-W^+\widehat{\phi}_{nL} + W^3\widehat{\phi}_L) \quad (7.45)$$

qui n'est pas le terme différentiel d'un électron et reste à interpréter. Comme les termes contenant a sont beaucoup plus grands que les autres termes, le terme de charge magnétique semble dominant dans (7.41) et (7.45).

Ce troisième spineur n'est pas seulement une invention théorique : il est parfaitement visible sur la figure 29 page 117 qui est une partie de notre image de couverture. On peut, en agrandissant cette image, voir deux spirales enlacées dans la trace forte et une seule spirale dans la trace faible.

7.3.4 Équation d'onde invariante de jauge

Le couple onde du monopôle - onde ϕ_L étant analogue au couple électron-neutrino, l'équation d'onde pour le Ψ de (7.25) est identique à (6.254) :

$$\widetilde{\Psi}(\mathbf{D}\Psi)\gamma_{012} + m\rho = 0 ; \quad \rho = \sqrt{\det(\Psi)}. \quad (7.46)$$

Cette équation est invariante de forme sous la transformation R de (1.42) induite par M car on a (6.105) et :

$$\Psi' = N\Psi ; \quad N = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & \widehat{M} \end{pmatrix} \quad (7.47)$$

$$\widetilde{\Psi}' = \widetilde{\Psi}\widetilde{N} \quad (7.48)$$

$$\det(\Psi') = \det(N)\det(\Psi) = r^2\det(\Psi) \quad (7.49)$$

$$\rho' = \sqrt{\det(\Psi')} = r\rho \quad (7.50)$$

$$m'\rho' = m'r\rho = m\rho. \quad (7.51)$$

L'existence d'un seul terme de masse, donc d'une seule impulsion-énergie, implique une même longueur d'onde pour les trois spineurs, ce qui est visible sur la figure 29.

L'équation d'onde (7.46) est également invariante de jauge, avec le remplacement de $\rho = \sqrt{\det(\Psi)}$ par $\rho' = \sqrt{\det(\Psi')}$, sous la transformation de jauge définie par (6.119) à (6.122), car P_0 est de la forme générale étudiée dans l'appendice B et l'on a donc :

$$\tilde{\Psi}'(\mathbf{D}'\Psi')\gamma_{012} + m'\rho' = 0. \quad (7.52)$$

Le mécanisme de brisure spontanée de la symétrie de jauge n'est donc nécessaire ni pour l'électron, ni pour le monopôle, les équations d'onde étant simplement invariantes de jauge.

Chapitre 8

Conclusion

Partant des failles anciennes de la physique quantique relativiste, nous résumons les nouveaux aspects du modèle standard que permet notre approche par les algèbres de Clifford. La physique utilisant un principe de minimum n'est qu'une partie de la physique ondulatoire. Au-delà de la confrontation entre théorie et expérience, au-delà des applications futures, le modèle standard apparaît à la fois conforté et incontournable. Les seules nouveautés sont les monopôles magnétiques leptoniques.

8.1 Failles anciennes

La découverte du spin de l'électron remonte à 1925 et n'était pas prévue par la théorie physique. Les physiciens ont très naturellement commencé par arrondir les angles de cette nouveauté en essayant de réduire les ondes spinorielles aux tenseurs qui étaient mieux connus. L'étude était difficile, le champ a été éclairci par les étudiants de Louis de Broglie, principalement par O. Costa de Beauregard [21] et T. Takabayasi [48] qui réussit à donner un ensemble d'équations tensorielles équivalent à l'équation de Dirac. Cependant ces équations tensorielles agissent sur des quantités qui sont quadratiques par rapport à l'onde. Et quand on ajoute les ondes ces tenseurs ne s'ajoutent pas. Par conséquent l'onde spinorielle elle-même est essentielle du point de vue physique, c'est elle qui se propage et qui interfère. Seules les solutions de l'équation d'onde spinorielle expliquent la quantification, les bons nombres quantiques, le bon nombre des états liés et les bons niveaux d'énergie. Allons au bout de la démarche de Takabayasi, remplaçons complètement les spineurs par un ensemble de tenseurs, et résolvons complètement les équations tensorielles dans le cas de l'atome d'hydrogène. Obtiendrions-nous les bons résultats, le bon nombre d'états liés, les bons nombres quantiques et les bons niveaux d'énergie ? La réponse est : non, parce que les vraies représentations du groupe $SO(3)$ des rotations de l'espace physique ne donnent que des nombres entiers, pas les demi-entiers qui sont né-

cessaires pour obtenir les bons résultats. Ceux-ci ne sont obtenus qu'en prenant les représentations de $SL(2, \mathbb{C})$, mais alors nous sommes revenus dans Cl_3 .

La seconde raison pour laquelle les scientifiques ne comprirent pas la nouveauté de l'onde spinorielle était la difficulté des outils mathématiques. Deux groupes de Lie différents peuvent être semblables au voisinage de leur élément neutre. $SL(2, \mathbb{C})$ et $\mathcal{L}_+^\uparrow$ ou leurs sous-groupes $SU(2)$ et $SO(3)$ sont globalement différents mais localement identiques. La présente étude n'utilise pas les opérateurs infinitésimaux, donc nous pouvons faire la différence entre un groupe de Lie et son algèbre de Lie.

La physique des ondes implique l'utilisation des fonctions trigonométriques, donc de l'exponentielle complexe qui en simplifie les calculs. En évoluant vers une axiomatisation tout à fait inhabituelle en physique, la théorie quantique s'est bloquée sur une utilisation des seuls nombres complexes, ce qui revient à travailler avec la seule géométrie plane, avec un seul i de carré -1 qui est le générateur unique des rotations du plan euclidien. C'est en quelque sorte un "logiciel 2D". L'outil de base du présent livre est un "logiciel 3D", l'algèbre de Clifford de l'espace physique à trois dimensions. La construction des algèbres de Clifford par récurrence sur la dimension permet de retrouver ce logiciel de base tant dans l'algèbre de l'espace-temps à 4 dimensions que dans l'algèbre de l'espace-temps complet à 6 dimensions dont a besoin la physique du modèle standard. Ces algèbres présentent toutes les capacités des espaces construits sur le corps des complexes, ce sont en effet aussi des espaces vectoriels. Mais elles permettent en outre d'utiliser le produit. L'exponentielle y est partout définie et simplifie l'étude d'une grande variété de phénomènes ondulatoires. Ces algèbres permettent aussi d'utiliser l'inverse, lorsque celui-ci existe. Des règles mathématiques incontestables remplacent donc les produits tensoriels d'espaces hermitiens mal définis et les opérateurs agissant sur des espaces également non définis.

8.2 Ce travail

Deux sortes de particules, les fermions et les bosons, sont utilisés dans le modèle standard. Chaque type de fermion est un objet quantique avec une onde suivant l'équation de Dirac. Ceci est le point de départ de notre travail. Suivant l'idée originelle de de Broglie d'une onde physique liée au mouvement de toute particule, nous avons introduit un changement dans l'équation d'onde qui ne concerne que le terme de masse. Cette équation d'onde est non linéaire, homogène et admet l'équation de Dirac comme approximation linéaire.

Premier résultat intéressant, le bon signe de la masse-énergie vient directement de l'équation d'onde et de la conjugaison de charge, qui change le signe des termes différentiels de l'équation d'onde. La forme de cette conjugaison de charge a été d'abord obtenue par le modèle standard lui-même, qui utilise, pour l'équation de Dirac, le cadre ancien des matrices de Dirac.

Le second résultat fut très difficile à obtenir, parce que la résolution de

l'équation de Dirac est très précise dans le cas des états liés de l'atome d'hydrogène, et tout changement dans un des termes de cette équation d'onde pourrait impliquer un désastre. Mais, pour chaque état lié, une solution de l'équation linéaire existe telle que l'angle d'Yvon-Takabayasi β est partout défini et petit. Ce résultat est très précis et très surprenant. Il signifie que les états physiques liés sont les rares solutions de l'équation non linéaire homogène (voir l'appendice C). On peut alors comprendre pourquoi il existe des états liés privilégiés et pourquoi un électron dans un atome d'hydrogène est toujours dans un de ces états, et jamais dans une combinaison linéaire de ces états.

Un second cadre pour l'onde de Dirac fut introduit par D. Hestenes, l'algèbre de Clifford de l'espace-temps, qui est le second point de départ de notre travail. Une comparaison entre l'ancien et le nouveau cadre est aisée si l'on se sert des matrices de Dirac comme d'une représentation matricielle des vecteurs d'espace-temps. Nous avons détaillé aux chapitres 1 et 2 comment l'invariance relativiste est obtenue pour les ondes des fermions. Ces ondes apparaissent très différentes, elles ne sont pas des vecteurs ou des tenseurs d'espace-temps, mais une différente sorte d'objets, des spineurs.

Cette forme spinorielle de l'onde des fermions est incluse dans le modèle standard, c'est l'un de ses principaux préceptes. Ce que nous avons fait ici est seulement de prendre en compte complètement ce fait. L'invariance de forme de l'équation de Dirac nécessite l'utilisation du groupe $SL(2, \mathbb{C})$ qui est un sous-ensemble de l'algèbre de Clifford de l'espace physique, Cl_3 . Nous avons appris à raconter la totalité de la théorie de Dirac dans ce cadre. Cette algèbre est isomorphe à l'algèbre matricielle $M_2(\mathbb{C})$ des matrices complexes 2×2 . Cette algèbre permet de voir le groupe multiplicatif $GL(2, \mathbb{C}) = Cl_3^*$ comme le vrai groupe d'invariance de forme de la théorie de Dirac.

Puis nous avons expliqué d'une manière simple comment cette invariance de forme, qui est un renforcement de l'invariance relativiste, régit non seulement l'équation d'onde de Dirac, mais tout l'électromagnétisme (chapitre 4). Ceci est bien caché dans le cas de l'électromagnétisme lui-même, parce que seule la partie $SL(2, \mathbb{C})$ du groupe Cl_3^* agit sur ce champ de boson (et c'est vrai pour tout autre champ de bosons). Le champ électromagnétique a des propriétés résultant de cette construction antisymétrique à partir d'une paire de spineurs. C'est un pur bivecteur, somme $\vec{E} + i\vec{H}$ du vecteur $\vec{E}$ et du pseudo-vecteur $i\vec{H}$, sans terme scalaire ni pseudo-scalaire. Il tourne sous une rotation de Lorentz mais il est insensible au rapport r de la dilatation ni à l'angle chirale. Ce comportement est imposé par la forme de son invariance sous Cl_3^* .

Plus généralement les champs de bosons peuvent être obtenus par produit antisymétrique d'un nombre pair de fermions. Leur onde est donc une onde physique, une fonction du temps et de l'espace à valeur dans la sous-algèbre paire de l'algèbre de Clifford de l'espace-temps usuel à 4 dimensions, ou dans l'espace-temps complet à 6 dimensions. Une telle construction n'était pas possible avec le formalisme ancien des matrices de Dirac, parce que l'onde avait ses valeurs dans un espace vectoriel qui n'était pas une algèbre. Le cadre des algèbres de Clifford permet d'utiliser une multiplication interne et l'inverse pour

construire les ondes de systèmes de particules. Ceci a d'intéressantes conséquences physiques : toutes les ondes sont de vraies fonctions de l'espace-temps dans des ensembles bien définis. Ces espaces de fonction sont les espaces de Hilbert dont l'existence est supposée dans le modèle standard. Les algèbres de Clifford ont des représentations matricielles et leurs éléments peuvent toujours être considérés comme des opérateurs agissant dans l'algèbre. L'usage des opérateurs de création et d'annihilation est une conséquence du fait que les produits d'un nombre pair d'éléments appartiennent au même espace vectoriel, la sous-algèbre paire.

L'invariance de forme de l'électromagnétisme utilise un groupe qui rend pleinement compte de deux principaux aspects des résultats physiques modernes : la conservation de l'orientation du temps, la conservation de l'orientation de l'espace. Ces deux orientations ne sont pas une conséquence du groupe d'invariance. L'invariance de forme est seulement compatible avec ces orientations qui se conservent, ce qui est une vraie découverte expérimentale de la seconde moitié du vingtième siècle. L'espace orienté est pleinement compatible avec un groupe de jauge qui agit différemment sur les ondes droites et gauches. La conservation d'un temps orienté est compatible avec les lois de la thermodynamique.

Cette invariance de forme étendue permet une meilleure compréhension de questions anciennes comme : pourquoi existe-t-il une constante de Planck ? Qu'est-ce qu'une masse ou une charge, quelle est la différence entre une charge et une masse ? Les charges apparaissent dans des termes nécessaires pour lier un vecteur contravariant comme A à un vecteur covariant comme qA ou pour relier un terme $\nabla \hat{A}_j$ à un terme $q(A_k \hat{A}_l - A_l \hat{A}_k)$ d'un groupe de jauge de Yang-Mills. L'invariance sous Cl_3^* impose $q = r^2 q'$. La masse apparaît comme un facteur nécessaire pour relier un terme différentiel à un terme sans dérivation dans l'équation d'onde invariante. L'invariance sous Cl_3^* impose $m = r m'$. Par conséquent une charge n'est pas une masse, une masse n'est pas une charge, elles ont un comportement différent sous Cl_3^* . Ces nouveaux aspects de concepts anciens viennent des contraintes supplémentaires ajoutées par une invariance sous un plus grand groupe. Elles sont pleinement compatibles avec la mécanique et l'électromagnétisme classique et relativiste.

Tout dans ce qui précède est compatible avec le modèle standard, particulièrement avec le théorème CPT qui est maintenant automatiquement vérifié. Néanmoins plusieurs habitudes doivent être abandonnées. Par exemple le facteur de Planck liant la masse propre à la fréquence est variable si on considère le groupe d'invariance en totalité. Ceci est complètement caché si ce facteur de Planck est changé en un nombre fixe. Les tenseurs construits à partir des ondes de Dirac avec les matrices de Dirac n'ont pas un comportement permettant l'invariance sous le groupe complet. Ceci implique l'utilisation des algèbres de Clifford, seuls cadres où l'invariance du groupe entier agit. Une autre mauvaise habitude à abandonner est celle qui monte et qui descend à volonté les indices de tenseurs, parce que les vecteurs covariants et les vecteurs contravariants ne varient pas de la même manière sous le groupe entier.

Si vous payez le prix précédent pour prendre en compte la pleine invariance de forme vous serez en situation d'obtenir de nombreuses récompenses. La première est la possibilité de réécrire la théorie électro-faible d'une manière beaucoup plus simple, avec une onde qui est une fonction de l'espace-temps dans une algèbre de Clifford, d'abord de l'espace-temps usuel si vous rendez compte seulement du cas électron-neutrino, et ensuite d'un espace-temps à 6 dimensions pour rendre compte de tous les fermions d'une génération. Dans le second cas le groupe de jauge est exactement le groupe $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$ du modèle standard, la partie leptonique de l'onde complète ne voyant que la partie $U(1) \times SU(2)$ du groupe de jauge. donc l'électron et le neutrino sont automatiquement incapables de voir les interactions fortes et l'onde droite du neutrino n'interagit pas du tout. En outre ces invariances de jauge sont compatibles avec une équation d'onde invariante de forme et comportant un terme de masse. Elles s'appliquent aussi aux monopôles magnétiques leptoniques.

Un plus grand groupe de jauge n'est pas disponible, ceci rend compte du fait qu'aucun moyen n'existe de transformer un quark en lepton. Donc ceci justifie la construction empirique, dans le modèle standard, de nombres quantiques conservatifs comme le nombre baryonique. Une autre récompense est la compréhension à la fois de l'existence de trois générations exactement de fermions, complètement semblables et ayant néanmoins un comportement séparé dans l'invariance de jauge, et de quatre sortes de neutrinos (voir 6.4.1).

La généralisation à l'onde complète de la dilatation, transformation géométrique liée à l'onde de l'électron, est possible si seulement deux dimensions supplémentaires d'espace sont ajoutées aux trois dimensions usuelles de l'espace physique¹. La récompense à cette nouvelle contrainte sur la théorie est que cette construction inclut toutes les parties du modèle standard dans un cadre fermé. De plus l'espace-temps usuel est une partie bien bornée de l'espace-temps complet, limitée par le fait que l'espace-temps usuel est réel dans un espace-temps complet qui a une structure naturelle d'espace complexe (voir 6.5). Une seconde récompense est l'unique dimension de temps dans l'espace-temps complet, ce temps est donc notre temps usuel orienté, du passé vers le futur. Une autre récompense est une transformation géométrique plus générale entre l'espace-temps intrinsèque et l'espace-temps usuel, dès que le neutrino ou les quarks sont pris en considération. L'étude de l'onde de tous les fermions de la première génération introduit, en chaque point de l'espace-temps, deux algèbres de Clifford et une transformation de la variété intrinsèque dans la variété relative. Alors l'outil mathématique qui y correspond comprend deux espaces fibrés dont la fibre est $Cl_{5,1}$.

1. On a utilisé en [18] deux algèbres de Clifford plus grandes, $Cl_{2,3}$ et $Cl_{3,4}$ qui n'autorisent pas la relation (6.211) entre le renversé dans l'algèbre d'espace-temps et le renversé dans l'algèbre complète. La relation (6.211) implique d'utiliser seulement $Cl_{5,1}$, ou $Cl_{1,5}$ mais ce sont deux algèbres isomorphes.

8.3 Principe de minimum

La physique moderne utilise partout un principe de minimum. Ceci a été aperçu d'abord par Fermat. Il comprit que la lumière va d'un point à un autre d'une manière telle que la durée du parcours entre deux points est minimale. Cela a été vu ensuite dans la mécanique de Maupertuis, où le mouvement de tout objet se fait d'une manière telle qu'une quantité appelée action est minimale. Ces deux principes de minimum furent unifiés par de Broglie et sa découverte de l'onde liée au mouvement de toute particule matérielle. Ainsi l'équation d'onde de Dirac de l'électron et de tout autre fermion peut aussi s'obtenir à partir d'un principe de minimum. Mais pourquoi ?

L'algèbre de Clifford et le groupe d'invariance de forme donnent une réponse étrange. La bonne forme de l'équation d'onde d'un unique fermion est la forme invariante de l'équation d'onde. Et la partie scalaire de cette équation d'onde est exactement l'équation du lagrangien. Cette densité lagrangienne n'est pas vraiment minimale. En fait elle est exactement nulle, parce que l'équation d'onde est homogène. La seconde partie de la réponse est le fait que l'on peut obtenir les sept autres équations en utilisant le calcul des variations. Ceci n'est probablement pas très bien fait, parce qu'on fait la supposition que la variation infinitésimale de l'onde est nulle sur une frontière du domaine d'intégration. Il est facile de valider cette supposition dans le cas d'un état lié, mais personne n'a prouvé que c'est toujours possible pour une onde qui se propage. Comme le vrai lien entre la densité lagrangienne et l'équation d'onde n'est pas celui que nous pensions, une erreur ici n'est pas très importante. La conséquence la plus importante est que l'onde est plus générale que le principe de minimum : il est aisé d'étudier des équations d'onde qui ne peuvent pas être obtenues à partir d'une densité lagrangienne (voir 5.3).

Une autre partie de cette étrange réponse est la non-égalité entre la vitesse de la lumière comme vitesse limite de toute onde de Dirac et la vitesse limite d'autres ondes. Nous avons obtenu une vitesse limite différente de la vitesse de la lumière dans le cadre d'une équation d'onde ne provenant pas d'une densité lagrangienne (voir 5.3.1).

8.4 Théorie et expérience

Le monde des particules avec des charges magnétiques est différent et nous sommes, dans la connaissance de ce nouveau monde, probablement pas plus avancé que Christophe Colomb à l'issue de son premier voyage. Nous savons qu'ils existent, et c'est déjà quelque chose.

Les deux parties de ce livre, la partie théorique formée par les six premiers chapitres et toute la fin, et la partie expérimentale dans un modeste chapitre, semblent dans le même temps déconnectées et disproportionnées. On peut s'attendre à ce que plus d'expérimentation apportera plus de nouvelles propriétés du monde magnétique.

Ces deux parties semblent cependant doublement liées. Tout d'abord les probabilités, essentielles en théorie quantique, semblent absentes ici. Dans nos poudres, le hasard ne semble pas jouer un très grand rôle. Quand le titane est transformé en quelque endroit, tout ce qui peut être transformé est changé. Le hasard est peut être ce qui fait que les résultats sont variables, mais obtenir du cuivre au lieu de fer, du chrome au lieu de manganèse, peut aussi venir de différences en températures, pression, durée de la décharge et ainsi de suite. Jusqu'ici nous ne savons rien à ce sujet.

Second lien entre les deux parties, l'espace-temps est différent de ce que nous pensions qu'il était. Dans la partie théorique nous avons expliqué comment une seconde variété d'espace-temps apparaît, anisotrope, et comment l'onde spinorielle établit un lien entre les deux variétés. Ce raccord entre les deux variétés peut être étendu à l'espace-temps complet qui permet d'inclure interactions électro-faibles et interactions fortes. L'espace-temps usuel n'est pas l'entité fondamentale, c'est seulement une partie, bien délimitée, d'un espace-temps complet dans lequel les nombres complexes apparaissent naturellement. La transformation géométrique liée à l'onde contient une somme de dilatations directes et inverses. C'est donc assez différent des simples rotations de Lorentz. Les transformations géométriques sont seulement induites par les éléments d'un groupe venant de l'algèbre d'espace. Elles apparaissent des objets secondaires, l'objet fondamental étant l'onde.

Dans la partie expérimentale aussi l'espace semble très différent de ce que nous pensions, puisque des noyaux d'atomes que nous pensions séparés par des distances gigantesques en comparaison de leur propre taille, semblent capables de mettre ensemble leurs nucléons et de les ré-allouer comme si la distance entre eux avait été abolie.

8.5 Applications futures

Ce que seront les applications des monopôles magnétiques est une question prématurée, et ce que nous sommes capables d'expliquer aujourd'hui aura probablement peu à voir avec les applications très pratiques qui sortiront des laboratoires dans le futur.

Urutskoev qui est un physicien nucléaire pense à de nouveaux réacteurs, intrinsèquement sûrs, pilotés à l'aide de champs magnétiques très intenses. Une autre possibilité bien excitante est que le magnétisme soit lié à la gravitation. Il y a des indices théoriques dans ce sens, car G. Lochak [42] a expliqué que c'est le photon magnétique qui est lié au graviton dans la théorie de fusion de Louis de Broglie.

Une troisième possibilité de conséquences pratiques concerne la géologie. Le monopôle magnétique de Lochak est une sorte de neutrino excité. Le Soleil peut produire des monopôles magnétiques qui arriveront sur notre Terre, principalement aux pôles magnétiques. Ceci a été expérimentalement vérifié [1]. Ces monopôles sont susceptibles d'induire les mêmes transformations que

nous voyons au laboratoire, en particulier de produire de l'hydrogène. Ceci peut changer les conditions de la fossilisation et la formation des couches de dépôts. Le futur de la dynamo créant le champ magnétique de la Terre peut aussi être concerné si la durée de vie des monopôles est suffisante.

Bien entendu si des monopôles magnétiques sont produits dans le cœur du Soleil, ils sont capables de produire des effets sur les champs magnétiques. L'étude des monopôles magnétiques est peut-être la meilleure piste pour progresser dans la compréhension de notre Soleil.

Il est plus facile, cela demande moins d'imagination, de prospecter les applications théoriques. Quand Lorentz étudia la particule électron il utilisa un modèle classique d'électron non ponctuel, avec une masse-énergie résultant de l'énergie du champ électrique créé par la charge de l'électron. Si l'électron était ponctuel cette énergie serait infinie, ce qui n'est pas possible. Si l'électron est étendu, les forces venant de la distribution des charges sont répulsives, donc elles doivent être compensées par des forces d'attraction. Ces forces ne peuvent être que des forces faibles puisque l'électron ne connaît que les forces électro-faibles.

On peut aussi se faire une bonne idée de ce que ne permettra pas la double variété d'espace-temps. L'existence d'une seconde variété d'espace-temps ne change rien aux propriétés de la première variété, celle dans laquelle nous nous déplaçons et observons notre univers. Nous ne devons donc pas rêver à des choses que nous savons interdites par les lois physiques, comme de dépasser la vitesse de la lumière. Accélérer jusqu'à cette vitesse reste impossible parce que la masse tend vers l'infini, même si cette vitesse limite n'est pas exactement égale à la vitesse de la lumière dans le vide. Une autre restriction qui n'a aucune chance de changer est celle qui est liée à la flèche du temps. Tout voyage en arrière vers le passé reste interdit puisque le groupe d'invariance conserve l'orientation du temps.

8.6 Un modèle standard conforté

Les différentes parties du travail que nous présentons ici sont fortement interagissantes et se renforcent les unes les autres. Le groupe Cl_3^* est plus facile à voir à partir de la forme invariante (3.10) de l'équation d'onde. Le comportement du terme de masse utilisé dans le chapitre 4 est une raison suffisante de préférer l'équation non linéaire homogène à son approximation linéaire, l'équation de Dirac. On obtient aussi le groupe de jauge électro-faible d'une manière beaucoup plus simple. Il a été facile d'étendre ce modèle du secteur leptonique au secteur des quarks. On peut non seulement expliquer simplement pourquoi il y a trois générations complètement semblables (et quatre neutrinos²), mais aussi pourquoi les différentes générations doivent être traitées séparément dans l'invariance de jauge. Nous pouvons justifier pourquoi le groupe de jauge com-

2. Le quatrième neutrino n'est pas capable d'interagir par interactions électro-faibles ni par les interactions fortes, il est donc une partie de la **matière noire**.

plet est le groupe $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$ obtenu à partir des données expérimentales et pourquoi le groupe de jauge $SU(3)$ n'agit pas sur la partie leptonique de l'onde complète, ce qui était précédemment postulé. Donc non seulement l'électron, le neutrino et les autres leptons des deux autres générations sont insensibles aux interactions fortes, mais aussi les monopôles magnétiques qui ont une onde similaire. Le lien entre l'onde et la géométrie d'espace-temps est renforcé par le fait qu'il survit à l'extension de l'onde à tous les fermions d'une génération, qui nécessite l'usage de deux dimensions supplémentaires d'espace.

Un groupe d'invariance plus grand implique de nouvelles contraintes fortes. Ces nouvelles contraintes induisent une meilleure compréhension de concepts anciens et indiquent la seule voie possible pour aller plus loin. Par exemple la relation $\phi' = M\phi$ n'est pas nouvelle, elle a été utilisée sous une forme équivalente depuis l'équation d'onde de Pauli dans les années vingt. Mais elle nous indique que la relation entre l'onde ϕ et les spineurs de Weyl ξ et η est invariante, que les parties droites et gauches de l'onde sont invariantes, que M et ϕ sont similaires. Quand on sait cela il devient évident que l'onde d'une paire

électron-neutrino ne peut que s'écrire $\Psi_l = \begin{pmatrix} \phi_e & \phi_n \\ \widehat{\phi}_n & \widehat{\phi}_e \end{pmatrix}$, et cette égalité donne

alors la forme des projecteurs P_μ . Ensuite ces projecteurs ont naturellement la structure $U(1) \times SU(2)$ du groupe de jauge électro-faible. Il est aisé d'obtenir la charge des quarks u et d simplement en changeant P_0 en P'_0 , c'est-à-dire en changeant seulement un coefficient de 1 à $-1/3$. Les contraintes venant du groupe d'invariance impliquent aussi que l'on n'a qu'une manière simple d'obtenir une onde avec tous les fermions d'une génération, qui est $\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_l & \Psi_r \\ \Psi_g & \Psi_b \end{pmatrix}$.

Mais après cela si vous voulez avoir encore le même lien que précédemment entre l'onde et la géométrie de l'espace-temps il est nécessaire de disposer de (6.211). Ceci en fait exige d'utiliser le lien (2.125), bien connu dans le modèle standard, qui existe entre l'onde de la particule et l'onde de l'antiparticule. Ce lien restreint la valeur de l'onde de $Cl_{2,3} = M_4(\mathbb{C})$ à la sous-algèbre $Cl_{1,3}$ et de $Cl_{2,5} = M_8(\mathbb{C})$ à sa sous-algèbre $Cl_{1,5}$. Il se trouve que cette algèbre de Clifford est isomorphe à $Cl_{5,1}$ et cet isomorphisme est à la fois la raison pour laquelle les sous-algèbres non isomorphes $Cl_{1,3}$ et $Cl_{3,1}$ sont également utilisables, et une raison d'être plus confiant dans le modèle standard et dans ses préceptes issus d'une longue construction à partir de nombreuses expériences. Une raison supplémentaire d'être confiant à la fois dans le modèle standard et dans l'utilisation de l'algèbre de Clifford est l'existence de l'inverse mathématique, nécessaire pour construire les ondes de systèmes de particules, ce qui devrait permettre de construire l'onde d'un proton ou d'un neutron à partir des quarks qui les constituent.

Les questions posées par la théorie quantique naissante sont aujourd'hui presque complètement oubliées. Pourquoi il existe une constante de Planck et pourquoi il faut des nombres complexes sont deux d'entre elles. Comme personne n'avait une réponse claire et simple, ces questions furent "mises sous le tapis". L'existence du facteur de Planck, qui lie la masse propre et la fréquence de

l'onde, est directement liée aux contraintes supplémentaires du groupe d'invariance. L'usage des nombres complexes est aussi explicable simplement, d'abord par l'isomorphisme entre Cl_3 et l'algèbre engendrée par les matrices de Pauli, ensuite par la représentation matricielle de $Cl_{1,3}$, enfin par la représentation matricielle de $Cl_{5,1}$. Cette algèbre est isomorphe à une sous-algèbre de l'algèbre $M_8(\mathbb{C})$ des matrices 8×8 sur le corps des complexes. L'onde complète est donc une fonction de l'espace-temps à valeur dans $Cl_{5,1}$, ceci justifie la plus grande partie de l'appareil mathématique du modèle standard. Et pour la physique, ceci permet de construire les champs de boson par produits antisymétriques de fermions en nombres pairs.

Les nouvelles contraintes utilisées ici expliquent aussi pourquoi des essais anciens n'ont pas abouti. On peut penser aux nombreux essais faits dans les années trente pour unifier la mécanique et l'électromagnétisme. Une telle unification est limitée par le fait qu'une charge n'est pas une masse quand on utilise la totalité du groupe d'invariance. Une autre tentative pour unifier les différentes parties du groupe de jauge $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$ comme des sous-groupes de $SU(5)$ ou $SO(10)$ n'a pas eu plus de succès, prédisant une possible désintégration du proton qui n'a pas été observée expérimentalement. La structure du groupe de jauge vient de la structure de l'onde complète elle-même, et elle ne change pas quand on augmente l'énergie. La structure de l'onde est donc pleinement compatible avec des protons sans désintégration, et plus généralement avec tous les aspects connus de la physique contemporaine.

Le modèle standard restera d'autant plus incontournable que les équations d'onde avec terme de masse sont compatibles à la fois avec l'invariance de forme et avec l'invariance de jauge. Il n'y a donc pas de particules supplémentaires à attendre, à la seule exception des monopôles magnétiques leptoniques que nous avons commencé à observer.

Annexe A

Calculs en algèbre de Clifford

A.1 Equation invariante et lagrangien

Soit M une matrice inversible, élément de Cl_3^* , de déterminant $re^{i\theta}$. Soit R et $\bar{R}$ les dilatations de Lorentz telles que :

$$R : x \mapsto x' = R(x) = MxM^\dagger ; \quad \bar{R} : x \mapsto x' = \bar{R}(x) = \overline{Mx\widehat{M}}. \quad (\text{A.1})$$

Soit P la matrice telle que :

$$M = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}P \quad (\text{A.2})$$

et soit L et $\bar{L}$ les dilatations telles que :

$$L : x \mapsto x' = L(x) = PxP^\dagger ; \quad \bar{L} : x \mapsto x' = \bar{L}(x) = \overline{Px\widehat{P}}. \quad (\text{A.3})$$

On a :

$$re^{i\theta} = \det(M) = M\bar{M} = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}P\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}\bar{P} = re^{i\theta}P\bar{P} \quad (\text{A.4})$$

on obtient alors

$$P\bar{P} = 1 ; \quad \bar{P} = P^{-1} ; \quad \bar{L} = L^{-1} \quad (\text{A.5})$$

P est donc un élément de $SL(2, \mathbb{C})$ et L est une rotation de Lorentz. On sait que pour une telle rotation, notant (L) la matrice de L dans une base orthonormale et g la matrice-signature :

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.6})$$

nous avons, M^t étant la matrice transposée¹ de M :

$$(L)^{-1} = g(L)^t g ; \quad (\bar{L})g = g(L)^t. \quad (\text{A.7})$$

Mais on a aussi :

$$R(x) = MxM^\dagger = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}Px\sqrt{r}e^{-i\frac{\theta}{2}}P^\dagger = rPxP^\dagger = rL(x) \quad (\text{A.8})$$

par conséquent

$$R = rL ; \quad (R) = r(L). \quad (\text{A.9})$$

On a aussi :

$$\bar{R}(x) = \bar{M}x\widehat{M} = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}\bar{P}x\sqrt{r}e^{-i\frac{\theta}{2}}\widehat{P} = r\bar{P}x\widehat{P} = r\bar{L}(x) \quad (\text{A.10})$$

$$\bar{R} = r\bar{L} ; \quad (\bar{R}) = r(\bar{L}). \quad (\text{A.11})$$

Multipliant (A.7) par r on obtient :

$$(\bar{R})g = g(R)^t ; \quad (\bar{R}) = g(R)^t g. \quad (\text{A.12})$$

qui donne pour $j = 1, 2, 3$ et $k = 1, 2, 3$:

$$\bar{R}_0^0 = R_0^0 ; \quad \bar{R}_0^j = -R_j^0 ; \quad \bar{R}_j^0 = -R_0^j ; \quad \bar{R}_j^k = R_k^j \quad (\text{A.13})$$

Donc les lignes et les colonnes de la matrice R_μ^ν sont orthogonales, comme nous avons, pour R et $\bar{R}$, avec :

$$R_\mu = M\sigma_\mu M^\dagger = R_\mu^\nu \sigma_\nu ; \quad \bar{R}_\mu = \bar{M}\sigma_\mu \widehat{M} = \bar{R}_\mu^\nu \sigma_\nu \quad (\text{A.14})$$

$$R_\mu \cdot R_\nu = \bar{R}_\mu \cdot \bar{R}_\nu = \delta_{\mu\nu} \rho^2 \quad (\text{A.15})$$

où $\delta_{00} = 1$, $\delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = -1$, $\delta_{\mu\nu} = 0$ si $\mu \neq \nu$. Nous avons

$$\begin{aligned} \bar{\phi}A\widehat{\phi} &= A^\mu \bar{\phi}\sigma_\mu \widehat{\phi} = A_0 \bar{D}_0 - \sum_{j=1}^{j=3} A_j \bar{D}_j \\ &= A_0 (\bar{D}_0^\mu \sigma_\mu) - \sum_{j=1}^{j=3} A_j (\bar{D}_j^\mu \sigma_\mu) \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

1. La transposition échange les lignes et les colonnes des matrices : si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ alors $M^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. On a, pour toute matrice A et B , $(AB)^t = B^t A^t$ et $\det(A^t) = \det(A)$

Mais le lien entre les D_μ et les $\overline{D}_\mu$ est le même qu'entre les R_μ et les $\overline{R}_\mu$ et l'on obtient avec (A.13) pour $j = 1, 2, 3$ et $k = 1, 2, 3$:

$$\overline{D}_0^0 = D_0^0 ; \quad \overline{D}_0^j = -D_j^0 ; \quad \overline{D}_j^0 = -D_0^j ; \quad \overline{D}_j^k = D_k^j \quad (\text{A.17})$$

qui donne

$$\begin{aligned} \overline{\phi} A \widehat{\phi} &= A_0(\overline{D}_0^0 + \sum_{j=1}^{j=3} \overline{D}_0^j \sigma_j) - \sum_{j=1}^{j=3} A_j(\overline{D}_j^0 + \sum_{k=1}^{k=3} \overline{D}_j^k \sigma_k) \\ &= A_0(D_0^0 - \sum_{j=1}^{j=3} D_j^0 \sigma_j) - \sum_{j=1}^{j=3} A_j(-D_0^j + \sum_{k=1}^{k=3} D_k^j \sigma_k) \\ &= A_\nu D_\mu^\nu \sigma^\mu \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

La partie scalaire est alors

$$\langle \overline{\phi} A \widehat{\phi} \rangle = D_0^\nu A_\nu = A_\mu J^\mu \quad (\text{A.19})$$

Le terme correspondant avec les matrices de Dirac est

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}[(\overline{\psi} \gamma^\mu q A_\mu) \psi + (\overline{\psi} \gamma^\mu q A_\mu \psi)^\dagger] \\ &= \frac{q}{2} A_\mu [\overline{\psi} \gamma^\mu \psi + (\overline{\psi} \gamma^\mu \psi)] = q A_\mu \overline{\psi} \gamma^\mu \psi \\ &= q A_\mu J^\mu. \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

On obtient ensuite

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}[(\overline{\psi} \gamma^\mu (-i) \partial_\mu \psi) + (\overline{\psi} \gamma^\mu (-i) \partial_\mu \psi)^\dagger] \\ &= \frac{i}{2}(-\overline{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi + \partial_\mu \overline{\psi} \gamma^\mu \psi) \\ &= \frac{i}{2}[-\xi^\dagger \partial_0 \xi - \eta^\dagger \partial_0 \eta + (\partial_0 \xi^\dagger) \xi + (\partial_0 \eta^\dagger) \eta] \\ &+ \frac{i}{2} \sum_{j=1}^{j=3} [-\xi^\dagger \sigma_j \partial_j \xi + \eta^\dagger \sigma_j \partial_j \eta + (\partial_j \xi^\dagger) \sigma_j \xi - (\partial_j \eta^\dagger) \sigma_j \eta] \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

qui donne

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}[(\overline{\psi} \gamma^\mu (-i) \partial_\mu \psi) + (\overline{\psi} \gamma^\mu (-i) \partial_\mu \psi)^\dagger] \\ &= \frac{i}{2}(\xi_1 \partial_0 \xi_1^* + \xi_2 \partial_0 \xi_2^* + \eta_1 \partial_0 \eta_1^* + \eta_2 \partial_0 \eta_2^* - \xi_1^* \partial_0 \xi_1 - \xi_2^* \partial_0 \xi_2 - \eta_1^* \partial_0 \eta_1 - \eta_2^* \partial_0 \eta_2) \\ &+ \frac{i}{2}(\xi_1 \partial_1 \xi_2^* + \xi_2 \partial_1 \xi_1^* - \eta_1 \partial_1 \eta_2^* - \eta_2 \partial_1 \eta_1^* - \xi_1^* \partial_1 \xi_2 - \xi_2^* \partial_1 \xi_1 + \eta_1^* \partial_1 \eta_2 + \eta_2^* \partial_1 \eta_1) \\ &+ \frac{1}{2}(-\xi_1 \partial_2 \xi_2^* + \xi_2 \partial_2 \xi_1^* + \eta_1 \partial_2 \eta_2^* - \eta_2 \partial_2 \eta_1^* - \xi_1^* \partial_2 \xi_2 + \xi_2^* \partial_2 \xi_1 + \eta_1^* \partial_2 \eta_2 - \eta_2^* \partial_2 \eta_1) \\ &+ \frac{i}{2}(\xi_1 \partial_3 \xi_1^* - \xi_2 \partial_3 \xi_2^* - \eta_1 \partial_3 \eta_1^* + \eta_2 \partial_3 \eta_2^* - \xi_1^* \partial_3 \xi_1 + \xi_2^* \partial_3 \xi_2 + \eta_1^* \partial_3 \eta_1 - \eta_2^* \partial_3 \eta_2). \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

Dans l'algèbre de Pauli nous avons

$$\begin{aligned} & \overline{\phi}(\nabla\widehat{\phi})\sigma_{21} \\ &= 2i \begin{pmatrix} \eta_1^* & \eta_2^* \\ -\xi_2 & \xi_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_0 - \partial_3 & -\partial_1 + i\partial_2 \\ -\partial_1 - i\partial_2 & \partial_0 + \partial_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\eta_1 & -\xi_2^* \\ -\eta_2 & \xi_1^* \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

et avec (2.91) on a

$$\begin{aligned} & \overline{\phi}(\nabla\widehat{\phi})\sigma_{21} = \begin{pmatrix} w^3 + w^0 - iv^3 - iv^0 & v^2 + iv^1 + iw^2 - w^1 \\ v^2 - iv^1 + iw^2 + w^1 & w^3 - w^0 - iv^3 + iv^0 \end{pmatrix} = \\ & 2i \begin{pmatrix} \eta_1^*(-\partial_0\eta_1 + \partial_1\eta_2 - i\partial_2\eta_2 + \partial_3\eta_1) & \eta_1^*(-\partial_0\xi_2^* - \partial_1\xi_1^* + i\partial_2\xi_1^* + \partial_3\xi_2^*) \\ +\eta_2^*(-\partial_0\eta_2 + \partial_1\eta_1 + i\partial_2\eta_1 - \partial_3\eta_2) & +\eta_2^*(\partial_0\xi_1^* + \partial_1\xi_2^* + i\partial_2\xi_2^* + \partial_3\xi_1^*) \\ -\xi_2(-\partial_0\eta_1 + \partial_1\eta_2 - i\partial_2\eta_2 + \partial_3\eta_1) & -\xi_2(-\partial_0\xi_2^* - \partial_1\xi_1^* + i\partial_2\xi_1^* + \partial_3\xi_2^*) \\ +\xi_1(-\partial_0\eta_2 + \partial_1\eta_1 + i\partial_2\eta_1 - \partial_3\eta_2) & +\xi_1(\partial_0\xi_1^* + \partial_1\xi_2^* + i\partial_2\xi_2^* + \partial_3\xi_1^*) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

Ceci donne

$$w^3 + w^0 - iv^3 - iv^0 = \quad (\text{A.25})$$

$$2i(-\eta_1^*\partial_0\eta_1 - \eta_2^*\partial_0\eta_2 + \eta_1^*\partial_1\eta_2 + \eta_2^*\partial_1\eta_1 - i\eta_1^*\partial_2\eta_2 + i\eta_2^*\partial_2\eta_1 + \eta_1^*\partial_3\eta_1 - \eta_2^*\partial_3\eta_2)$$

$$w^3 - w^0 - iv^3 + iv^0 = \quad (\text{A.26})$$

$$2i(\xi_2\partial_0\xi_2^* + \xi_1\partial_0\xi_1^* + \xi_2\partial_1\xi_1^* + \xi_1\partial_1\xi_2^* - i\xi_2\partial_2\xi_1^* + i\xi_1\partial_2\xi_2^* - \xi_2\partial_3\xi_2^* + \xi_1\partial_3\xi_1^*)$$

$$v^2 - iv^1 + iw^2 + w^1 = \quad (\text{A.27})$$

$$2i(\xi_2\partial_0\eta_1 - \xi_1\partial_0\eta_2 - \xi_2\partial_1\eta_2 + \xi_1\partial_1\eta_1 + i\xi_2\partial_2\eta_2 + i\xi_1\partial_2\eta_1 - \xi_2\partial_3\eta_1 - \xi_1^*\partial_3\eta_2)$$

$$v^2 + iv^1 + iw^2 - w^1 = \quad (\text{A.28})$$

$$2i(-\eta_1^*\partial_0\xi_2^* - \eta_2^*\partial_0\xi_1^* - \eta_1^*\partial_1\xi_1^* + \eta_2^*\partial_1\xi_2^* + i\eta_1^*\partial_2\xi_1^* + i\eta_2^*\partial_2\xi_2^* + \eta_1^*\partial_3\xi_2^* + \eta_2^*\partial_3\xi_1^*).$$

En ajoutant et retranchant (A.25) et (A.26) on obtient

$$\begin{aligned} w^3 - iv^3 &= -i\eta_1^*\partial_0\eta_1 - i\eta_2^*\partial_0\eta_2 + i\xi_2\partial_0\xi_2^* + i\xi_1\partial_0\xi_1^* \\ &+ i\eta_1^*\partial_1\eta_2 + i\eta_2^*\partial_1\eta_1 + i\xi_2\partial_1\xi_1^* + i\xi_1\partial_1\xi_2^* \\ &+ \eta_1^*\partial_2\eta_2 - \eta_2^*\partial_2\eta_1 + \xi_2\partial_2\xi_1^* - \xi_1\partial_2\xi_2^* \\ &+ i\eta_1^*\partial_3\eta_1 - i\eta_2^*\partial_3\eta_2 - i\xi_2\partial_3\xi_2^* + i\xi_1\partial_3\xi_1^* \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

$$\begin{aligned} w^0 - iv^0 &= -i\eta_1^*\partial_0\eta_1 - i\eta_2^*\partial_0\eta_2 - i\xi_2\partial_0\xi_2^* - i\xi_1\partial_0\xi_1^* \\ &+ i\eta_1^*\partial_1\eta_2 + i\eta_2^*\partial_1\eta_1 - i\xi_2\partial_1\xi_1^* - i\xi_1\partial_1\xi_2^* \\ &+ \eta_1^*\partial_2\eta_2 - \eta_2^*\partial_2\eta_1 - \xi_2\partial_2\xi_1^* + \xi_1\partial_2\xi_2^* \\ &+ i\eta_1^*\partial_3\eta_1 - i\eta_2^*\partial_3\eta_2 + i\xi_2\partial_3\xi_2^* - i\xi_1\partial_3\xi_1^*. \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

Séparant la partie réelle et la partie imaginaire de (A.29) on obtient

$$\begin{aligned} \frac{2}{i}w^3 = & \quad (A.31) \\ & \xi_1\partial_0\xi_1^* + \xi_2\partial_0\xi_2^* + \eta_1\partial_0\eta_1^* + \eta_2\partial_0\eta_2^* - \xi_1^*\partial_0\xi_1 - \xi_2^*\partial_0\xi_2 - \eta_1^*\partial_0\eta_1 - \eta_2^*\partial_0\eta_2 \\ & + \xi_1\partial_1\xi_2^* + \xi_2\partial_1\xi_1^* - \eta_1\partial_1\eta_2^* - \eta_2\partial_1\eta_1^* - \xi_1^*\partial_1\xi_2 - \xi_2^*\partial_1\xi_1 + \eta_1^*\partial_1\eta_2 + \eta_2^*\partial_1\eta_1 \\ & - i(-\xi_1\partial_2\xi_2^* + \xi_2\partial_2\xi_1^* + \eta_1\partial_2\eta_2^* - \eta_2\partial_2\eta_1^* - \xi_1^*\partial_2\xi_2 + \xi_2^*\partial_2\xi_1 + \eta_1^*\partial_2\eta_2 - \eta_2^*\partial_2\eta_1) \\ & + \xi_1\partial_3\xi_1^* - \xi_2\partial_3\xi_2^* - \eta_1\partial_3\eta_1^* + \eta_2\partial_3\eta_2^* - \xi_1^*\partial_3\xi_1 + \xi_2^*\partial_3\xi_2 + \eta_1^*\partial_3\eta_1 - \eta_2^*\partial_3\eta_2 \end{aligned}$$

Ceci donne avec (A.22)

$$\frac{1}{2}[(\bar{\psi}\gamma^\mu(-i)\partial_\mu\psi) + (\bar{\psi}\gamma^\mu(-i)\partial_\mu\psi)^\dagger] = w^3 \quad (A.32)$$

et avec (A.20) nous obtenons (2.100). Le tenseur d'impulsion-énergie appelé tenseur de Tetrad qui résulte de l'invariance de la densité lagrangienne sous les translations vérifie

$$-T_\lambda^\mu = \frac{1}{2}[(\bar{\psi}\gamma^\mu(-i\partial_\lambda + qA_\lambda)\psi) + ((\bar{\psi}\gamma^\mu(-i\partial_\lambda + qA_\lambda)\psi)^\dagger)] \quad (A.33)$$

On obtient alors de (A.32)

$$\begin{aligned} w^3 &= -T_\mu^\mu - q\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi \\ w^3 &= -T_\mu^\mu - V^0 \\ w^3 + V^0 &= -\text{tr}(T) \end{aligned} \quad (A.34)$$

Maintenant la partie imaginaire de (A.29) donne

$$\begin{aligned} -2v^3 &= \partial_0(\xi_1\xi_1^* + \xi_2\xi_2^* - \eta_1\eta_1^* - \eta_2\eta_2^*) \\ &+ \partial_1(\xi_1\xi_2^* + \xi_2\xi_1^* + \eta_1\eta_2^* + \eta_2\eta_1^*) \\ &+ \partial_2i(\xi_1\xi_2^* - \xi_2\xi_1^* + \eta_1\eta_2^* - \eta_2\eta_1^*) \\ &+ \partial_3(\xi_1\xi_1^* - \xi_2\xi_2^* + \eta_1\eta_1^* - \eta_2\eta_2^*) \\ &= \partial_\mu D_3^\mu = \nabla \cdot D_3 \end{aligned} \quad (A.35)$$

Ensuite la partie imaginaire de (A.30) donne

$$\begin{aligned} 2v^0 &= \partial_0(\xi_1\xi_1^* + \xi_2\xi_2^* + \eta_1\eta_1^* + \eta_2\eta_2^*) \\ &+ \partial_1(\xi_1\xi_2^* + \xi_2\xi_1^* - \eta_1\eta_2^* - \eta_2\eta_1^*) \\ &+ \partial_2i(\xi_1\xi_2^* - \xi_2\xi_1^* - \eta_1\eta_2^* + \eta_2\eta_1^*) \\ &+ \partial_3(\xi_1\xi_1^* - \xi_2\xi_2^* - \eta_1\eta_1^* + \eta_2\eta_2^*) \\ &= \partial_\mu D_0^\mu = \nabla \cdot D_0 \end{aligned} \quad (A.36)$$

et nous obtenons la loi de conservation du courant de probabilité. De (A.18) nous obtenons

$$\begin{aligned} qA_\nu D_\mu^\nu \sigma^\mu &= \bar{\phi}qA\hat{\phi} = V = V^\mu \sigma_\mu \\ &= V^0 - V^1\sigma^1 - V^2\sigma^2 - V^3\sigma^3 \end{aligned} \quad (A.37)$$

$$V^j = -qA_\nu D_j^\nu = -qA \cdot D_j ; j = 1, 2, 3. \quad (A.38)$$

$$qA_\nu D_\mu^\nu \sigma^\mu = \bar{\phi}qA\hat{\phi} = V = V^\mu \sigma_\mu$$

$$= V^0 - V^1\sigma^1 - V^2\sigma^2 - V^3\sigma^3 \quad (A.39)$$

$$V^j = -qA_\nu D_j^\nu = -qA \cdot D_j ; j = 1, 2, 3. \quad (A.40)$$

La partie réelle de (A.30) donne avec (2.95)

$$\frac{2}{i}w^0 = 2iV^3 = \frac{2}{i}qA \cdot D_3 = \quad (\text{A.41})$$

$$\begin{aligned} & -\xi_1\partial_0\xi_1^* - \xi_2\partial_0\xi_2^* + \eta_1\partial_0\eta_1^* + \eta_2\partial_0\eta_2^* + \xi_1^*\partial_0\xi_1 + \xi_2^*\partial_0\xi_2 - \eta_1^*\partial_0\eta_1 - \eta_2^*\partial_0\eta_2 \\ & -\xi_1\partial_1\xi_2^* - \xi_2\partial_1\xi_1^* - \eta_1\partial_1\eta_2^* - \eta_2\partial_1\eta_1^* + \xi_1^*\partial_1\xi_2 + \xi_2^*\partial_1\xi_1 + \eta_1^*\partial_1\eta_2 + \eta_2^*\partial_1\eta_1 \\ & -i(\xi_1\partial_2\xi_2^* - \xi_2\partial_2\xi_1^* + \eta_1\partial_2\eta_2^* - \eta_2\partial_2\eta_1^* + \xi_1^*\partial_2\xi_2 - \xi_2^*\partial_2\xi_1 + \eta_1^*\partial_2\eta_2 - \eta_2^*\partial_2\eta_1) \\ & -\xi_1\partial_3\xi_1^* + \xi_2\partial_3\xi_2^* - \eta_1\partial_3\eta_1^* + \eta_2\partial_3\eta_2^* + \xi_1^*\partial_3\xi_1 - \xi_2^*\partial_3\xi_2 + \eta_1^*\partial_3\eta_1 - \eta_2^*\partial_3\eta_2 \end{aligned}$$

Puis en ajoutant et soustrayant (A.27) et (A.28) on obtient

$$\begin{aligned} v^2 + iw^2 = & i\xi_2\partial_0\eta_1 - i\xi_1\partial_0\eta_2 - i\eta_1^*\partial_0\xi_2^* + i\eta_2^*\partial_0\xi_1^* \\ & - i\xi_2\partial_1\eta_2 + i\xi_1\partial_1\eta_1 - i\eta_1^*\partial_1\xi_1^* + i\eta_2^*\partial_1\xi_2^* \\ & - \xi_2\partial_2\eta_2 - \xi_1\partial_2\eta_1 - \eta_1^*\partial_2\xi_1^* - \eta_2^*\partial_2\xi_2^* \\ & - i\xi_2\partial_3\eta_1 - i\xi_1\partial_3\eta_2 + i\eta_1^*\partial_3\xi_2^* + i\eta_2^*\partial_3\xi_1^* \end{aligned} \quad (\text{A.42})$$

$$\begin{aligned} w^1 - iw^1 = & i\xi_2\partial_0\eta_1 - i\xi_1\partial_0\eta_2 + i\eta_1^*\partial_0\xi_2^* - i\eta_2^*\partial_0\xi_1^* \\ & - i\xi_2\partial_1\eta_2 + i\xi_1\partial_1\eta_1 + i\eta_1^*\partial_1\xi_1^* - i\eta_2^*\partial_1\xi_2^* \\ & - \xi_2\partial_2\eta_2 - \xi_1\partial_2\eta_1 + \eta_1^*\partial_2\xi_1^* + \eta_2^*\partial_2\xi_2^* \\ & - i\xi_2\partial_3\eta_1 - i\xi_1\partial_3\eta_2 - i\eta_1^*\partial_3\xi_2^* - i\eta_2^*\partial_3\xi_1^*. \end{aligned} \quad (\text{A.43})$$

La partie réelle de (A.42) donne

$$2v^2 = \partial_0 i(-\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1 + \xi_1^*\eta_2^* - \xi_2^*\eta_1^*) \quad (\text{A.44})$$

$$\begin{aligned} & + \partial_1 i(\xi_1\eta_1 - \xi_2\eta_2 - \xi_1^*\eta_1^* + \xi_2^*\eta_2^*) \\ & + \partial_2(-\xi_1\eta_1 - \xi_2\eta_2 - \xi_1^*\eta_1^* - \xi_2^*\eta_2^*) \\ & + \partial_3 i(-\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1 + \xi_1^*\eta_2^* + \xi_2^*\eta_1^*) \\ & = -\partial_\mu D_2^\mu = -\nabla \cdot D_2 \end{aligned} \quad (\text{A.45})$$

ce qui donne, avec (2.93)

$$\nabla \cdot D_2 = -2v^2 = 2V^1 \quad (\text{A.46})$$

et on obtient avec (A.40)

$$\nabla \cdot D_2 + 2qA \cdot D_1 = 0 \quad (\text{A.47})$$

qui est (2.104). La partie imaginaire de (A.42) donne avec (2.97)

$$2w^2 = 0 = \quad (\text{A.48})$$

$$\begin{aligned} & -\xi_1\partial_0\eta_2 + \xi_2\partial_0\eta_1 - \eta_1\partial_0\xi_2 - \eta_2\partial_0\xi_1 - \xi_1^*\partial_0\eta_2^* + \xi_2^*\partial_0\eta_1^* - \eta_1^*\partial_0\xi_2^* + \eta_2^*\partial_0\xi_1^* \\ & + \xi_1\partial_1\eta_1 - \xi_2\partial_1\eta_2 - \eta_1\partial_1\xi_1 + \eta_2\partial_1\xi_2 + \xi_1^*\partial_1\eta_1^* - \xi_2^*\partial_1\eta_2^* - \eta_1^*\partial_1\xi_1^* + \eta_2^*\partial_1\xi_2^* \\ & + i(\xi_1\partial_2\eta_1 + \xi_2\partial_2\eta_2 - \eta_1\partial_2\xi_1 - \eta_2\partial_2\xi_2 - \xi_1^*\partial_2\eta_1^* - \xi_2^*\partial_2\eta_2^* + \eta_1^*\partial_2\xi_1^* + \eta_2^*\partial_2\xi_2^*) \\ & - \xi_1\partial_3\eta_2 - \xi_2\partial_3\eta_1 + \eta_1\partial_3\xi_2 - \eta_2\partial_3\xi_1 - \xi_1^*\partial_3\eta_2^* - \xi_2^*\partial_3\eta_1^* + \eta_1^*\partial_3\xi_2^* + \eta_2^*\partial_3\xi_1^*. \end{aligned}$$

La partie réelle de (A.43) donne avec (2.98)

$$\begin{aligned}
 2w^1 = 0 = & \quad (A.49) \\
 i(-\xi_1 \partial_0 \eta_2 + \xi_2 \partial_0 \eta_1 - \eta_1 \partial_0 \xi_2 + \eta_2 \partial_0 \xi_1 + \xi_1^* \partial_0 \eta_2^* - \xi_2^* \partial_0 \eta_1^* + \eta_1^* \partial_0 \xi_2^* - \eta_2^* \partial_0 \xi_1^*) \\
 + i(\xi_1 \partial_1 \eta_1 - \xi_2 \partial_1 \eta_2 - \eta_1 \partial_1 \xi_1 + \eta_2 \partial_1 \xi_2 - \xi_1^* \partial_1 \eta_1^* + \xi_2^* \partial_1 \eta_2^* + \eta_1^* \partial_1 \xi_1^* - \eta_2^* \partial_1 \xi_2^*) \\
 - \xi_1 \partial_2 \eta_1 - \xi_2 \partial_2 \eta_2 + \eta_1 \partial_2 \xi_1 + \eta_2 \partial_2 \xi_2 - \xi_1^* \partial_2 \eta_1^* - \xi_2^* \partial_2 \eta_2^* + \eta_1^* \partial_2 \xi_1^* + \eta_2^* \partial_2 \xi_2^* \\
 + i(-\xi_1 \partial_3 \eta_2 - \xi_2 \partial_3 \eta_1 + \eta_1 \partial_3 \xi_2 + \eta_2 \partial_3 \xi_1 + \xi_1^* \partial_3 \eta_2^* + \xi_2^* \partial_3 \eta_1^* - \eta_1^* \partial_3 \xi_2^* - \eta_2^* \partial_3 \xi_1^*)
 \end{aligned}$$

La partie imaginaire de (A.43) donne

$$-2v^1 = \partial_0(-\xi_1 \eta_2 + \xi_2 \eta_1 - \xi_1^* \eta_2^* + \xi_2^* \eta_1^*) \quad (A.50)$$

$$\begin{aligned}
 & + \partial_1(\xi_1 \eta_1 - \xi_2 \eta_2 + \xi_1^* \eta_1^* - \xi_2^* \eta_2^*) \\
 & + \partial_2 i(\xi_1 \eta_1 + \xi_2 \eta_2 - \xi_1^* \eta_1^* - \xi_2^* \eta_2^*) \\
 & + \partial_3(-\xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1 - \xi_1^* \eta_2^* - \xi_2^* \eta_1^*) \\
 & = \partial_\mu D_1^\mu = \nabla \cdot D_1
 \end{aligned} \quad (A.51)$$

ce qui donne, avec (2.94)

$$\nabla \cdot D_1 = -2v^1 = -2V^2 \quad (A.52)$$

et on obtient avec (A.40)

$$\nabla \cdot D_1 - 2qA \cdot D_2 = 0 \quad (A.53)$$

qui est (2.103).

A.2 Calcul du renversé dans $Cl_{5,1}$

Ici, comme en 1.5, les indices $\mu, \nu, \rho \dots$ ont pour valeur 0, 1, 2, 3 et les indices a, b, c, d, e ont pour valeur 0, 1, 2, 3, 4, 5. on obtient²

$$\Lambda_{\mu\nu} = \Lambda_\mu \Lambda_\nu = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma_\mu \\ \gamma_\mu & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\gamma_\nu \\ \gamma_\nu & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\gamma_{\mu\nu} & 0 \\ 0 & -\gamma_{\mu\nu} \end{pmatrix} \quad (A.54)$$

$$\Lambda_{\mu\nu\rho} = \Lambda_{\mu\nu} \Lambda_\rho = \begin{pmatrix} -\gamma_{\mu\nu} & 0 \\ 0 & -\gamma_{\mu\nu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\gamma_\rho \\ \gamma_\rho & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_{\mu\nu\rho} \\ -\gamma_{\mu\nu\rho} & 0 \end{pmatrix} \quad (A.55)$$

$$\Lambda_{0123} = \Lambda_{01} \Lambda_{23} = \begin{pmatrix} \gamma_{0123} & 0 \\ 0 & \gamma_{0123} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & 0 \\ 0 & \mathbf{i} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{i} = \begin{pmatrix} iI_2 & 0 \\ 0 & -iI_2 \end{pmatrix} \quad (A.56)$$

2. I_2, I_4, I_8 sont les matrices unités. Le processus d'identification permettant d'inclure $\mathbb{R}$ dans chaque algèbre de Clifford autorise d'écrire a à la place de aI_n pour tout nombre complexe a .

On obtient aussi

$$\Lambda_{45} = \Lambda_4 \Lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & I_4 \\ I_4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{i} \\ \mathbf{i} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & 0 \\ 0 & -\mathbf{i} \end{pmatrix} = -\Lambda_{54} \quad (\text{A.57})$$

$$\Lambda_{012345} = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & 0 \\ 0 & \mathbf{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{i} & 0 \\ 0 & -\mathbf{i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I_4 & 0 \\ 0 & I_4 \end{pmatrix} \quad (\text{A.58})$$

$$\Lambda_{01235} = \Lambda_{0123} \Lambda_5 = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & 0 \\ 0 & \mathbf{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{i} \\ \mathbf{i} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I_4 \\ -I_4 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.59})$$

De même on obtient³

$$\Lambda_{\mu 4} = \begin{pmatrix} -\gamma_\mu & 0 \\ 0 & \gamma_\mu \end{pmatrix}; \quad \Lambda_{\mu 5} = \begin{pmatrix} \mathbf{i}\gamma_\mu & 0 \\ 0 & \mathbf{i}\gamma_\mu \end{pmatrix} \quad (\text{A.60})$$

$$\Lambda_{\mu\nu 4} = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma_{\mu\nu} \\ -\gamma_{\mu\nu} & 0 \end{pmatrix}; \quad \Lambda_{\mu\nu 5} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_{\mu\nu}\mathbf{i} \\ -\gamma_{\mu\nu}\mathbf{i} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.61})$$

$$\Lambda_{\mu\nu\rho 4} = \begin{pmatrix} \gamma_{\mu\nu\rho} & 0 \\ 0 & -\gamma_{\mu\nu\rho} \end{pmatrix}; \quad \Lambda_{\mu\nu\rho 5} = \begin{pmatrix} \gamma_{\mu\nu\rho}\mathbf{i} & 0 \\ 0 & \gamma_{\mu\nu\rho}\mathbf{i} \end{pmatrix} \quad (\text{A.62})$$

$$\Lambda_{\mu 45} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_\mu\mathbf{i} \\ \gamma_\mu\mathbf{i} & 0 \end{pmatrix}; \quad \Lambda_{\mu\nu 45} = \begin{pmatrix} -\gamma_{\mu\nu}\mathbf{i} & 0 \\ 0 & \gamma_{\mu\nu}\mathbf{i} \end{pmatrix} \quad (\text{A.63})$$

$$\Lambda_{\mu\nu\rho 45} = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma_{\mu\nu\rho}\mathbf{i} \\ -\gamma_{\mu\nu\rho}\mathbf{i} & 0 \end{pmatrix}; \quad \Lambda_{01234} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{i} \\ \mathbf{i} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.64})$$

Les termes scalaires et pseudo-scalaires s'écrivent

$$\alpha I_8 + \omega \Lambda_{012345} = \begin{pmatrix} (\alpha - \omega)I_4 & 0 \\ 0 & (\alpha + \omega)I_4 \end{pmatrix} \quad (\text{A.65})$$

$$\alpha I_8 - \omega \Lambda_{012345} = \begin{pmatrix} (\alpha + \omega)I_4 & 0 \\ 0 & (\alpha - \omega)I_4 \end{pmatrix} \quad (\text{A.66})$$

Pour le calcul du terme 1-vecteur

$$N^a \Lambda_a = N^4 \Lambda_4 + N^5 \Lambda_5 + N^\mu \Lambda_\mu$$

on pose

$$\beta = N^4; \quad \delta = N^5; \quad \mathbf{a} = N^\mu \gamma_\mu. \quad (\text{A.67})$$

Ceci donne

$$N^a \Lambda_a = \begin{pmatrix} 0 & \beta I_4 - \delta \mathbf{i} - \mathbf{a} \\ \beta I_4 + \delta \mathbf{i} + \mathbf{a} & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.68})$$

Pour le calcul du terme 2-vecteur

$$N^{ab} \Lambda_{ab} = N^{45} \Lambda_{45} + N^{\mu 4} \Lambda_{\mu 4} + N^{\mu 5} \Lambda_{\mu 5} + N^{\mu\nu} \Lambda_{\mu\nu}$$

3. $\mathbf{i}$ anticommute avec tout élément impair de l'algèbre d'espace-temps et commute avec tout élément pair.

on pose

$$\epsilon = N^{45} ; \quad \mathbf{b} = N^{\mu 4} \gamma_{\mu} ; \quad \mathbf{c} = N^{\mu 5} \gamma_{\mu} ; \quad \mathbf{A} = N^{\mu \nu} \gamma_{\mu \nu} \quad (\text{A.69})$$

Ceci donne avec (A.54) et (A.60)

$$N^{ab} \Lambda_{ab} = \begin{pmatrix} \epsilon \mathbf{i} - \mathbf{b} + \mathbf{i} \mathbf{c} - \mathbf{A} & 0 \\ 0 & -\epsilon \mathbf{i} + \mathbf{b} + \mathbf{i} \mathbf{c} - \mathbf{A} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.70})$$

Pour le calcul du terme 3-vecteur

$$N^{abc} \Lambda_{abc} = N^{\mu 45} \Lambda_{\mu 45} + N^{\mu \nu 4} \Lambda_{\mu \nu 4} + N^{\mu \nu 5} \Lambda_{\mu \nu 5} + N^{\mu \nu \rho} \Lambda_{\mu \nu \rho}$$

on pose

$$\mathbf{d} = N^{\mu 45} \gamma_{\mu} ; \quad \mathbf{B} = N^{\mu \nu 4} \gamma_{\mu \nu} ; \quad \mathbf{C} = N^{\mu \nu 5} \gamma_{\mu \nu} ; \quad \mathbf{ie} = N^{\mu \nu \rho} \gamma_{\mu \nu \rho} \quad (\text{A.71})$$

Ceci donne avec (A.55) et (A.61)

$$N^{abc} \Lambda_{abc} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{d} \mathbf{i} - \mathbf{B} + \mathbf{i} \mathbf{C} + \mathbf{ie} \\ -\mathbf{id} - \mathbf{B} - \mathbf{i} \mathbf{C} - \mathbf{ie} & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.72})$$

Pour le calcul du terme 4-vecteur

$$N^{abcd} \Lambda_{abcd} = N^{\mu \nu 45} \Lambda_{\mu \nu 45} + N^{\mu \nu \rho 4} \Lambda_{\mu \nu \rho 4} + N^{\mu \nu \rho 5} \Lambda_{\mu \nu \rho 5} + N^{0123} \Lambda_{0123}$$

on pose

$$\mathbf{D} = N^{\mu \nu 45} \gamma_{\mu \nu} ; \quad \mathbf{if} = N^{\mu \nu \rho 4} \gamma_{\mu \nu \rho} ; \quad \mathbf{ig} = N^{\mu \nu \rho 5} \gamma_{\mu \nu \rho} ; \quad \zeta = N^{0123} \quad (\text{A.73})$$

Ceci donne avec (A.56) et (A.62)

$$N^{abcd} \Lambda_{abcd} = \begin{pmatrix} -\mathbf{iD} + \mathbf{if} + \mathbf{g} + \zeta \mathbf{i} & 0 \\ 0 & \mathbf{iD} - \mathbf{if} + \mathbf{g} + \zeta \mathbf{i} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.74})$$

Pour le calcul du terme 5-vecteur

$$N^{abcde} \Lambda_{abcde} = N^{\mu \nu \rho 45} \Lambda_{\mu \nu \rho 45} + N^{01234} \Lambda_{01234} + N^{01235} \Lambda_{01235}$$

on pose

$$\mathbf{ih} = N^{\mu \nu \rho 45} \gamma_{\mu \nu \rho} ; \quad \eta = N^{01234} ; \quad \theta = N^{01235} \quad (\text{A.75})$$

Ceci donne avec (A.59) et (A.64)

$$N^{abcde} \Lambda_{abcde} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{h} + \eta \mathbf{i} + \theta I_4 \\ -\mathbf{h} + \eta \mathbf{i} - \theta I_4 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.76})$$

Nous obtenons alors

$$\begin{aligned} \Psi &= \begin{pmatrix} \Psi_l & \Psi_r \\ \Psi_g & \Psi_b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\alpha - \omega)I_4 + (-\mathbf{b} + \mathbf{g}) - (\mathbf{A} + \mathbf{iD}) & (\beta + \theta)I_4 - (\mathbf{a} + \mathbf{h}) + (-\mathbf{B} + \mathbf{iC}) \\ \mathbf{i}(\mathbf{c} + \mathbf{f}) + (\zeta + \epsilon)\mathbf{i} & \mathbf{i}(-\mathbf{d} + \mathbf{e}) + (-\delta + \eta)\mathbf{i} \\ (\beta - \theta)I_4 + (\mathbf{a} - \mathbf{h}) - (\mathbf{B} + \mathbf{iC}) & (\alpha + \omega)I_4 + (\mathbf{b} + \mathbf{g}) + (-\mathbf{A} + \mathbf{iD}) \\ -\mathbf{i}(\mathbf{d} + \mathbf{e}) + (\delta + \eta)\mathbf{i} & \mathbf{i}(\mathbf{c} - \mathbf{f}) + (\zeta - \epsilon)\mathbf{i} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.77})$$

Ceci implique

$$\Psi_l = (\alpha - \omega)I_4 + (-\mathbf{b} + \mathbf{g}) - (\mathbf{A} + \mathbf{iD}) + \mathbf{i}(\mathbf{c} + \mathbf{f}) + (\zeta + \epsilon)\mathbf{i} \quad (\text{A.78})$$

$$\Psi_r = (\beta + \theta)I_4 - (\mathbf{a} + \mathbf{h}) + (-\mathbf{B} + \mathbf{iC}) + \mathbf{i}(-\mathbf{d} + \mathbf{e}) + (-\delta + \eta)\mathbf{i} \quad (\text{A.79})$$

$$\Psi_g = (\beta - \theta)I_4 + (\mathbf{a} - \mathbf{h}) - (\mathbf{B} + \mathbf{iC}) - \mathbf{i}(\mathbf{d} + \mathbf{e}) + (\delta + \eta)\mathbf{i} \quad (\text{A.80})$$

$$\Psi_b = (\alpha + \omega)I_4 + (\mathbf{b} + \mathbf{g}) + (-\mathbf{A} + \mathbf{iD}) + \mathbf{i}(\mathbf{c} - \mathbf{f}) + (\zeta - \epsilon)\mathbf{i} \quad (\text{A.81})$$

Dans $Cl_{1,3}$ le renversé de

$$A = \langle A \rangle_0 + \langle A \rangle_1 + \langle A \rangle_2 + \langle A \rangle_3 + \langle A \rangle_4$$

est

$$\tilde{A} = \langle A \rangle_0 + \langle A \rangle_1 - \langle A \rangle_2 - \langle A \rangle_3 + \langle A \rangle_4$$

nous devons changer de signe les bivecteurs $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{iC}$, $\mathbf{iD}$, et les trivecteurs $\mathbf{ic}$, $\mathbf{id}$, $\mathbf{ie}$, $\mathbf{if}$ et nous obtenons donc

$$\tilde{\Psi}_l = (\alpha - \omega)I_4 + (-\mathbf{b} + \mathbf{g}) + (\mathbf{A} + \mathbf{iD}) - \mathbf{i}(\mathbf{c} + \mathbf{f}) + (\zeta + \epsilon)\mathbf{i} \quad (\text{A.82})$$

$$\tilde{\Psi}_r = (\beta + \theta)I_4 - (\mathbf{a} + \mathbf{h}) + (\mathbf{B} - \mathbf{iC}) + \mathbf{i}(\mathbf{d} - \mathbf{e}) + (-\delta + \eta)\mathbf{i} \quad (\text{A.83})$$

$$\tilde{\Psi}_g = (\beta - \theta)I_4 + (\mathbf{a} - \mathbf{h}) + (\mathbf{B} + \mathbf{iC}) + \mathbf{i}(\mathbf{d} + \mathbf{e}) + (\delta + \eta)\mathbf{i} \quad (\text{A.84})$$

$$\tilde{\Psi}_b = (\alpha + \omega)I_4 + (\mathbf{b} + \mathbf{g}) + (\mathbf{A} - \mathbf{iD}) + \mathbf{i}(-\mathbf{c} + \mathbf{f}) + (\zeta - \epsilon)\mathbf{i} \quad (\text{A.85})$$

Maintenant le renversé dans $Cl_{5,1}$ de

$$A = \langle A \rangle_0 + \langle A \rangle_1 + \langle A \rangle_2 + \langle A \rangle_3 + \langle A \rangle_4 + \langle A \rangle_5 + \langle A \rangle_6$$

est

$$\tilde{A} = \langle A \rangle_0 + \langle A \rangle_1 - \langle A \rangle_2 - \langle A \rangle_3 + \langle A \rangle_4 + \langle A \rangle_5 - \langle A \rangle_6$$

Les seuls termes qui changent de signe, avec (A.65), (A.70) et (A.72), sont les scalaires ϵ et ω , les vecteurs $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$, $\mathbf{e}$ et les bivecteurs $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}^4$. Nous

4. Ces changements de signe ne sont pas les mêmes dans $Cl_{5,1}$ que dans $Cl_{1,3}$. Les différences sont compensées par le fait que la réversion dans $Cl_{5,1}$ échange aussi les places des termes Ψ_l et Ψ_b .

obtenons alors de (A.77)

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi} &= \begin{pmatrix} (\alpha + \omega)I_4 + (\mathbf{b} + \mathbf{g}) + (\mathbf{A} - \mathbf{iD}) & (\beta + \theta)I_4 - (\mathbf{a} + \mathbf{h}) + (\mathbf{B} - \mathbf{iC}) \\ +\mathbf{i}(-\mathbf{c} + \mathbf{f}) + (\zeta - \epsilon)\mathbf{i} & +\mathbf{i}(\mathbf{d} - \mathbf{e}) + (-\delta + \eta)\mathbf{i} \\ (\beta - \theta)I_4 + (\mathbf{a} - \mathbf{h}) + (\mathbf{B} + \mathbf{iC}) & (\alpha - \omega)I_4 + (-\mathbf{b} + \mathbf{g}) + (\mathbf{A} + \mathbf{iD}) \\ +\mathbf{i}(\mathbf{d} + \mathbf{e}) + (\delta + \eta)\mathbf{i} & -\mathbf{i}(\mathbf{c} + \mathbf{f}) + (\zeta + \epsilon)\mathbf{i} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \tilde{\Psi}_b & \tilde{\Psi}_r \\ \tilde{\Psi}_g & \tilde{\Psi}_l \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{A.86}$$

Ce qui prouve (6.211).

Annexe B

Calculs pour l'invariance de jauge

Les opérateurs P_0 de (6.13) et (7.26) et P'_0 de (6.135) sont de la forme (7.26) c'est-à-dire

$$P_0(\Psi) = a\Psi\gamma_{21} + bP_-(\Psi)\mathbf{i}.$$

Appliqué à

$$\Psi = \begin{pmatrix} \phi_e & \phi_n \\ \hat{\phi}_n & \hat{\phi}_e \end{pmatrix} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \xi_{1e} & -\eta_{2e}^* & 0 & -\eta_{2n}^* \\ \xi_{2e} & \eta_{1e}^* & 0 & \eta_{1n}^* \\ \eta_{1n} & 0 & \eta_{1e} & -\xi_{2e}^* \\ \eta_{2n} & 0 & \eta_{2e} & \xi_{1e}^* \end{pmatrix} \quad (\text{B.1})$$

ceci donne

$$P_0(\Psi) = ia \begin{pmatrix} \phi_e \sigma_3 & \phi_n \sigma_3 \\ \hat{\phi}_n \sigma_3 & \hat{\phi}_e \sigma_3 \end{pmatrix} + ib \begin{pmatrix} \phi_{eR} & 0 \\ 0 & -\hat{\phi}_{eR} \end{pmatrix} \quad (\text{B.2})$$

$$P_0(\Psi) = i\sqrt{2} \begin{pmatrix} (a+b)\xi_{1e} & (-a)(-\eta_{2e}^*) & 0 & (-a)(-\eta_{2n}^*) \\ (a+b)\xi_{2e} & (-a)\eta_{1e}^* & 0 & (-a)\eta_{1n}^* \\ a\eta_{1n} & 0 & a\eta_{1e} & -(a+b)(-\xi_{2e}^*) \\ a\eta_{2n} & 0 & a\eta_{2e} & -(a+b)\xi_{1e}^* \end{pmatrix} \quad (\text{B.3})$$

$$P_0(\Psi) = \frac{b\mathbf{i}}{2}\Psi + \Psi(a + \frac{b}{2})\gamma_{21} \quad (\text{B.4})$$

Comme, par $\exp(a^0 P_0)$

$$\xi_e \mapsto e^{ia^0(a+b)}\xi_e; \quad \eta_e \mapsto e^{ia^0 a}\eta_e; \quad \eta_n \mapsto e^{ia^0 a}\eta_n \quad (\text{B.5})$$

nous obtenons

$$[\exp(a^0 P_0)](\Psi) = e^{a^0 \frac{b}{2} \mathbf{i}} \Psi e^{a^0 (a + \frac{b}{2}) \gamma_{21}} \quad (\text{B.6})$$

On obtient ensuite

$$\begin{aligned}
& \partial_\mu \left[[\exp(a^0 P_0)](\Psi) \right] \\
&= \partial_\mu a^0 \frac{b}{2} \mathbf{i} e^{a^0 \frac{b}{2} \mathbf{i}} \Psi e^{a^0(a+\frac{b}{2})\gamma_{21}} + e^{a^0 \frac{b}{2} \mathbf{i}} \partial_\mu \Psi e^{a^0(a+\frac{b}{2})\gamma_{21}} \\
&\quad + e^{a^0 \frac{b}{2} \mathbf{i}} \Psi \partial_\mu a^0 (a + \frac{b}{2}) \gamma_{21} e^{a^0(a+\frac{b}{2})\gamma_{21}} \\
&= \partial_\mu a^0 e^{a^0 \frac{b}{2} \mathbf{i}} \left[\frac{b\mathbf{i}}{2} \Psi + \Psi (a + \frac{b}{2}) \gamma_{21} \right] e^{a^0(a+\frac{b}{2})\gamma_{21}} + e^{a^0 \frac{b}{2} \mathbf{i}} \partial_\mu \Psi e^{a^0(a+\frac{b}{2})\gamma_{21}} \\
&= \partial_\mu a^0 e^{a^0 \frac{b}{2} \mathbf{i}} P_0(\Psi) e^{a^0(a+\frac{b}{2})\gamma_{21}} + e^{a^0 \frac{b}{2} \mathbf{i}} \partial_\mu \Psi e^{a^0(a+\frac{b}{2})\gamma_{21}} \\
&= e^{a^0 \frac{b}{2} \mathbf{i}} [\partial_\mu a^0 P_0(\Psi) + \partial_\mu \Psi] e^{a^0(a+\frac{b}{2})\gamma_{21}}. \tag{B.7}
\end{aligned}$$

La transformation de jauge définie par

$$B'_\mu = B_\mu - \frac{2}{g_1} \partial_\mu a^0 \tag{B.8}$$

$$\Psi' = [\exp(a^0 P_0)](\Psi) = e^{a^0 \frac{b}{2} \mathbf{i}} \Psi e^{a^0(a+\frac{b}{2})\gamma_{21}} \tag{B.9}$$

nous donne :

$$D_\mu \Psi = \partial_\mu \Psi + \frac{g_1}{2} B_\mu P_0(\Psi) \tag{B.10}$$

$$D'_\mu \Psi' = \partial_\mu \Psi' + (\frac{g_1}{2} B_\mu - \partial_\mu a^0) P_0(\Psi') \tag{B.11}$$

$$= \partial_\mu \left[[\exp(a^0 P_0)](\Psi) \right] + (\frac{g_1}{2} B_\mu - \partial_\mu a^0) [\frac{b}{2} \mathbf{i} \Psi' + \Psi' (a + \frac{b}{2}) \gamma_{21}] \tag{B.12}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{a^0 \frac{b}{2} \mathbf{i}} [\partial_\mu a^0 P_0(\Psi) + \partial_\mu \Psi + (\frac{g_1}{2} B_\mu - \partial_\mu a^0) P_0(\Psi)] e^{a^0(a+\frac{b}{2})\gamma_{21}} \\
&= e^{a^0 \frac{b}{2} \mathbf{i}} (D_\mu \Psi) e^{a^0(a+\frac{b}{2})\gamma_{21}}. \tag{B.13}
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}' \Psi' &= \gamma^\mu D'_\mu \Psi' = \gamma^\mu e^{a^0 \frac{b}{2} \mathbf{i}} (D_\mu \Psi) e^{a^0(a+\frac{b}{2})\gamma_{21}} \\
&= e^{-a^0 \frac{b}{2} \mathbf{i}} (\mathbf{D} \Psi) e^{a^0(a+\frac{b}{2})\gamma_{21}} \tag{B.14}
\end{aligned}$$

car $\mathbf{i}$ anticommute avec chaque γ^μ . Ensuite on a

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Psi}' &= e^{a^0(a+\frac{b}{2})\gamma_{21}} \widetilde{\Psi} e^{a^0 \frac{b}{2} \mathbf{i}} \\
&= e^{-a^0(a+\frac{b}{2})\gamma_{21}} \widetilde{\Psi} e^{a^0 \frac{b}{2} \mathbf{i}} \tag{B.15}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Psi}' \mathbf{D}' \Psi' &= e^{-a^0(a+\frac{b}{2})\gamma_{21}} \widetilde{\Psi} e^{a^0 \frac{b}{2} \mathbf{i}} e^{-a^0 \frac{b}{2} \mathbf{i}} (\mathbf{D} \Psi) e^{a^0(a+\frac{b}{2})\gamma_{21}} \\
&= e^{-a^0(a+\frac{b}{2})\gamma_{21}} \widetilde{\Psi} (\mathbf{D} \Psi) e^{a^0(a+\frac{b}{2})\gamma_{21}}. \tag{B.16}
\end{aligned}$$

On a aussi :

$$\det(\Psi') = \det(e^{a^0 \frac{b}{2} \mathbf{i}}) \det(\Psi) \det(e^{a^0(a+\frac{b}{2})\gamma_{21}}) = \det(\Psi) \tag{B.17}$$

donc on obtient

$$\rho' = \sqrt{\det(\Psi')} = \sqrt{\det(\Psi)} = \rho. \quad (\text{B.18})$$

et finalement :

$$\begin{aligned} & \tilde{\Psi}'(\mathbf{D}'\Psi')\gamma_{012} + m\rho' \\ &= e^{-a^0(a+\frac{b}{2})\gamma_{21}}[\tilde{\Psi}(\mathbf{D}\Psi)\gamma_{012} + m\rho]e^{a^0(a+\frac{b}{2})\gamma_{21}} = 0. \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

Dans la cas du monopôle magnétique l'onde leptonique est de la forme :

$$\Psi = \begin{pmatrix} \widehat{\phi}_L & \widehat{\phi}_n \\ \widehat{\phi}_n & \widehat{\phi}_L \end{pmatrix} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & -\eta_{2L}^* & \xi_{1n} & -\eta_{2n}^* \\ 0 & \eta_{1L}^* & \xi_{2n} & \eta_{1n}^* \\ \eta_{1n} & -\xi_{2n}^* & \eta_{1L} & 0 \\ \eta_{2n} & \xi_{1n}^* & \eta_{2L} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.20})$$

ce qui donne,

$$\begin{aligned} P_0(\Psi) &= a\Psi\gamma_{21} + bP_-(\Psi)\mathbf{i} \\ &= i\sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & -a(-\eta_{2L}^*) & (a-b)\xi_{1n} & -a(-\eta_{2n}^*) \\ 0 & -a\eta_{1L}^* & (a-b)\xi_{2n} & -a\eta_{1n}^* \\ a\eta_{1n} & (-a+b)(-\xi_{2n}^*) & a\eta_{1L} & 0 \\ a\eta_{2n} & (-a+b)\xi_{1n}^* & a\eta_{2L} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

$$= -\frac{b}{2}\mathbf{i}\Psi + \Psi(a - \frac{b}{2})\gamma_{21}. \quad (\text{B.22})$$

La suite du calcul est donc la même, au changement près de b en $-b$.

Ce sont les opérateurs P_1 et P_2 qui entraînent une variation de ρ parce qu'ils mélangent η_e et η_n . Considérons par exemple :

$$S = aP_1; \quad c = \cos(a); \quad s = \sin(a) \quad (\text{B.23})$$

$$d_e = \det(\phi_e); \quad d_{en} = 2 \begin{vmatrix} \xi_{1e} & -\eta_{2n}^* \\ \xi_{2e} & \eta_{1n}^* \end{vmatrix}. \quad (\text{B.24})$$

On a

$$\begin{aligned} [\exp(S)](\Psi) &= \Psi_R + \Psi_L(c + s\gamma_3\mathbf{i}) \\ &= \sqrt{2} \begin{pmatrix} \xi_{1e} & c(-\eta_{2e}^*) + is(-\eta_{2n}^*) & 0 & c(-\eta_{2n}^*) + is(-\eta_{2e}^*) \\ \xi_{2e} & c\eta_{1e}^* + is\eta_{1n}^* & 0 & c\eta_{1n}^* + is\eta_{1e}^* \\ c\eta_{1n} - is\eta_{1e} & 0 & c\eta_{1e} - is\eta_{1n} & 0 \\ c\eta_{2n} - is\eta_{2e} & 0 & c\eta_{2e} - is\eta_{2n} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

On obtient alors

$$\rho' = \sqrt{|cd_e + isd_{en}|^2 + \rho_L^2}. \quad (\text{B.26})$$

Annexe C

L'atome d'hydrogène

On étudie la résolution de l'équation non linéaire homogène pour l'atome d'hydrogène. Notre résolution utilise une méthode de séparation des variables en coordonnées sphériques. Les solutions sont très proches de solutions de l'équation de Dirac qui ne sont pas les solutions classiques, et qui ont un angle d'Yvon-Takabayasi partout défini et petit.

L'atome d'hydrogène est le joyau de la théorie de Dirac. Les solutions calculées par C. G. Darwin [6], qu'on peut trouver dans des livres plus récents [46], sont valeurs propres d'un opérateur ad hoc qui n'est pas le moment angulaire total. Ces solutions n'ont comme justification physique que de donner le nombre attendu d'états, la bonne formule des niveaux d'énergie, et d'avoir les approximations non relativistes attendues. Tout cela a été considéré comme très satisfaisant. Les solutions de Darwin souffrent d'un seul inconvénient, pour la plupart d'entre elles, qui est d'avoir un angle d'Yvon-Takabayasi qui n'est pas partout défini et petit. En conséquence elles ne peuvent pas être les approximations des solutions de notre équation non linéaire homogène

Nous avons obtenu précédemment [8] d'autres solutions de l'équation de Dirac qui ont un angle d'Yvon-Takabayasi partout défini et petit, et donc qui peuvent être les approximations des solutions de notre équation non linéaire.

C.1 Séparation des variables

Pour résoudre l'équation de Dirac (2.42) ou l'équation non linéaire homogène (3.10), dans le cas de l'atome d'hydrogène, il existe deux méthodes. On utilisera ici, non pas la méthode initiale basé sur les équations d'onde non relativistes, mais la méthode inventée plus récemment par H. Krüger [35], méthode classique pour une équation aux dérivées partielles du point de vue mathématique, séparant les variables en coordonnées sphériques :

$$x^1 = r \sin \theta \cos \varphi \ ; \ x^2 = r \sin \theta \sin \varphi \ ; \ x^3 = r \cos \theta \quad (\text{C.1})$$

On utilise les notations suivantes¹ :

$$i_1 = \sigma_{23} = i\sigma_1 ; \quad i_2 = \sigma_{31} = i\sigma_2 ; \quad i_3 = \sigma_{12} = i\sigma_3 \quad (\text{C.2})$$

$$S = e^{-\frac{\varphi}{2}i_3} e^{-\frac{\theta}{2}i_2} ; \quad \Omega = r^{-1}(\sin \theta)^{-\frac{1}{2}} S \quad (\text{C.3})$$

$$\vec{\partial}' = \sigma_3 \partial_r + \frac{1}{r} \sigma_1 \partial_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \sigma_2 \partial_\varphi. \quad (\text{C.4})$$

H. Krüger a obtenu l'identité remarquable :

$$\vec{\partial} = \Omega \vec{\partial}' \Omega^{-1} \quad (\text{C.5})$$

qui, avec :

$$\nabla' = \partial_0 - \vec{\partial}' = \partial_0 - (\sigma_3 \partial_r + \frac{1}{r} \sigma_1 \partial_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \sigma_2 \partial_\varphi) \quad (\text{C.6})$$

donne aussi

$$\Omega^{-1} \nabla = \nabla' \Omega^{-1}. \quad (\text{C.7})$$

Pour les équations d'onde (2.42) ou (3.10), pour séparer la variable temporelle $x^0 = ct$ et la variable angulaire φ de la variable radiale r et de l'autre variable angulaire θ on pose :

$$\phi = \Omega X e^{(\lambda\varphi - Ex^0 + \delta)i_3} \quad (\text{C.8})$$

où X est une fonction, à valeur dans l'algèbre de Pauli, de r et θ seuls, $\hbar c E$ est l'énergie de l'électron, δ est une phase arbitraire qui ne joue aucun rôle dans les équations (2.42) et (3.10) parce qu'elles sont invariantes de jauge électrique. λ est une constante réelle. Nous obtenons alors

$$\Omega^{-1} \phi = X e^{(\lambda\varphi - Ex^0 + \delta)i_3} \quad (\text{C.9})$$

$$\Omega^{-1} \hat{\phi} = \hat{X} e^{(\lambda\varphi - Ex^0 + \delta)i_3}. \quad (\text{C.10})$$

Nous avons aussi :

$$\begin{aligned} \rho e^{i\beta} &= \det(\phi) = \det(\Omega) \det(X) \det[e^{(\lambda\varphi - Ex^0 + \delta)i_3}] \\ \det(\Omega) &= r^{-2} (\sin \theta)^{-1} ; \quad \det[e^{(\lambda\varphi - Ex^0 + \delta)i_3}] = 1 \\ \rho e^{i\beta} &= \frac{\det(X)}{r^2 \sin \theta}. \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

Aussi si nous posons :

$$\rho_X e^{i\beta_X} = \det(X) \quad (\text{C.12})$$

1. S n'a rien à voir avec le tenseur S_3 et Ω ne doit pas être confondu avec les invariants relativistes Ω_1 et Ω_2 étudiés au chapitre 2.

nous obtenons :

$$\rho = \frac{\rho_X}{r^2 \sin \theta} ; \quad \beta = \beta_X. \quad (\text{C.13})$$

Donc avec la forme (C.8) pour l'onde, l'angle d'Yvon-Takabayasi ne dépend ni du temps, ni de l'angle φ , seulement de r et θ . C'est la raison pour laquelle la séparation des variables peut commencer de la même manière pour l'équation linéaire comme pour l'équation non linéaire homogène. On a :

$$\nabla' \Omega^{-1} \hat{\phi} = (\partial_0 - \sigma_3 \partial_r - \frac{1}{r} \sigma_1 \partial_\theta - \frac{1}{r \sin \theta} \sigma_2 \partial_\varphi) [\hat{X} e^{(\lambda\varphi - Ex^0 + \delta)i_3}] \quad (\text{C.14})$$

$$\partial_0 (\hat{X} e^{(\lambda\varphi - Ex^0 + \delta)i_3}) = -E \hat{X} i_3 e^{(\lambda\varphi - Ex^0 + \delta)i_3} \quad (\text{C.15})$$

$$\partial_r (\hat{X} e^{(\lambda\varphi - Ex^0 + \delta)i_3}) = (\partial_r \hat{X}) e^{(\lambda\varphi - Ex^0 + \delta)i_3} \quad (\text{C.16})$$

$$\partial_\theta (\hat{X} e^{(\lambda\varphi - Ex^0 + \delta)i_3}) = (\partial_\theta \hat{X}) e^{(\lambda\varphi - Ex^0 + \delta)i_3} \quad (\text{C.17})$$

$$\partial_\varphi (\hat{X} e^{(\lambda\varphi - Ex^0 + \delta)i_3}) = \lambda \hat{X} i_3 e^{(\lambda\varphi - Ex^0 + \delta)i_3}. \quad (\text{C.18})$$

On obtient alors :

$$\nabla \hat{\phi} = \Omega (-E \hat{X} i_3 - \sigma_3 \partial_r \hat{X} - \frac{1}{r} \sigma_1 \partial_\theta \hat{X} - \frac{\lambda}{r \sin \theta} \sigma_2 \hat{X} i_3) e^{(\lambda\varphi - Ex^0 + \delta)i_3}. \quad (\text{C.19})$$

Pour l'atome d'hydrogène, on a :

$$qA = qA^0 = -\frac{\alpha}{r} ; \quad \alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \quad (\text{C.20})$$

où α est la constante de structure fine. On a :

$$\begin{aligned} qA \hat{\phi} \sigma_{12} &= -\frac{\alpha}{r} \hat{\phi} i_3 = -\frac{\alpha}{r} \Omega \hat{X} e^{(\lambda\varphi - Ex^0 + \delta)i_3} i_3 \\ &= \Omega \left(-\frac{\alpha}{r} \hat{X} i_3 \right) e^{(\lambda\varphi - Ex^0 + \delta)i_3}. \end{aligned} \quad (\text{C.21})$$

Aussi l'équation non linéaire homogène (3.10) devient

$$-E \hat{X} i_3 - \sigma_3 \partial_r \hat{X} - \frac{1}{r} \sigma_1 \partial_\theta \hat{X} - \frac{\lambda}{r \sin \theta} \sigma_2 \hat{X} i_3 - \frac{\alpha}{r} \hat{X} i_3 + m e^{-i\beta} X i_3 = 0 \quad (\text{C.22})$$

c'est-à-dire :

$$\left(E + \frac{\alpha}{r} \right) \hat{X} i_3 + \sigma_3 \partial_r \hat{X} + \frac{1}{r} \sigma_1 \partial_\theta \hat{X} + \frac{\lambda}{r \sin \theta} \sigma_2 \hat{X} i_3 = m e^{-i\beta} X i_3 \quad (\text{C.23})$$

tandis que l'équation de Dirac donne :

$$\left(E + \frac{\alpha}{r} \right) \hat{X} i_3 + \sigma_3 \partial_r \hat{X} + \frac{1}{r} \sigma_1 \partial_\theta \hat{X} + \frac{\lambda}{r \sin \theta} \sigma_2 \hat{X} i_3 = m X i_3. \quad (\text{C.24})$$

On pose maintenant :

$$X = \begin{pmatrix} \mathbf{a} & -\mathbf{b}^* \\ \mathbf{c} & \mathbf{d}^* \end{pmatrix} \quad (\text{C.25})$$

où $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ sont des fonctions à valeur complexe des variables réelles r et θ .
On obtient alors :

$$\hat{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{d} & -\mathbf{c}^* \\ \mathbf{b} & \mathbf{a}^* \end{pmatrix} \quad (\text{C.26})$$

On obtient donc :

$$e^{-i\beta} X i_3 = i e^{-i\beta} X \sigma_3 = i e^{-i\beta} \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b}^* \\ \mathbf{c} & -\mathbf{d}^* \end{pmatrix} \quad (\text{C.27})$$

$$\hat{X} i_3 = \begin{pmatrix} \mathbf{d} & -\mathbf{c}^* \\ \mathbf{b} & \mathbf{a}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\mathbf{d} & i\mathbf{c}^* \\ i\mathbf{b} & -i\mathbf{a}^* \end{pmatrix} \quad (\text{C.28})$$

$$\sigma_3 \partial_r \hat{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_r \mathbf{d} & -\partial_r \mathbf{c}^* \\ \partial_r \mathbf{b} & \partial_r \mathbf{a}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_r \mathbf{d} & -\partial_r \mathbf{c}^* \\ -\partial_r \mathbf{b} & -\partial_r \mathbf{a}^* \end{pmatrix} \quad (\text{C.29})$$

$$\sigma_1 \partial_\theta \hat{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_\theta \mathbf{d} & -\partial_\theta \mathbf{c}^* \\ \partial_\theta \mathbf{b} & \partial_\theta \mathbf{a}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_\theta \mathbf{b} & \partial_\theta \mathbf{a}^* \\ \partial_\theta \mathbf{d} & -\partial_\theta \mathbf{c}^* \end{pmatrix} \quad (\text{C.30})$$

$$\sigma_2 \hat{X} i_3 = i_2 \hat{X} \sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{d} & -\mathbf{c}^* \\ \mathbf{b} & \mathbf{a}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b} & -\mathbf{a}^* \\ -\mathbf{d} & -\mathbf{c}^* \end{pmatrix}. \quad (\text{C.31})$$

Par conséquent l'équation non linéaire (3.10) devient :

$$\begin{aligned} & \left(E + \frac{\alpha}{r}\right) \begin{pmatrix} i\mathbf{d} & i\mathbf{c}^* \\ i\mathbf{b} & -i\mathbf{a}^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \partial_r \mathbf{d} & -\partial_r \mathbf{c}^* \\ -\partial_r \mathbf{b} & -\partial_r \mathbf{a}^* \end{pmatrix} + \frac{1}{r} \begin{pmatrix} \partial_\theta \mathbf{b} & \partial_\theta \mathbf{a}^* \\ \partial_\theta \mathbf{d} & -\partial_\theta \mathbf{c}^* \end{pmatrix} \\ & + \frac{\lambda}{r \sin \theta} \begin{pmatrix} \mathbf{b} & -\mathbf{a}^* \\ -\mathbf{d} & -\mathbf{c}^* \end{pmatrix} = i m e^{-i\beta} \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b}^* \\ \mathbf{c} & -\mathbf{d}^* \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{C.32})$$

En conjuguant les équations contenant des $*$, on obtient le système :

$$\begin{aligned} & i\left(E + \frac{\alpha}{r}\right)\mathbf{d} + \partial_r \mathbf{d} + \frac{1}{r}\left(\partial_\theta + \frac{\lambda}{\sin \theta}\right)\mathbf{b} = i m e^{-i\beta} \mathbf{a} \\ & -i\left(E + \frac{\alpha}{r}\right)\mathbf{c} - \partial_r \mathbf{c} + \frac{1}{r}\left(\partial_\theta - \frac{\lambda}{\sin \theta}\right)\mathbf{a} = -i m e^{i\beta} \mathbf{b} \\ & i\left(E + \frac{\alpha}{r}\right)\mathbf{b} - \partial_r \mathbf{b} + \frac{1}{r}\left(\partial_\theta - \frac{\lambda}{\sin \theta}\right)\mathbf{d} = i m e^{-i\beta} \mathbf{c} \\ & -i\left(E + \frac{\alpha}{r}\right)\mathbf{a} + \partial_r \mathbf{a} + \frac{1}{r}\left(\partial_\theta + \frac{\lambda}{\sin \theta}\right)\mathbf{c} = -i m e^{i\beta} \mathbf{d}. \end{aligned} \quad (\text{C.33})$$

En outre on a :

$$\rho e^{i\beta} = \det(\phi) = \frac{\det(X)}{r^2 \sin \theta} = \frac{\mathbf{a}\mathbf{d}^* + \mathbf{c}\mathbf{b}^*}{r^2 \sin \theta} \quad (\text{C.34})$$

donc on obtient :

$$e^{i\beta} = \frac{\mathbf{ad}^* + \mathbf{cb}^*}{|\mathbf{ad}^* + \mathbf{cb}^*|} \quad (\text{C.35})$$

Pour les quatre équations (C.33) il n'y a que deux opérateurs angulaires, donc on pose :

$$\mathbf{a} = AU ; \quad \mathbf{b} = BV ; \quad \mathbf{c} = CV ; \quad \mathbf{d} = DU \quad (\text{C.36})$$

où A, B, C et D sont des fonctions de r alors que U et V sont fonctions de θ . Le système (C.33) devient :

$$\begin{aligned} i(E + \frac{\alpha}{r})DU + D'U + \frac{1}{r}(V' + \frac{\lambda}{\sin \theta}V)B &= ime^{-i\beta}AU \\ -i(E + \frac{\alpha}{r})CV - C'V + \frac{1}{r}(U' - \frac{\lambda}{\sin \theta}U)A &= -ime^{i\beta}BV \\ i(E + \frac{\alpha}{r})BV - B'V + \frac{1}{r}(U' - \frac{\lambda}{\sin \theta}U)D &= ime^{-i\beta}CV \\ -i(E + \frac{\alpha}{r})AU + A'U + \frac{1}{r}(V' + \frac{\lambda}{\sin \theta}V)C &= -ime^{i\beta}DU. \end{aligned} \quad (\text{C.37})$$

Donc s'il existe une constante κ telle que :

$$U' - \frac{\lambda}{\sin \theta}U = -\kappa V ; \quad V' + \frac{\lambda}{\sin \theta}V = \kappa U \quad (\text{C.38})$$

le système (C.37) devient :

$$\begin{aligned} i(E + \frac{\alpha}{r})D + D' + \frac{\kappa}{r}B &= ime^{-i\beta}A \\ -i(E + \frac{\alpha}{r})C - C' - \frac{\kappa}{r}A &= -ime^{i\beta}B \\ i(E + \frac{\alpha}{r})B - B' - \frac{\kappa}{r}D &= ime^{-i\beta}C \\ -i(E + \frac{\alpha}{r})A + A' + \frac{\kappa}{r}C &= -ime^{i\beta}D \end{aligned} \quad (\text{C.39})$$

Pour obtenir le système équivalent à l'équation de Dirac, par le même procédé, il suffit de remplacer β par 0, ça ne change pas le système angulaire (C.38), tandis qu'à la place de (C.39) on obtient le système :

$$\begin{aligned} i(E + \frac{\alpha}{r})D + D' + \frac{\kappa}{r}B &= imA \\ -i(E + \frac{\alpha}{r})C - C' - \frac{\kappa}{r}A &= -imB \\ i(E + \frac{\alpha}{r})B - B' - \frac{\kappa}{r}D &= imC \\ -i(E + \frac{\alpha}{r})A + A' + \frac{\kappa}{r}C &= -imD \end{aligned} \quad (\text{C.40})$$

C.2 Opérateurs de moment cinétique

On a établi en [9] la forme que prennent les opérateurs de moment cinétique en algèbre d'espace-temps. En algèbre de Pauli, nous avons (un calcul détaillé est en [16] A.3) :

$$J_1\phi = (d_1 + \frac{1}{2}\sigma_{23})\phi\sigma_{21} ; \quad d_1 = x^2\partial_3 - x^3\partial_2 = -\sin\varphi \partial_\theta - \frac{\cos\varphi}{\tan\theta}\partial_\varphi \quad (\text{C.41})$$

$$J_2\phi = (d_2 + \frac{1}{2}\sigma_{31})\phi\sigma_{21} ; \quad d_2 = x^3\partial_1 - x^1\partial_3 = \cos\varphi \partial_\theta - \frac{\sin\varphi}{\tan\theta}\partial_\varphi \quad (\text{C.42})$$

$$J_3\phi = (d_3 + \frac{1}{2}\sigma_{12})\phi\sigma_{21} ; \quad d_3 = x^1\partial_2 - x^2\partial_1 = \partial_\varphi. \quad (\text{C.43})$$

On a bien sûr aussi

$$J^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2. \quad (\text{C.44})$$

On obtient alors

$$J_3\phi = \lambda\phi \iff \phi = \phi(x^0, r, \theta)e^{\lambda\varphi i_3}. \quad (\text{C.45})$$

Donc l'onde ϕ vérifiant (C.8) est un vecteur propre de J_3 et λ est le nombre quantique magnétique. De plus, toujours pour une onde ϕ vérifiant (C.8), nous avons :

$$J^2\phi = j(j+1)\phi \quad (\text{C.46})$$

si et seulement si

$$\partial_{\theta\theta}^2 X + [(j + \frac{1}{2})^2 - \frac{\lambda^2}{\sin^2\theta}]X - \lambda \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} \sigma_{12} X \sigma_{12} = 0. \quad (\text{C.47})$$

Or (C.38) implique au second ordre

$$0 = U'' + (\kappa^2 - \frac{\lambda^2}{\sin^2\theta})U + \lambda \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} U \quad (\text{C.48})$$

$$0 = V'' + (\kappa^2 - \frac{\lambda^2}{\sin^2\theta})V - \lambda \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} V \quad (\text{C.49})$$

$$0 = \partial_{\theta\theta}^2 X + (\kappa^2 - \frac{\lambda^2}{\sin^2\theta})X - \lambda \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} \sigma_{12} X \sigma_{12} \quad (\text{C.50})$$

par conséquent ϕ est un vecteur propre de J^2 , avec la valeur propre $j(j+1)$, si et seulement si

$$\kappa^2 = (j + \frac{1}{2})^2 ; \quad |\kappa| = j + \frac{1}{2} ; \quad j = |\kappa| - \frac{1}{2}. \quad (\text{C.51})$$

Avec (C.3) et (C.8) on peut voir que le changement de φ en $\varphi + 2\pi$ conserve la même valeur pour l'onde si et seulement si λ a une valeur demi-entière. Les

résultats généraux sur les opérateurs de moment angulaire impliquent alors que :

$$j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots ; \quad \kappa = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots ; \quad \lambda = -j, -j+1, \dots, j-1, j. \quad (\text{C.52})$$

Pour résoudre le système angulaire, si $\lambda > 0$ on pose, avec $C = C(\theta)$:

$$\begin{aligned} U &= \sin^\lambda \theta [\sin(\frac{\theta}{2})C' - (\kappa + \frac{1}{2} - \lambda) \cos(\frac{\theta}{2})C] \\ V &= \sin^\lambda \theta [\cos(\frac{\theta}{2})C' + (\kappa + \frac{1}{2} - \lambda) \sin(\frac{\theta}{2})C]. \end{aligned} \quad (\text{C.53})$$

Si $\lambda < 0$ on pose :

$$\begin{aligned} U &= \sin^{-\lambda} \theta [\cos(\frac{\theta}{2})C' + (\kappa + \frac{1}{2} + \lambda) \sin(\frac{\theta}{2})C] \\ V &= \sin^{-\lambda} \theta [-\sin(\frac{\theta}{2})C' + (\kappa + \frac{1}{2} + \lambda) \cos(\frac{\theta}{2})C] \end{aligned} \quad (\text{C.54})$$

Le système angulaire (C.38) est alors équivalent [7] à l'équation différentielle :

$$0 = C'' + \frac{2|\lambda|}{\tan \theta} C' + [(\kappa + \frac{1}{2})^2 - \lambda^2] C \quad (\text{C.55})$$

Le changement de variable :

$$z = \cos \theta ; \quad f(z) = C[\theta(z)] \quad (\text{C.56})$$

donne alors l'équation différentielle des polynômes de Gegenbauer :²

$$0 = f''(z) - \frac{1+2|\lambda|}{1-z^2} z f'(z) + \frac{(\kappa + \frac{1}{2})^2 - \lambda^2}{1-z^2} f(z). \quad (\text{C.57})$$

Et l'on obtient, comme seule solution intégrable :

$$\frac{C(\theta)}{C(0)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(|\lambda| - \kappa - \frac{1}{2})_n (|\lambda| + \kappa + \frac{1}{2})_n}{(\frac{1}{2} + |\lambda|)_n n!} \sin^{2n}(\frac{\theta}{2}) \quad (\text{C.58})$$

avec :

$$(a)_0 = 1, \quad (a)_n = a(a+1) \dots (a+n-1). \quad (\text{C.59})$$

2. Quand on résout l'équation de Dirac avec la méthode de Darwin, c'est-à-dire avec les opérateurs ad-hoc, on obtient des polynômes de Legendre et des harmoniques sphériques. Ici, en travaillant avec ϕ , ce qui revient à travailler avec les spineurs de Weyl ξ et η , nous obtenons des polynômes de Gegenbauer, et c'est le degré de ces polynômes qui est le nombre quantique dont on a besoin.

Le facteur $C(0)$ est en facteur de U et de V , son argument peut être absorbé par le δ de (C.8), et son module peut être transféré sur les fonctions radiales. On peut donc poser $C(0) = 1$, ce qui donne :

$$C(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(|\lambda| - \kappa - \frac{1}{2})_n (|\lambda| + \kappa + \frac{1}{2})_n}{(\frac{1}{2} + |\lambda|)_n n!} \sin^{2n}(\frac{\theta}{2}). \quad (\text{C.60})$$

Comme nous avons les conditions (C.52) sur λ et κ , il existe toujours un entier n tel que

$$|\lambda| + n = |\kappa + \frac{1}{2}| \quad (\text{C.61})$$

et ceci contraint la série (C.60) à être une somme finie, donc U et V sont intégrables. Et comme U et V sont à valeurs réelles, on a :

$$e^{i\beta} = \frac{AD^*U^2 + CB^*V^2}{|AD^*U^2 + CB^*V^2|} \quad (\text{C.62})$$

C.3 Résolution du système radial linéaire

On effectue le changement de variable radiale :

$$\begin{aligned} x = mr ; \quad \epsilon &= \frac{E}{m} ; \quad a(x) = A(r) = A\left(\frac{x}{m}\right) \\ b(x) &= B(r) ; \quad c(x) = C(r) ; \quad d(x) = D(r). \end{aligned} \quad (\text{C.63})$$

Le système (C.40) devient :

$$\begin{aligned} i(\epsilon + \frac{\alpha}{x})d + d' + \frac{\kappa}{x}b &= ia \\ -i(\epsilon + \frac{\alpha}{x})c - c' - \frac{\kappa}{x}a &= -ib \\ i(\epsilon + \frac{\alpha}{x})b - b' - \frac{\kappa}{x}d &= ic \\ -i(\epsilon + \frac{\alpha}{x})a + a' + \frac{\kappa}{x}c &= -id. \end{aligned} \quad (\text{C.64})$$

En ajoutant et retranchant on obtient :

$$\begin{aligned} i(\epsilon + \frac{\alpha}{x})(d - c) + (d - c)' - \frac{\kappa}{x}(a - b) &= i(a - b) \\ -i(\epsilon + \frac{\alpha}{x})(a - b) + (a - b)' - \frac{\kappa}{x}(d - c) &= -i(d - c) \\ i(\epsilon + \frac{\alpha}{x})(c + d) + (c + d)' + \frac{\kappa}{x}(a + b) &= i(a + b) \\ i(\epsilon + \frac{\alpha}{x})(a + b) - (a + b)' - \frac{\kappa}{x}(c + d) &= i(c + d). \end{aligned} \quad (\text{C.65})$$

On pose alors :

$$\begin{aligned} a - b &= F_- + iG_- ; & a + b &= F_+ + iG_+ \\ d - c &= F_- - iG_- ; & c + d &= F_+ - iG_+ \end{aligned} \quad (\text{C.66})$$

et le système radial devient :

$$\begin{aligned} i\left(\epsilon + \frac{\alpha}{x}\right)(F_- - iG_-) + (F_- - iG_-)' - \frac{\kappa}{x}(F_- + iG_-) &= i(F_- + iG_-) \quad (\text{C.67}) \\ -i\left(\epsilon + \frac{\alpha}{x}\right)(F_- + iG_-) + (F_- + iG_-)' - \frac{\kappa}{x}(F_- - iG_-) &= -i(F_- - iG_-) \\ i\left(\epsilon + \frac{\alpha}{x}\right)(F_+ - iG_+) + (F_+ - iG_+)' + \frac{\kappa}{x}(F_+ + iG_+) &= i(F_+ + iG_+) \\ i\left(\epsilon + \frac{\alpha}{x}\right)(F_+ + iG_+) - (F_+ + iG_+)' - \frac{\kappa}{x}(F_+ - iG_+) &= i(F_+ - iG_+). \end{aligned}$$

En ajoutant et retranchant les équations (C.67), puis en divisant par i celles où i est en facteur, on obtient les deux systèmes séparés :

$$\begin{aligned} (-1 + \epsilon + \frac{\alpha}{x})F_- - G'_- - \frac{\kappa}{x}G_- &= 0 \\ (1 + \epsilon + \frac{\alpha}{x})G_- + F'_- - \frac{\kappa}{x}F_- &= 0 \end{aligned} \quad (\text{C.68})$$

$$\begin{aligned} (-1 + \epsilon + \frac{\alpha}{x})F_+ - G'_+ + \frac{\kappa}{x}G_+ &= 0 \\ (1 + \epsilon + \frac{\alpha}{x})G_+ + F'_+ + \frac{\kappa}{x}F_+ &= 0. \end{aligned} \quad (\text{C.69})$$

Ces deux systèmes s'échangent si l'on remplace les indices $-$ par des $+$ et vice-versa, et en changeant κ en $-\kappa$, donc il suffit d'étudier l'un des deux systèmes. On pose maintenant :

$$\begin{aligned} F_- &= \sqrt{1 + \epsilon} e^{-\Lambda x} (\varphi_1 + \varphi_2) ; & \Lambda &= \sqrt{1 - \epsilon^2} \\ G_- &= \sqrt{1 - \epsilon} e^{-\Lambda x} (\varphi_1 - \varphi_2) \end{aligned} \quad (\text{C.70})$$

En divisant la première des deux équations (C.68) par $\sqrt{1 - \epsilon} e^{-\Lambda x}$ et la seconde par $\sqrt{1 + \epsilon} e^{-\Lambda x}$, on obtient :

$$\begin{aligned} -\Lambda(\varphi_1 + \varphi_2) + \frac{\alpha}{x} \sqrt{\frac{1 + \epsilon}{1 - \epsilon}} (\varphi_1 + \varphi_2) + \Lambda(\varphi_1 - \varphi_2) \\ - \varphi'_1 + \varphi'_2 - \frac{\kappa}{x} (\varphi_1 - \varphi_2) &= 0 \\ \Lambda(\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{\alpha}{x} \sqrt{\frac{1 - \epsilon}{1 + \epsilon}} (\varphi_1 - \varphi_2) - \Lambda(\varphi_1 + \varphi_2) \\ + \varphi'_1 + \varphi'_2 - \frac{\kappa}{x} (\varphi_1 + \varphi_2) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{C.71})$$

Or on a :

$$\sqrt{\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}} = \frac{1+\epsilon}{\Lambda} ; \quad \sqrt{\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}} = \frac{1-\epsilon}{\Lambda} \quad (\text{C.72})$$

et on pose :

$$c_1 = \frac{\alpha}{\Lambda} ; \quad c_2 = \frac{\alpha\epsilon}{\Lambda}. \quad (\text{C.73})$$

On obtient alors, en ajoutant et soustrayant les équations (C.71) :

$$\begin{aligned} -2\Lambda\varphi_2 + \frac{c_1 - \kappa}{x}\varphi_1 + \frac{c_2}{x}\varphi_2 + \varphi_2' &= 0 \\ \frac{c_1 + \kappa}{x}\varphi_2 + \frac{c_2}{x}\varphi_1 - \varphi_1' &= 0. \end{aligned} \quad (\text{C.74})$$

On fait ensuite le changement de variable :

$$z = 2\Lambda x ; \quad f_1(z) = \varphi_1(x) ; \quad f_2(z) = \varphi_2(x) \quad (\text{C.75})$$

ceci met le système (C.74) sous la forme :

$$\begin{aligned} -f_2 + \frac{c_1 - \kappa}{z}f_1 + \frac{c_2}{z}f_2 + f_2' &= 0 \\ \frac{c_1 + \kappa}{z}f_2 + \frac{c_2}{z}f_1 - f_1' &= 0. \end{aligned} \quad (\text{C.76})$$

On développe ensuite en séries :

$$f_1(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m z^{s+m} ; \quad f_2(z) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m z^{s+m}. \quad (\text{C.77})$$

Le système (C.76) donne, pour les coefficients de z^{s-1} :

$$\begin{aligned} (c_1 - \kappa)a_0 + (c_2 + s)b_0 &= 0 \\ (c_2 - s)a_0 + (c_1 + \kappa)b_0 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{C.78})$$

Une solution non nulle existe seulement si le déterminant de ce système est nul :

$$0 = \begin{vmatrix} c_1 - \kappa & c_2 + s \\ c_2 - s & c_1 + \kappa \end{vmatrix} = c_1^2 - \kappa^2 - c_2^2 + s^2 \quad (\text{C.79})$$

Mais nous avons, avec (C.70) et (C.73) :

$$c_1^2 - c_2^2 = \alpha^2 \quad (\text{C.80})$$

Donc nous obtenons :

$$0 = \alpha^2 + s^2 - \kappa^2 ; \quad s^2 = \kappa^2 - \alpha^2 \quad (\text{C.81})$$

Nous devons prendre :

$$s = \sqrt{\kappa^2 - \alpha^2} \quad (\text{C.82})$$

pour rendre l'onde intégrable à l'origine. Dans ce cas le système (C.78) se réduit à

$$b_0 = \frac{\kappa - c_1}{c_2 + s} a_0 = \frac{s - c_2}{c_1 + \kappa} a_0. \quad (\text{C.83})$$

Le système (C.76) donne, pour les coefficients de z^{s+m-1} , le système :

$$\begin{aligned} -b_{m-1} + (c_1 - \kappa)a_m + (c_2 + s + m)b_m &= 0 \\ (c_1 + \kappa)b_m + (c_2 - s - m)a_m &= 0 \end{aligned} \quad (\text{C.84})$$

Cette dernière équation donne :

$$a_m = \frac{c_1 + \kappa}{-c_2 + s + m} b_m \quad (\text{C.85})$$

et la première devient :

$$\begin{aligned} -b_{m-1} + (c_1 - \kappa) \frac{c_1 + \kappa}{-c_2 + s + m} b_m + (c_2 + s + m)b_m &= 0 \\ [(c_1 - \kappa)(c_1 + \kappa) + (s + m)^2 - c_2^2]b_m = (-c_2 + s + m)b_{m-1} \end{aligned} \quad (\text{C.86})$$

qui, avec (C.79), donne :

$$b_m = \frac{-c_2 + s + m}{(2s + m)m} b_{m-1} = \frac{(-c_2 + s + 1)_m}{(2s + 1)_m m!} b_0. \quad (\text{C.87})$$

Et donc on a :

$$f_2(z) = b_0 z^s \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-c_2 + s + 1)_m}{(2s + 1)_m m!} z^m = b_0 z^s F(1 + s - c_2, 2s + 1, z) \quad (\text{C.88})$$

où F est la fonction hypergéométrique. On a aussi :

$$b_m = \frac{-c_2 + s + m}{c_1 + \kappa} a_m ; \quad b_{m-1} = \frac{-c_2 + s + m - 1}{c_1 + \kappa} a_{m-1}. \quad (\text{C.89})$$

La première des deux équations (C.84) devient :

$$-\frac{-c_2 + s + m - 1}{c_1 + \kappa} a_{m-1} + (c_1 - \kappa)a_m + (c_2 + s + m) \frac{-c_2 + s + m}{c_1 + \kappa} a_m = 0 \quad (\text{C.90})$$

ce qui implique :

$$a_m = \frac{-c_2 + s - 1 + m}{(2s + m)m} a_{m-1} = \frac{(-c_2 + s)_m}{(2s + 1)_m m!} a_0 \quad (\text{C.91})$$

Et donc on a :

$$f_1(z) = a_0 z^s \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-c_2 + s)_m}{(2s + 1)_m m!} z^m = a_0 z^s F(s - c_2, 2s + 1, z) \quad (\text{C.92})$$

Cette fonction hypergéométrique n'est intégrable que si les séries sont des polynômes,³ (à un coefficient près, c'est un polynôme de Laguerre) de degré n , ce qui veut dire s'il existe un entier n tel que

$$-c_2 + s + n = 0 \quad (\text{C.93})$$

$$s + n = \frac{\epsilon \alpha}{\Lambda} \quad (\text{C.94})$$

ce qui donne, en élevant au carré ;

$$\begin{aligned} (s + n)^2 (1 - \epsilon^2) &= \epsilon^2 \alpha^2 \\ (s + n)^2 &= [(s + n)^2 + \alpha^2] \epsilon^2 \\ \epsilon^2 &= \frac{1}{1 + \frac{\alpha^2}{(s + n)^2}}. \end{aligned} \quad (\text{C.95})$$

Et nous obtenons la formule de Sommerfeld des niveaux d'énergie :

$$\epsilon = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{(s + n)^2}}} ; \quad s = \sqrt{\kappa^2 - \alpha^2} ; \quad |\kappa| = j + \frac{1}{2}. \quad (\text{C.96})$$

Avec (C.75), (C.83), (C.88) et (C.92), on obtient maintenant :

$$\varphi_1(x) = a_0 (2\Lambda x)^s F(-n, 2s + 1, 2\Lambda x) \quad (\text{C.97})$$

$$\varphi_2(x) = \frac{-na_0}{c_1 + \kappa} (2\Lambda x)^s F(1 - n, 2s + 1, 2\Lambda x). \quad (\text{C.98})$$

On pose, si $n > 0$:

$$P_1 = F(1 - n, 2s + 1, 2\Lambda x) ; \quad P_2 = F(-n, 2s + 1, 2\Lambda x). \quad (\text{C.99})$$

Et on obtient :

$$F_- = \frac{\sqrt{1 + \epsilon}}{c_1 + \kappa} a_0 e^{-\Lambda x} (2\Lambda x)^s [(c_1 + \kappa)P_2 - nP_1] \quad (\text{C.100})$$

$$G_- = \frac{\sqrt{1 - \epsilon}}{c_1 + \kappa} a_0 e^{-\Lambda x} (2\Lambda x)^s [(c_1 + \kappa)P_2 + nP_1]. \quad (\text{C.101})$$

3. L'intégrabilité des fonctions de l'onde n'est pas optionnelle, elle est obligatoire puisque nous avons vu en 3.4 que la normalisation de l'onde vient du fait physique que l'énergie de l'électron est l'énergie de son onde.

On pose ensuite :

$$a_1 = \frac{\sqrt{1+\epsilon}}{c_1 + \kappa} a_0 (2\Lambda)^s. \quad (\text{C.102})$$

Et l'on obtient finalement :

$$F_- = a_1 e^{-\Lambda x} x^s [(c_1 + \kappa)P_2 - nP_1] \quad (\text{C.103})$$

$$G_- = \sqrt{\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}} a_1 e^{-\Lambda x} x^s [(c_1 + \kappa)P_2 + nP_1]. \quad (\text{C.104})$$

Comme on passe de F_- , G_- à F_+ , G_+ en remplaçant κ par $-\kappa$, on a aussi :

$$F_+ = a_2 e^{-\Lambda x} x^s [(c_1 - \kappa)P_2 - nP_1] \quad (\text{C.105})$$

$$G_+ = \sqrt{\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}} a_2 e^{-\Lambda x} x^s [(c_1 - \kappa)P_2 + nP_1] \quad (\text{C.106})$$

où a_2 est, comme a_1 , une constante complexe. Nous obtenons exactement la même condition pour l'énergie quand nous imposons aux fonctions F_+ et G_+ d'être des polynômes pour obtenir l'intégrabilité de l'onde, parce que (C.96) contient seulement κ^2 . Par conséquent si la formule (C.96) est vérifiée nous obtenons des polynômes pour les quatre fonctions radiales et l'onde est intégrable.

C.4 Calcul de l'angle d'Yvon-Takabayasi

Nous avons avec (C.62) et (C.63) :

$$e^{i\beta} = \frac{ad^*U^2 + cb^*V^2}{|ad^*U^2 + cb^*V^2|}. \quad (\text{C.107})$$

Avec (C.66) nous obtenons :

$$\begin{aligned} 2a &= F_+ + F_- + i(G_+ + G_-) ; & 2b &= F_+ - F_- + i(G_+ - G_-) \\ 2d &= F_+ + F_- - i(G_+ + G_-) ; & 2c &= F_+ - F_- - i(G_+ - G_-). \end{aligned} \quad (\text{C.108})$$

Et nous obtenons :

$$\begin{aligned} &4(ad^*U^2 + cb^*V^2) \\ &= (F_+F_+^* + F_-F_-^* - G_+G_+^* - G_-G_-^*)(U^2 + V^2) \\ &+ (F_+F_-^* + F_-F_+^* - G_+G_-^* - G_-G_+^*)(U^2 - V^2) \\ &+ i(F_+G_+^* + F_-G_-^* + G_+F_+^* + G_-F_-^*)(U^2 - V^2) \\ &+ i(F_+G_-^* + F_-G_+^* + G_+F_-^* + G_-F_+^*)(U^2 + V^2) \end{aligned} \quad (\text{C.109})$$

Avec (C.103) à (C.106), on obtient alors, si $n > 0$:

$$\begin{aligned} &F_+F_+^* + F_-F_-^* - G_+G_+^* - G_-G_-^* \\ &= \frac{2}{1+\epsilon} e^{-2\Lambda x} x^{2s} \left((|a_1|^2 + |a_2|^2)[\epsilon(c_1^2 + \kappa^2)P_2^2 + \epsilon n^2 P_1^2 - 2nc_1 P_1 P_2] \right. \\ &\quad \left. + (|a_2|^2 - |a_1|^2)2\kappa P_2(-\epsilon c_1 P_2 + nP_1) \right) \end{aligned} \quad (\text{C.110})$$

$$\begin{aligned}
& F_+ F_-^* + F_- F_+^* - G_+ G_-^* - G_- G_+^* \\
& = e^{-2\Lambda x} x^{2s} (a_1 a_2^* + a_2 a_1^*) \left(-\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon} [(c_1 - \kappa)P_2 + nP_1][(c_1 + \kappa)P_2 + nP_1] \right)
\end{aligned} \quad (C.111)$$

$$\begin{aligned}
& F_+ G_+^* + F_- G_-^* + G_+ F_+^* + G_- F_-^* \\
& = 2\sqrt{\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}} e^{-2\Lambda x} x^{2s} \left(|a_2|^2 [(c_1 - \kappa)^2 P_2^2 - n^2 P_1^2] \right. \\
& \quad \left. + |a_1|^2 [(c_1 + \kappa)^2 P_2^2 - n^2 P_1^2] \right)
\end{aligned} \quad (C.112)$$

$$\begin{aligned}
& F_+ G_-^* + F_- G_+^* + G_+ F_-^* + G_- F_+^* \\
& = e^{-2\Lambda x} x^{2s} (a_1 a_2^* + a_2 a_1^*) \sqrt{\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}} \left(\frac{[(c_1 - \kappa)P_2 - nP_1][(c_1 + \kappa)P_2 + nP_1]}{+[(c_1 + \kappa)P_2 - nP_1][(c_1 - \kappa)P_2 + nP_1]} \right).
\end{aligned} \quad (C.113)$$

Il y a une grande simplification, que nous supposerons désormais, si :

$$a_1 a_2^* + a_2 a_1^* = 0. \quad (C.114)$$

En outre nous avons :

$$c_2 = s + n = \frac{\alpha\epsilon}{\Lambda} ; \quad c_1 = \frac{\alpha}{\Lambda} = \frac{s+n}{\epsilon} = \sqrt{(s+n)^2 + \alpha^2}. \quad (C.115)$$

On a : $s \geq 0$, $n \geq 0$, par conséquent $(s+n)^2 \geq s^2$, et

$$c_1 = \sqrt{(s+n)^2 + \alpha^2} \geq \sqrt{s^2 + \alpha^2} = \sqrt{\kappa^2} = |\kappa| \geq \pm\kappa. \quad (C.116)$$

Ainsi nous avons toujours :

$$c_1 - \kappa \geq 0 ; \quad c_1 + \kappa \geq 0. \quad (C.117)$$

Si nous choisissons de poser :

$$|a_1|^2 = (c_1 - \kappa)k ; \quad |a_2|^2 = (c_1 + \kappa)k \quad (C.118)$$

où k est une constante réelle positive, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
& F_+ F_+^* + F_- F_-^* - G_+ G_+^* - G_- G_-^* \\
& = \frac{2k}{1+\epsilon} e^{-2\Lambda x} x^{2s} [2\epsilon c_1 (c_1^2 - \kappa^2) P_2^2 + 2\epsilon c_1 n^2 P_1^2 - 4n(c_1^2 - \kappa^2) P_1 P_2]
\end{aligned} \quad (C.119)$$

et comme :

$$c_1^2 - \kappa^2 = n(n+2s) ; \quad \epsilon c_1 = s+n \quad (C.120)$$

nous obtenons :

$$\begin{aligned}
& F_+ F_+^* + F_- F_-^* - G_+ G_+^* - G_- G_-^* \\
& = \frac{4nk}{1+\epsilon} e^{-2\Lambda x} x^{2s} \left((n+2s)[(s+n)P_2^2 - 2nP_1 P_2] + n(s+n)P_1^2 \right) \\
& = \frac{4nk}{1+\epsilon} e^{-2\Lambda x} x^{2s} \left[(n+2s)(\sqrt{s+n}P_2 - \frac{n}{\sqrt{s+n}}P_1)^2 + \frac{ns^2}{s+n}P_1^2 \right].
\end{aligned} \quad (C.121)$$

Et ce terme, qui est une somme de deux carrés, est toujours positif, deux polynômes de Laguerre successifs n'ayant aucun zéro commun. Puis nous obtenons

$$\begin{aligned}
 & F_+ G_+^* + F_- G_-^* + G_+ F_+^* + G_- F_-^* \\
 &= \frac{2\sqrt{1-\epsilon^2}}{1+\epsilon} e^{-2\Lambda x} x^{2s} \left(|a_2|^2 [(c_1 - \kappa)^2 P_2^2 - n^2 P_1^2] \right. \\
 &\quad \left. + |a_1|^2 [(c_1 + \kappa)^2 P_2^2 - n^2 P_1^2] \right) \\
 &= \frac{4c_1 \Lambda k}{1+\epsilon} e^{-2\Lambda x} x^{2s} [(c_1^2 - \kappa^2) P_2^2 - n^2 P_1^2] \\
 &= \frac{4\alpha n k}{1+\epsilon} e^{-2\Lambda x} x^{2s} [(n+2s) P_2^2 - n P_1^2]
 \end{aligned} \tag{C.122}$$

Ceci nous permet d'écrire l'angle d'Yvon-Takabayasi ainsi :

$$\tan \beta = \frac{\alpha [(2s+n) P_2^2 - n P_1^2]}{(n+2s)(\sqrt{s+n} P_2 - \frac{n}{\sqrt{s+n}} P_1)^2 + \frac{ns^2}{s+n} P_1^2} \times \frac{U^2 - V^2}{U^2 + V^2} \tag{C.123}$$

Le dénominateur contient seulement des sommes de carrés, qui ne peuvent pas être simultanément nuls. Par conséquent, pour tous les états liés avec un nombre quantique $n > 0$ une solution existe telle que l'onde ϕ est inversible en tout point, ou encore telle que l'angle d'Yvon-Takabayasi β est partout défini. La présence de la constante de structure fine, qui est petite, implique que l'angle β est partout petit. En outre on va maintenant expliquer pourquoi $U^2 - V^2$ est exactement nul, pour toute valeur de κ et λ , dans le plan $x^1 O x^2$. Nous partons ici de l'équation différentielle (C.57). Si f est une solution, alors g défini par $g(z) = f(-z)$ est aussi une solution. Comme il n'y a qu'une seule solution polynomiale de degré n , à un facteur près, on a nécessairement $f(-z) = \pm f(z)$ et f est soit un polynôme pair, soit un polynôme impair. Donc C est un polynôme pair ou impair de $\cos \theta$. Maintenant de (C.53) nous obtenons

$$U^2 + V^2 = \sin^2 \lambda \theta [C'^2 + (\kappa + \frac{1}{2} - \lambda)^2 C^2] \tag{C.124}$$

$$U^2 - V^2 = \sin^2 \lambda \theta [-\cos \theta C'^2 - 2(\kappa + \frac{1}{2} - \lambda) \sin \theta C' C + (\kappa + \frac{1}{2} - \lambda)^2 \cos \theta C^2]$$

De (C.54) nous obtenons

$$U^2 + V^2 = \sin^{-2\lambda} \theta [C'^2 + (\kappa + \frac{1}{2} + \lambda)^2 C^2] \tag{C.125}$$

$$U^2 - V^2 = \sin^{-2\lambda} \theta [\cos \theta C'^2 + 2(\kappa + \frac{1}{2} + \lambda) \sin \theta C' C - (\kappa + \frac{1}{2} + \lambda)^2 \cos \theta C^2]$$

Ceci donne

$$(U^2 - V^2) \left(\frac{\pi}{2} \right) = -\frac{\lambda}{|\lambda|} \left(\kappa + \frac{1}{2} - |\lambda| \right) (C' C) \left(\frac{\pi}{2} \right) \tag{C.126}$$

Si C est une constante $C' = 0$. Sinon soit C est un polynôme pair de $\cos \theta$ et alors C' est impair et le produit $C' C$ contient un facteur $\cos \theta$, ou bien C est

un polynôme impair de $\cos \theta$ et le produit $C'C$ contient aussi un facteur $\cos \theta$. Ce facteur est nul si $\theta = \frac{\pi}{2}$. Ceci prouve que

$$\beta\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad (\text{C.127})$$

Les solutions de l'équation linéaire de Dirac vérifiant (C.114) et (C.118) peuvent par conséquent être des approximations linéaires de solutions de l'équation non linéaire homogène. Maintenant si nous considérons une solution ϕ_0 de l'équation non linéaire homogène (3.10) avec une valeur non petite β_0 de l'angle d'Yvon-Takabayasi en un point M_0 de coordonnées $(x_0, y_0, 0)$, comme l'équation non linéaire homogène est globalement invariante sous la jauge chirale (3.31), on pose

$$\phi = e^{-i\frac{\beta_0}{2}} \phi_0 \quad (\text{C.128})$$

et l'on obtient

$$(\phi\bar{\phi})(M_0) = e^{-i\frac{\beta_0}{2}} \phi_0 e^{-i\frac{\beta_0}{2}} \bar{\phi}_0 = e^{-i\beta_0} \rho_0 e^{i\beta_0} = \rho_0. \quad (\text{C.129})$$

Et ϕ a au point M_0 un angle β nul, donc l'équation (3.10) en ce point est exactement l'équation de Dirac, nous obtenons la séparation des variables en ce point, nous obtenons le système angulaire (C.38) et le système radial (C.39) qui est identique au système radial (C.40) de l'équation linéaire. Alors l'angle β est nul dans tout le plan $z = 0$ et le système (3.39) est identique à (C.40) dans tout le plan $z = 0$. Alors la nécessité de l'intégrabilité impose l'existence de polynômes radiaux et nous obtenons la quantification des niveaux d'énergie et la formule de Sommerfeld (C.96).

C.5 Polynômes radiaux de degré 0

Pour obtenir absolument tous les résultats de l'équation de Dirac, nous avons une dernière chose à expliquer : pourquoi nous obtenons $2\mathbf{n}^2$ états différents de nombre quantique principal $\mathbf{n} = |\kappa| + n$, et nous devons retourner au cas particulier où les polynômes radiaux sont constants. Nous partons directement de (C.64), et nous posons :

$$a = a_0 e^{-\Lambda x} x^s ; \quad b = b_0 e^{-\Lambda x} x^s ; \quad c = c_0 e^{-\Lambda x} x^s ; \quad d = d_0 e^{-\Lambda x} x^s. \quad (\text{C.130})$$

Nous obtenons de (C.39) :

$$\begin{aligned} e^{-\Lambda x} (i\epsilon d_0 x^s + i\alpha d_0 x^{s-1} - \Lambda d_0 x^s + s d_0 x^{s-1} + \kappa b_0 x^{s-1}) &= i a_0 e^{-\Lambda x} x^s \\ e^{-\Lambda x} (-i\epsilon c_0 x^s - i\alpha c_0 x^{s-1} + \Lambda c_0 x^s - s c_0 x^{s-1} - \kappa a_0 x^{s-1}) &= -i b_0 e^{-\Lambda x} x^s \\ e^{-\Lambda x} (i\epsilon b_0 x^s + i\alpha b_0 x^{s-1} + \Lambda b_0 x^s - s b_0 x^{s-1} - \kappa d_0 x^{s-1}) &= i c_0 e^{-\Lambda x} x^s \\ e^{-\Lambda x} (-i\epsilon a_0 x^s - i\alpha a_0 x^{s-1} - \Lambda a_0 x^s + s a_0 x^{s-1} + \kappa c_0 x^{s-1}) &= -i d_0 e^{-\Lambda x} x^s. \end{aligned} \quad (\text{C.131})$$

Ceci est équivalent à l'ensemble formé par les quatre systèmes suivants :

$$\begin{aligned}\kappa b_0 + (i\alpha + s)d_0 &= 0 \\ (i\alpha - s)b_0 - \kappa d_0 &= 0\end{aligned}\tag{C.132}$$

$$\begin{aligned}-\kappa a_0 - (i\alpha + s)c_0 &= 0 \\ -(i\alpha - s)a_0 + \kappa c_0 &= 0\end{aligned}\tag{C.133}$$

$$\begin{aligned}-ia_0 + (i\epsilon - \Lambda)d_0 &= 0 \\ -(i\epsilon + \Lambda)a_0 + id_0 &= 0\end{aligned}\tag{C.134}$$

$$\begin{aligned}ib_0 - (i\epsilon - \Lambda)c_0 &= 0 \\ (i\epsilon + \Lambda)b_0 - ic_0 &= 0.\end{aligned}\tag{C.135}$$

L'annulation du déterminant dans (C.132) et (C.133) donne à nouveau (C.81) et (C.82). L'annulation du déterminant dans (C.134) et (C.135) est simplement équivalent à $\Lambda^2 = 1 - \epsilon^2$, qui résulte de la définition de Λ . Chaque système (C.132) à (C.135) se réduit donc à une seule équation :

$$\begin{aligned}\kappa d_0 &= (i\alpha - s)b_0 \\ \kappa c_0 &= (i\alpha - s)a_0 \\ d_0 &= (\epsilon - i\Lambda)a_0 \\ b_0 &= (\epsilon + i\Lambda)c_0.\end{aligned}\tag{C.136}$$

On obtient alors :

$$\kappa d_0 = \kappa(\epsilon - i\Lambda)a_0 = (i\alpha - s)b_0 = (i\alpha - s)(\epsilon + i\Lambda)c_0 = \frac{(i\alpha - s)^2(\epsilon + i\Lambda)}{\kappa}a_0.\tag{C.137}$$

On n'a une solution non nulle que si :

$$\begin{aligned}\kappa(\epsilon - i\Lambda) &= \frac{(i\alpha - s)^2(\epsilon + i\Lambda)}{\kappa} \\ \kappa^2(\epsilon - i\Lambda)^2 &= (s - i\alpha)^2 \\ \kappa(\epsilon - i\Lambda) &= \pm(s - i\alpha).\end{aligned}\tag{C.138}$$

Comme ϵ , s , Λ et α sont positif, nous obtenons finalement

$$|\kappa| = \frac{s}{\epsilon} = \frac{\alpha}{\Lambda}.\tag{C.139}$$

Cette dernière égalité donne à nouveau la formule des niveaux d'énergie (C.96) avec $n = 0$. Comme κ vient avec sa valeur absolue, nous pouvons avoir aussi

bien $\kappa < 0$ que $\kappa > 0$. Mais le calcul des solutions de C. G. Darwin, qui travaille avec des constantes réelles, et non pas avec des constantes complexes à ce stade du calcul, interdit à κ d'être négatif, et c'est cela qui permet, pour un nombre quantique principal $\mathbf{n} = n + |\kappa|$, d'obtenir $\mathbf{n}(\mathbf{n} + 1) + \mathbf{n}(\mathbf{n} - 1) = 2\mathbf{n}^2$ états. Ce qui arrive en réalité est que changer de signe κ revient à changer V en $-V$. Et si nous changeons le signe de κ et de V , alors **a**, **b**, **c**, **d** sont invariants si $n = 0$, et l'onde reste inchangée. Changer le signe de κ n'apporte pas de solution supplémentaire et nous pouvons donc n'utiliser que les solutions avec $\kappa > 0$, dans le cas $n = 0$. Et ceci permet d'obtenir le bon nombre d'états.

La formule obtenue pour les niveaux d'énergie ne rend pas compte de l'effet Lamb, qui donne, si $n > 0$, un très petit écart entre les niveaux d'énergie avec les mêmes autres nombres quantiques mais des signes opposés de κ . Si la formule (C.96) n'était pas la même pour deux valeurs opposées de κ nous ne serions pas capable d'obtenir quatre fonctions radiales polynômiales avec seulement une condition qui donne la quantification des niveaux d'énergie. Là aussi le modèle standard a déjà une réponse avec la polarisation du vide. Mais le calcul doit être révisé, à la fois pour éviter les intégrales divergentes et pour utiliser nos solutions à la place de celles de Darwin venant de l'équation non relativiste de Pauli.

Bibliographie

- [1] G. Bardout, G. Lochak, and D. Fargue. Sur la présence de monopôles légers au pôle nord. *Ann. Fond. Louis de Broglie*, 32 :551, 2007.
- [2] W. E. Baylis. *Clifford (Geometric) Algebras*, chapter The Paravector Model of Spacetime, pages 237–296. Birkhauser, Boston, 1996.
- [3] R. Boudet. The Takabayasi moving frame, from a potential to the Z boson. In S. Jeffers and J.P. Vigiér, editors, *The Present Status of the Quantum Theory of the Light*. Kluwer, Dordrecht, 1995.
- [4] R. Boudet. *Quantum Mechanics in the Geometry of Space-Time*. Springer, Heidelberg Dordrecht London New York, 2011.
- [5] Gaston Casanova. *L'algèbre vectorielle*. Presses Universitaires de France, Paris, 1976.
- [6] C.G.Darwin. *Proc. R. Soc. Lond.*, 118 :554, 1928.
- [7] C. Daviau. *Equation de Dirac non linéaire*. PhD thesis, Université de Nantes, 1993.
- [8] C. Daviau. Solutions of the Dirac equation and of a nonlinear Dirac equation for the hydrogen atom. *Adv. Appl. Clifford Algebras*, 7((S)) :175–194, 1997.
- [9] C. Daviau. Sur l'équation de dirac dans l'algèbre de pauli. *Ann. Fond. L. de Broglie*, 22(1) :87–103, 1997.
- [10] C. Daviau. Sur les tenseurs de la théorie de Dirac en algèbre d'espace. *Ann. Fond. Louis de Broglie*, 23(1), 1998.
- [11] C. Daviau. Vers une mécanique quantique sans nombre complexe. *Ann. Fond. L. de Broglie*, 26(special) :149–171, 2001.
- [12] C. Daviau. Interprétation cinématique de l'onde de l'électron. *Ann. Fond. L. de Broglie*, 30(3-4), 2005.
- [13] C. Daviau. On the electromagnetism's invariance. *Ann. Fond. L. de Broglie*, 33 :53–67, 2008.
- [14] C. Daviau. *L'espace-temps double*. JePublie, Pouillé-les-coteaux, 2011.
- [15] C. Daviau. Cl_3^* invariance of the Dirac equation and of electromagnetism. *Adv. Appl. Clifford Algebras*, 22(3) :611–623, 2012.

- [16] C. Daviau. *Double Space-Time and more*. JePublie, Pouillé-les-coteaux, 2012.
- [17] C. Daviau. *Nonlinear Dirac Equation, Magnetic Monopoles and Double Space-Time*. CISP, Cambridge UK, 2012.
- [18] C. Daviau. Invariant quantum wave equations and double space-time. *Adv. in Imaging and Electron Physics*, 179, chapter 1 :1–137, 2013.
- [19] C. Daviau and J. Bertrand. A lepton dirac equation with additional mass term and a wave equation for a fourth neutrino. *Ann. Fond. Louis de Broglie*, 38, 2013.
- [20] C. Daviau, D. Fargue, D. Priem, and G. Racineux. Tracks of magnetic monopoles. *Ann. Fond. Louis de Broglie*, 38, 2013.
- [21] O. Costa de Beauregard. Sur un tenseur encore ininterprété en théorie de dirac. *Ann. Fond. Louis de Broglie*, 14-3 :335–342, 1989.
- [22] O. Costa de Beauregard. Induced electromagnetic inertia and physicality of the 4vector potential. *Physics Essays*, 10-4 :646–650, 1997.
- [23] Louis de Broglie. Recherches sur la théorie des quantas. *Ann. Fond. Louis de Broglie*, 17(1), 1924.
- [24] Louis de Broglie. *L'électron magnétique*. Hermann, Paris, 1934.
- [25] Louis de Broglie. *La mécanique du photon, Une nouvelle théorie de la lumière : tome 1 La lumière dans le vide*. Hermann, Paris, 1940.
- [26] Louis de Broglie. *tome 2 Les interactions entre les photons et la matière*. Hermann, Paris, 1942.
- [27] René Deheuvels. *Tenseurs et spineurs*. PUF, Paris, 1993.
- [28] P.A.M. Dirac. The quantum theory of the electron. *Proc. R. Soc. Lond.*, 117 :610–624, 1928.
- [29] E. Elbaz. *De l'électromagnétique à l'électro-faible*. Ellipses, Paris, 1989.
- [30] D. Hestenes. *Space-Time Algebra*. Gordon and Breach, New-York, 1966, 1987, 1992.
- [31] D. Hestenes. Space-time structure of weak and electromagnetic interactions. *Found. of Phys.*, 12 :153–168, 1982.
- [32] D. Hestenes. A unified language for Mathematics and Physics and Clifford Algebra and the interpretation of quantum mechanics. In Chisholm and AK Common, editors, *Clifford Algebras and their applications in Mathematics and Physics*. Reidel, Dordrecht, 1986.
- [33] H. Poincaré. Remarques sur une expérience de M. Birkeland. *C.R.A.S.*, 123 :530–533, 1896.
- [34] N. Ivoilov. Low energy generation of the strange radiation. *Ann. Fond. Louis de Broglie*, 31(1) :115–123, 2006.
- [35] H. Krüger. New solutions of the dirac equation for central fields. In D. Hestenes and A. Weingartshofer, editors, *The Electron*. Kluwer, Dordrecht, 1991.

- [36] A. Lasenby, C. Doran, and S. Gull. A multivector derivative approach to lagrangian field theory. *Found. of Phys.*, 23 :1295–1327, 1993.
- [37] G. Lochak. Sur un monopôle de masse nulle décrit par l'équation de Dirac et sur une équation générale non linéaire qui contient des monopôles de spin $\frac{1}{2}$. *Ann. Fond. Louis de Broglie*, 8(4), 1983.
- [38] G. Lochak. Sur un monopôle de masse nulle décrit par l'équation de Dirac et sur une équation générale non linéaire qui contient des monopôles de spin $\frac{1}{2}$ (partie 2). *Ann. Fond. Louis de Broglie*, 9(1), 1984.
- [39] G. Lochak. Wave equation for a magnetic monopole. *Int. J. of Th. Phys.*, 24 :1019–1050, 1985.
- [40] G. Lochak. Liste des publications. *Ann. Fond. Louis de Broglie*, 26 :31–42, 2001.
- [41] G. Lochak. Photons électriques et photons magnétiques dans la théorie du photon de Louis de Broglie (un renouvellement possible de la théorie du champ unitaire d'Einstein). *Ann. Fond. Louis de Broglie*, 29 :297–316, 2004.
- [42] G. Lochak. “photons électriques” and “photons magnétiques” dans la théorie du photon de de broglie. *Ann. Fond. Louis de Broglie*, 33 :107–127, 2008.
- [43] G. Lochak. A theory of light with four different photons : electric and magnetic with spin 1 and spin 0. *Ann. Fond. Louis de Broglie*, 35 :1–18, 2010.
- [44] M.A. Naïmark. *Les représentations linéaires du groupe de Lorentz*. Dunod, Paris, 1962.
- [45] D. Priem, C. Daviau, and G. Racineux. Transmutations et traces de monopôles obtenues lors de décharges électriques. *Ann. Fond. Louis de Broglie*, 34 :103, 2009.
- [46] M. E. Rose. *Relativistic electron theory*. John Wiley and sons, New-York, London, 1960.
- [47] E. Schrödinger. *Annalen der Physik* (4), 81, 1926.
- [48] T. Takabayasi. Relativistic hydrodynamics of the Dirac matter. *Theor. Phys. Suppl.*, 4, 1957.
- [49] M. A. Tonnelat. *Les théories unitaires de l'électromagnétisme et de la gravitation*. Gauthier-Villars, Paris, 1965.
- [50] V.F.Mikhailov. Observation of the magnetic charge effect in the experiments with ferromagnetic aerosols. *Ann. Fond. Louis de Broglie*, 12(4) :491–524, 1987.
- [51] S. Weinberg. A model of leptons. *Phys. Rev. Lett.*, 19 :1264–1266, 1967.

Imprimé en France
Janvier 2014
Dépot légal : Janvier 2014.