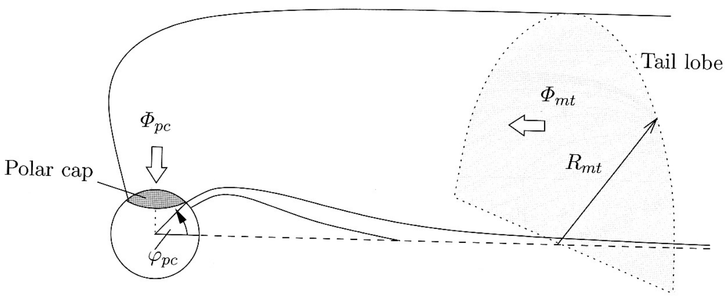
TD 6 : Magnétohydrodynamique

Exercice 1: Taille de la queue magnétosphérique terrestre



1) Le schéma ci-dessus représente la queue magnétosphérique terrestre. Les lignes de champ constituant le lobe magnétosphérique nord prennent racine à l'intérieur d'une surface entourant le pôle magnétique et au contour quasi-circulaire, appelée *calotte polaire*. La latitude du bord de la calotte polaire (ovale auroral) est estimée à environ 75^o.

Sachant que le champ magnétique terrestre est approximativement dipolaire d'axe nord-sud et que le champ magnétique mesuré au pôle nord (à la surface de la Terre) vaut 3.10^{-5} T, évaluer le flux magnétique Φ entrant dans la calotte polaire.

2) En déduire le rayon moyen de la queue magnétosphérique lointaine (en unité de rayons terrestres) sachant que le champ magnétique dans les lobes est environ $B_L = 25$ nT.

Rappel utile : la composante radiale du champ magnétique crée par un dipôle de moment $\vec{\mathcal{M}}$ vaut (l'angle θ est la colatitude)

$$B_r(r,\theta) = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{\mathcal{M}\,\cos\theta}{r^3}.$$

Exercice 2 : Ondes MHD en plasma homogène

On se propose de dériver la relation de dispersion des modes d'oscillations d'un plasma homogène décrit par les équations de la MHD idéale. La masse volumique du plasma au repos est notée ρ_0 et ce plasma est plongé dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}_0 = B_0\,\vec{e}_z$.

Cet état stationnaire est perturbé par l'introduction d'un champ de vitesse $\vec{u}_1$, qui modifie le champ magnétique $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{b}_1$, la masse volumique $\rho = \rho_0 + \rho_1$, la pression $P = P_0 + p_1$, la température etc. On supposera néanmoins que les perturbations sont d'amplitude suffisamment faible pour pouvoir linéariser les équations de la MHD.

A - Cas d'un plasma froid

On fait tout d'abord l'hypothèse que le plasma est froid (β faible).

1) Écrire les équations de la MHD idéale dans ce cas.

2) Linéariser les équations précédentes.

3) On cherche des solutions sous la forme d'onde plane du type $e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$ avec le vecteur d'onde $\vec{k}$ dans le plan (xOz).

Trouver les deux jeux d'équations reliant les composantes de la vitesse et celles du champ magnétique perturbé.

4) En déduire l'équation de dispersion des ondes MHD en plasma froid, c'est-à-dire la relation entre la fréquence ω et les composantes (k_x, k_z) du vecteur d'onde pour que l'onde plane puisse se propager.

Montrer en particulier qu'il y a deux modes possibles de propagation et préciser leur vitesse de phase ainsi que leur polarisation (direction de $\vec{u}_1$).

5) L'un des deux modes précédents ne modifie ni la masse volumique, ni la pression magnétique. Identifier le. On l'appelle mode d'Alfvén torsionnel (shear Alfven wave in english).

6) On considère l'autre mode (mode d'Alfvèn compressionnel). Décrire physiquement la perturbation dans le cas d'une propagation perpendiculaire au champ magnétique $\vec{B}_0$.

B - Cas d'un plasma à β fini

On relaxe l'hypothèse "plasma froid", c'est-à-dire qu'on tient compte maintenant de la pression thermique. Pour fermer le système d'équations, on adopte une relation polytropique du type $P/\rho^\gamma = \text{cste}$, avec γ une constante positive, qu'on peut prendre égale à 5/3 si l'évolution du plasma est adiabatique, ou égale à 1 si cette évolution est isotherme...

1) Écrire la relation existant entre les perturbations de pression p_1 et de masse volumique ρ_1. On introduira la vitesse du son dans le plasma $c_s = \sqrt{\gamma P_0/\rho_0} = \sqrt{\gamma k_B\,(T_e + T_i)/m_i}$.

2) Établir le nouveau système d'équations linéaires satisfaites par les composantes de $\vec{u}_1$ et de $\vec{b}_1$.

3) Montrer que les composantes du vecteur $\vec{u}_1$ sont solutions du système homogène suivant:

$$\begin{pmatrix} \omega^2 - k_x^2\,c_s^2 - k^2\,c_A^2 & 0 & -k_x\,k_z\,c_s^2 \\ 0 & \omega^2 - k_z^2\,c_A^2 & 0 \\ -k_x\,k_z\,c_s^2 & 0 & \omega^2 - k_z^2\,c_s^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} = 0$$

où $k^2 = k_x^2 + k_z^2$ et $c_A^2 = B_0^2/(\mu_0\rho_0)$ est le carré de la vitesse d'Alfvèn.

4) En déduire la relation de dispersion des modes MHD dans ce cas. Montrer qu'il y a trois modes de propagation possibles : le mode d'Alfvén torsionnel et deux modes magnétosonores dits lent et rapide.

5) On se place en propagation purement parallèle ($k_x = 0$). Calculer la vitesse de phase de ces trois modes et décrire physiquement l'effet de ces modes sur la masse volumique du plasma et le champ magnétique.

Exercice 3: Pression et tension magnétiques *(à faire chez vous)*

Pour chacun des champs magnétiques suivants :

$$\text{(a)} \quad \vec{B}(x,y,z) = (y, 2x, 0)$$
$$\text{(b)} \quad \vec{B}(x,y,z) = (2y, 1, 0)$$
$$\text{(c)} \quad \vec{B}(r,\theta,z) = (0, r\exp(-2r^2), 0)$$

1) Représenter quelques lignes de champ sur un schéma,

2) Calculer les forces de pression et de tension magnétiques et compléter le schéma précédent,

3) En calculant directement la force de Lorentz $\vec{J} \wedge \vec{B}$ vérifier qu'elle est bien la somme des forces de pression et de tension magnétiques.