Opérations avec les fractions

1 Fractions et nombres relatifs

1.1 Rappels sur les nombres relatifs

Théorème 1 Addition et soustraction de nombres relatifs
Pour ajouter deux nombres relatifs on garde le signe du plus éloigné de 0 et :

1. *on ajoute les distances à 0 si les deux nombres ont le même signe.*

2. *on soustrait les distances à 0 si les deux nombres n'ont pas le même signe.*

Exemples 1 *Effectuer les opérations suivantes :*

(-3)+(+2)= .... *(-4)-(-1)=* .... *(+8)+(-7)=* ....
(-3)+(-10)= .... *(+7)-(-3)=* .... *(-5)+(+6)=* ....
(-3)+(+6)= .... *(-4)+(-2)=* .... *(-9)+(-11)=* ....

Théorème 2 Multiplication et division de nombres relatifs
Pour multiplier (ou diviser) deux nombres relatifs, on multiplie (ou on divise) les distances à 0 et on met le signe + (si les deux nombres ont le même signe) ou le signe - (si les deux nombres ont des signes différents).

Exemples 2 *Effectuer les opérations suivantes :*

$(-3) \times (+2) =$ .... $(-3) \div (+2) =$ .... $(-7) \times (+5) =$ ....
$(-3) \times (+0) =$ .... $(+3) \div (+7) =$ .... $(-3) \times (-6) =$ ....
$(-8) \times (+1) =$ .... $(-3) \div (-2) =$ .... $(-5) \times (+8) =$ ....

1.2 Le signe d'une fraction

Théorème 3 *ou doit on mettre le signe dans une fraction*
Si on a un nombre négatif au numérateur ou au dénominateur d'une fraction, on peut le mettre où on veut cela ne change rien.

$$\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b} \tag{1}$$

Par contre si il y a un nombre négatif au numérateur et au dénominateur, on peut les enlever tous les deux.

$$\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b} \tag{2}$$

Exemples 3 *Compléter avec = ou ≠.*
$\frac{-1}{-2} \cdots\cdots \frac{1}{2}$ $\quad -\frac{5}{7} \cdots\cdots + \frac{5}{7}$ $\quad -\frac{1}{-3} \cdots\cdots - \frac{-1}{3}$

$-\frac{-3}{4} \cdots\cdots \frac{3}{-4}$ $\quad \frac{-9}{5} \cdots\cdots \frac{9}{-5}$ $\quad \frac{-6}{-7} \cdots\cdots \frac{6}{-7}$

$\frac{0}{-1} \cdots\cdots \frac{0}{1}$ $\quad -\frac{-1}{-5} \cdots\cdots \frac{1}{5}$ $\quad \frac{-2}{-3} \cdots\cdots \frac{-2}{3}$

2 Addition et soustraction de fractions

Théorème 4 *Addition et soustraction de fractions*
Pour ajouter deux fractions qui ont le même dénominateur, il suffit d'ajouter les numérateurs sans ajouter les dénominateurs.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b} \tag{3}$$

Exemples 4 *Effectuer les additions suivantes*
$\frac{3}{4} + \frac{6}{4} =$ ....

$\frac{-5}{11} + \frac{6}{11} =$ ....

$\frac{8}{-3} + \frac{-2}{-3} =$ ....

$\frac{1}{-5} + \frac{-8}{5} =$ ....

$\frac{-2}{7} + \frac{0}{7} =$ ....

$\frac{5}{4} + \frac{-1}{8} =$ ....

$\frac{3}{4} + \frac{13}{12} =$ ....

$\frac{-3}{6} + \frac{6}{24} =$ ....

$\frac{-5}{6} + 3 =$ ....

$\frac{-3}{5} - 1 =$ ....

Remarque 1 *Addition si les dénominateurs sont différents*
Si les dénominateurs des deux fractions que l'on veut additionner sont différents, on doit transformer l'une des deux fractions, voire les deux, afin d'obtenir le même dénominateur.

Exemples 5 *Effectuer les additions suivantes*

$\frac{3}{4} + \frac{1}{2} =$	$\frac{-5}{12} + \frac{5}{6} =$ ....
$\frac{8}{-3} + \frac{-2}{-9} =$	$\frac{1}{-15} + \frac{-8}{5} =$ ....
$\frac{-2}{3} + \frac{0}{4} =$	$\frac{5}{4} + \frac{-1}{7} =$ ....
$\frac{3}{15} + \frac{13}{12} =$	$\frac{-3}{20} + \frac{7}{15} =$ ....

Remarque 2 *dénominateur commun Quand on ne peut pas mettre l'une des fractions au même dénominateur que l'autre. Il faut changer le dénominateur de chacune des deux fractions.*

On peut prendre comme dénominateur commun le produit des deux dénominateurs, mais ce n'est pas forcément la meilleure solution.

Exemples 6 *effectuer les additions suivantes après avoir astucieusement changé les dénominateurs*

$\frac{7}{4} + \frac{5}{6} =$ ....

$\frac{5}{8} + \frac{7}{6} =$ ....

$\frac{3}{5} + \frac{8}{2} =$ ....

$\frac{7}{12} + \frac{5}{20} =$ ....

3 Multiplication de fractions

Théorème 5 *Multiplication de fractions*
Pour multiplier des fractions, il suffit de multiplier les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.
C'est à dire :

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d} \tag{4}$$

Exemples 7 *Exemples multiplication de fractions*

$\frac{3}{4} \times \frac{6}{7} =$ .... $\frac{-5}{4} \times \frac{6}{-7} =$ ....

$\frac{8}{-3} \times \frac{-2}{3} =$ .... $\frac{1}{-5} \times \frac{8}{3} =$ ....

$\frac{-2}{4} \times \frac{0}{7} =$ .... $\frac{5}{4} \times \frac{-1}{7} =$ ....

$\frac{3}{4} \times \frac{16}{17} =$ .... $\frac{-3}{-7} \times \frac{6}{7} =$ ....

$\frac{3}{4} \times 9 =$ .... $\frac{6}{7} \times 3 =$ ....

$\frac{3}{4} \times \frac{4}{3} =$ .... $\frac{2}{5} \times \frac{7}{4} \times \frac{5}{7} =$ ....

Exemples 8 *Effectuer les multiplications suivantes en essayant de simplifier* ***avant de faire le calcul****.*

$\frac{7}{3} \times \frac{3}{5} =$...................................... $\frac{9}{8} \times \frac{8}{13}$......................................

$\frac{1}{3} \times \frac{3}{11} =$.................................... $\frac{9}{8} \times \frac{8}{13} \times \frac{7}{9}$....................................

$\frac{7}{3} \times \frac{5}{7} =$ .... $\frac{9}{8} \times \frac{8}{13} \times \frac{1}{9}$ ....

4 Division de fractions

Définition 1 *Inverse d'une fraction*
L'inverse de la fraction $\frac{a}{b}$ *c'est la fraction* $\frac{b}{a}$.

Exemples 9 *Exemples d'inverses*
Quel est l'inverse de $\frac{3}{4}$ .... *Quel est l'inverse de* $\frac{2}{7}$ ....

Quel est l'inverse de $\frac{-1}{2}$ .... *Quel est l'inverse de* -2 ....

Quel est l'inverse de $\frac{8}{4}$ .... *Quel est l'inverse de* $\frac{0}{-7}$ ....

Quel est l'inverse de $\frac{-1}{9}$ .... *Quel est l'inverse de* $\frac{8}{2}$ ....

Remarque 3 *0 n'a pas d'inverse, 1 est son propre inverse, -1 est son propre inverse.*

Remarque 4 *Quand on multiplie un nombre par son inverse on obtient toujours 1.*

Théorème 6 *Division de nombres relatifs*
Pour diviser par une fraction, on multiplie par son inverse.

Exemples 10 *Exemple de division de fractions*
$\frac{8}{5} \div \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{7}} = \frac{8}{5} \times \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{5}} = \frac{56}{25}$

$\frac{1}{-3} \div \frac{8}{7} =$ ....

$\frac{-8}{5} \div \frac{8}{-2} =$ ....

$\frac{-8}{5} \div 3 =$ ....

$9 \div \frac{5}{-7} =$ ....

$\frac{11}{9} \div \frac{1}{3} =$ ....

5 Enchaînement d'opérations avec les fractions

Théorème 7 *Règle d'enchaînements d'opérations avec les fractions*
Quand on faitun calcul avec des fractions on respecte les priorités.

1. *On commence par les calculs entre parenthèses.*

2. *On fait ensuite les multiplications et les divisions en commençant par celle qui est la plus à gauche.*

3. *On fait enfin les additions et les soustractions en commençant par la plus à gauche.*

Exemples 11 *Effectuer les calculs suivants :*

$\frac{3}{4} - \frac{1}{2} + \frac{7}{2} =$ ....

$\frac{3}{4} - \frac{1}{-5} \times \frac{7}{2} =$ ....

$\frac{-2}{7} \div \frac{1}{5} - \frac{1}{2} \times \frac{8}{3} =$ ....

$\frac{5}{6} + \frac{3}{2} - \frac{8}{7} =$ ....