Université Mouloud Mammeri Tizi-Ouzou

Faculté de Genie électrique

Equation différentielle

Année scolaire 2015-2016

Menguelti Ali

Table des matières

Chapitre 1

Équations différentielles ordinaires

Dans ce cours, on introduit la notion d'équation différentielle, et on donne des méthodes pour résoudre quelques types des équations différentielles du premier et du second ordre.

1.0.1 Pré-requis

Avant d'aborder ce cours, il faut être capable de :
– dériver des fonctions réelles "simples"
– intégrer des fonctions réelles "simples"
– faire une intégration par parties

1.1 Quelques rappels d'intégration des fonctions continus

Définition 1.1 (Primitives) – *Soit deux fonctions f et F définies sur un intervalle I.On dit que la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle I si et seulement si :*

1. *La fonction F est dérivable sur I ;*
2. $\forall x \in I,\ F'(x) = f(x)$

Théorème 1.2 (Deux primitives différent d'une constante) *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I et deux primitives $F, G : \to \mathbb{R}$ de la fonction f sur l'intervalle I. Alors ces deux primitives différent d'une constante :*

$$\exists C \in \mathbb{R}, tel\ que\ \forall x \in I,\ F(x) = G(x) + C$$

1.1.1 Théorème fondamental du calcul

Faisant le lien entre le calcul différentiel et le calcul intégral en montrant que la dérivation et l'intégration sont les opérations inverses l'une de l'autre, le théoréme fondamental du calcul a deux facettes.

Théorème 1.3 (Théorème fondamental du calcul) *Soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors pour tout $x \in [a,b]$*

$$\frac{d}{dx}\int_{[a,x]} f(t)\,dt = f(x)$$

Soient $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et dérivable. Alors

$$\int_{[a,b]} F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

En vertu de ce théorème, il suffit donc, pour évaluer

$$\int_{[a,b]} f(x)\,dx$$

de trouver une fonction $F(x)$ telle que $F'(x) = f(x)$. On a alors tout simplement

$$\int_{[a,b]} f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Pour abréger l'écriture, on écrit

$$F(b) - F(a) = F(x)|_a^b$$

*Une telle fonction F se nomme **primitive** de f (puisque que f est sa dérivée) ou encore intégrale indéfinie de f. On la dénote par*

$$\int f(x)\,dx$$

En d'autres mots,

$$F(x) = \int f(x)\,dx \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$$

Une primitive n'est définie qu'à l'addition d'une constante prés.

Exemple.

Si $p \in \mathbb{Q}$, $p \neq -1$,

$$\int x^p dx = \frac{x^{1+p}}{1+p}$$

puisque

$$\frac{dx^{1+p}}{dx} = (1+p)\,x^p$$

1.1.2 Propriétés de l'intégrale

Les trois propriétés essentielles de l'intégrale d'une fonction continue sont la linéarité, la positivité et l'additivité.

Théorème 1.4 (Linéarité de l'intégrale) *Soient f_1 et $f_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ des fonctions continues et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ des nombres. Alors*

$$\int [\alpha f_1(x) + \beta f_2(x)]\,dx = \alpha \int f_1(x)\,dx + \beta \int f_2(x)\,dx$$

Théorème 1.5 (Positivité de l'intégrale) *Soient f_1 et $f_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ des fonctions continues telle que*

$$f_1(x) \leqslant f_2(x) \text{ pour } x \in [a,b]$$

Alors

$$\int f_1(x)\,dx \leqslant \int f_2(x)\,dx \text{ pour } x \in [a,b]$$

Théorème 1.6 (Additivité de l'intégrale) *Soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $a < c < b$. Alors*

$$\int_{[a,b]} f(x)\,dx = \int_{[a,c]} f(x)\,dx + \int_{[c,b]} f(x)\,dx$$

Le théorème fondamental du calcul met en lumière deux autres propriétés de l'intégrale : l'intégration par parties qui correspond à la régle de dérivation d'un produit et la formule de changement de variable qui correspond à la régle de dérivation en chaine

Théorème 1.7 (Formule d'intégration par parties) *Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I. On suppose que les fonctions dérivées u' et v'sont continues sur l'intervalle I. Alors, pour tous réels a et b de I,*

$$\int u(x)\,v'(x)\,dx = u(x)\,v(x) - \int u'(x)\,v(x)\,dx$$

Exemple.

Soit à évaluer

$$\int_{(0,1)} x\sqrt{1+x}dx$$

Posant

$$u = x \quad \Longrightarrow \quad du = dx$$

$$dw = \sqrt{1+x}dx \quad \Longrightarrow \quad w = \frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\int x\sqrt{1+x}dx &= \frac{2x}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}} - \int \frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\,dx \\
&= \frac{2x}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15}(x+1)^{\frac{5}{2}} \\
&= \frac{2}{15}(3x-2)(1+x)^{\frac{3}{2}}
\end{aligned}$$

et

$$\int_0^1 x\sqrt{1+x}dx = \frac{2}{15}(3-2)(1+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{15}(-2) = \frac{4}{15}\left(\sqrt{2}+1\right)$$

Théorème 1.8 *Soit $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continûment dérivable strictement monotone et telle que $\varphi([a,b]) = [c,d]$. Pour toute fonction continue $f : [c,d] \to \mathbb{R}$, on a*

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\,|\varphi'(t)|\,dt$$

Exemple.

Soit à évaluer

$$\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}dx$$

On pose $t = 1 + x^2$ de telle sorte que

$$\frac{dt}{dx} = 2x \geqslant 0$$

l'intervalle $0 \leqslant x \leqslant 1$ correspondant à l'intervalle $1 \leqslant t \leqslant 2$. On a

$$\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \sqrt{t}dt = \left[\frac{1}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_1^2 = \frac{2}{3}\left(\sqrt{2}-1\right)$$

1.1.3 Dés primitives à connaître sans faute !

$\int \cos(x)\,dx = \sin(x)$	$\int \sin(x)\,dx = -\cos(x)$
$\int e^x dx = e^x$	$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\alpha \neq -1$
$\int \frac{1}{x}dx = \ln\lvert x\rvert$	$\int \frac{1}{x^2+1}dx = \arctan(x)$
$\int Ch(x)\ \ dx = Sh(x)$	$\int Sh(x)\ \ dx = Ch(x)$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin(x)$	$\int \frac{1}{\cos^2(x)}\ dx = \tan(x)$
$\int \frac{1}{\sin^2(x)}\ dx = -\cot(x)$	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx = \arg sh(x)$
$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx = \arg ch(x) \quad \forall x > 0$	

1.1.4 Logariteme et exponentielle

Les fonctions logarithmique et exponentielle sont étroitement associées à l'étude des phénoménes de croissance

Le logarithme

On sait que la fonction $x \rightarrow \dfrac{1}{x}$ n'admet pas de primitive rationnelle. Le logarithme est la fonction $\ln :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

figure 1.1. En vertu du théorème fondamental du calcul , le logarithme est une fonction dérivable et par

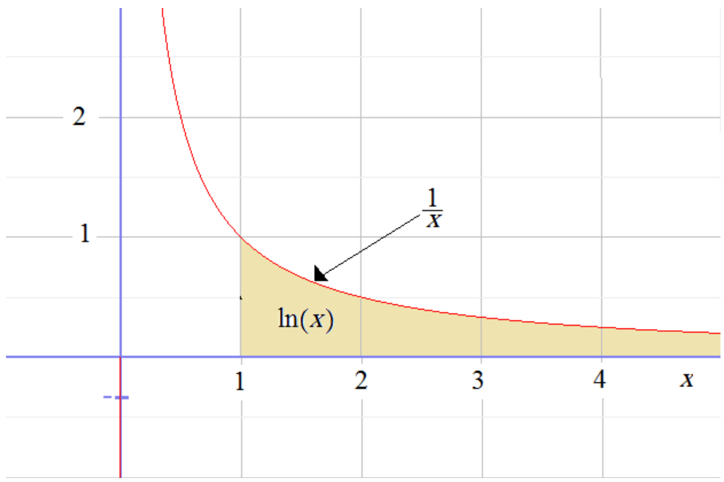


Fig. 1.1 – Définition du logarithme

[Équation fonctionnelle du logarithme]

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y) \tag{E}$$

Comme conséquences de l'équation (E), on a

$$\begin{aligned} \ln(1) &= 0 \\ \ln\left(\frac{1}{x}\right) &= -\ln(x) \\ \ln(x^m) &= m\ln(x) \ \ \textit{quelque soit } m \in \mathbb{Q} \end{aligned}$$

Théorème 1.9 (La fonction exponentielle) *La fonction exponentielle est la fonction inverse du logarithme,*

$$\exp : \mathbb{R} \to]0, +\infty[\;\; définie\ par\ la\ relation \;\; \exp(x) = y \Leftrightarrow x = \ln(y)$$

autrement dit

$$\exp \ln(y) = y \quad y > 0 \ , \ \ln \exp(x) = x \ \forall x \in \mathbb{R}$$

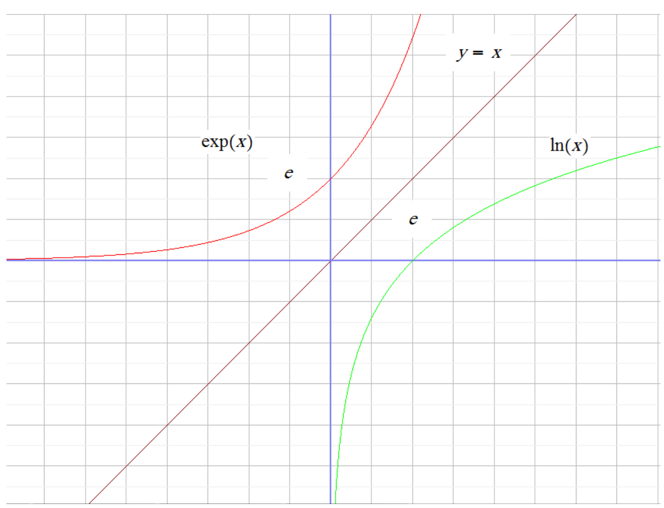
L'équation fonctionnelle du logarithme se traduit donc par l'équation fonctionnelle suivante pour l'exponentielle :

$$\exp(x + y) = \exp(x) \exp(y)$$

Définition 1.10 (Equation différentielle de l'exponentielle) *On a*

$$\frac{d}{dx} \exp(x) = \exp(x)$$

Comme pour toute fonction inverse, le graphe de la fonction exponentielle est le symétrique de celui du logarithme relativement à la bissectrice $y = x$. Il s'agit d'une courbe strictement convexe qui croit (strictement) de 0 à $+\infty$ lorsque l'abscisse croit de $-\infty$ à $+\infty$ et ce, plus rapidement que toute puissance de cette abscisse.



Graphe de l'exponentielle et logarithme

1.2 Equations différentielles d'ordre 1

Définition 1.11 *On appelle équation différentielle du premier ordre une équation de la forme*

$$F(y', y, x) = 0 \tag{1.1}$$

Où F est une fonction de trois variables de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times I$ dans $\mathbb{R}$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$,cette forme il est appelle la forme ***implicite*** *d'une équation différentielle .*

Définition 1.12 *L'équation différentielle* (1.1) *est équivalente à la forme* ***explicite***

$$y' = f(y, x) \tag{1.2}$$

où f est une fonction de deux variables de $\mathbb{R} \times I$ dans $\mathbb{R}$

Définition 1.13 *On dit qu'une fonction $y : I \to \mathbb{R}$ est une solution de de l'équation différentielle si et seulement si :*

$$(1) - y \text{ est une fonction dérivable sur } I$$

$$(2) - \forall x \in I,\ F(y', y, x) = 0 \quad ou \ y' = f(y, x)$$

On note S_E l'ensemble des fonctions y solutions de l'équation différentielle. On dit que deux équations différentielles sont équivalentes lorsqu'elles ont même ensemble de solutions.

Exemple, l'équation différentielle

$$xy' = y$$

Elle admet les solutions $y = Cx$ définies sur $\mathbb{R}$. Si, on la met sous la forme de la définition précédente :

$$y' = \frac{y}{x} \tag{1.3}$$

et elle n'est pas définie en $x = 0$. Elle admet alors pour solutions $y(x) = C_1 x$ pour $x \in \left]-\infty, 0\right[$, $y(x) = C_2 x$ pour $x \in \left]0, +\infty\right[$.

En fait l'écriture $y' = f(y, x)$ n'est pas nécessairement la forme sous laquelle apparait "naturellement" l'équation différentielle. Un cas particulier très simple est la recherche des primitives F d'une fonction f. En effet on résout alors

$$y' = f(x)$$

dont les solutions sont données par

$$y(x) = F(x) + C$$

(C est le nom générique d'une constante quelconque). On remarque qu'il y a une infinité de solutions à l'équation différentielle $y' = f(x)$ dépendant d'une constante arbitraire.De manière générale, il y a une infinité de solutions à une équation différentielle du premier ordre. On appelle courbe intégrale ou courbe solution l'ensemble des points $(x, y(x))$ où $y(x)$ est une solution de l'équation différentielle. Il y a donc une infinité de courbes intégrales correspondant à une équation différentielle du premier ordre.

Définition 1.14 (Problème de Cauchy) *Soit $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times I \to \mathbb{R}$ une fonction de trois variables où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $(t_0; y_0) \in I \times \mathbb{R}$. On dit qu'une fonction $y : I \to \mathbb{R}$ est une solution de Problème de Cauchy*

$$\begin{cases} F(y', y, x) = 0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

si et seulement si :

– 1. y est une fonction dérivable sur I
  2. $\forall x \in I, \; F(y', y, x) = 0$
  3. $y(t_0) = y_0$

Définition 1.15 *On appelle équation différentielle scalaire linéaire d'ordre 1 définie sur I toute équation de la forme*

$$y'(x) = a(x)\, y(x) + b(x) . \tag{1.4}$$

où a et b deux fonctions réelle continue définier dans un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Si $b(x) \equiv 0$ on dit que l'équation différentielle (1.4) est homogène.

Remarque 1.16 – *Une telle équation différentielle est dite :*

- *Ordinaire car la fonction inconnue est une fonction d'une seule variable*
- *Du premier ordre car elle exprime une relation entre $y'(x)$, valeur de la dérivée première de y en x, $y(x)$ et x*
- *Linéaire les coefficients $a(x)$ et $b(x)$ ne dépendent que de la variable x et pas de y.*
- *A coefficients constants lorsque de plus le coefficient a,b est constant, indépendant de x.*

Remarque 1.17 *D'un point de vue formel, le problème se pose donc de la même manière que pour les équations algébriques, mais avec la différence essentielle que l'inconnue n'est plus un nombre, mais une fonction, c'est à dire un être mathématique beaucoup plus compliqué. L'usage des équations différentielles pour décrire le comportement des systémes évoluant dans le temps est d'un usage universel dans toutes les sciences qui utilisent la modélisation mathématique. Cet outil commun à plusieurs disciplines ou sous-disciplines suggére bien souvent d'intéressantes analogies entre des domaines a priori sans relations. Dans ce chapitre, on commence par donner quelques exemples d'équations différentielles issues de différentes disciplines.*

1.2.1 Étude théorique (conséquences de la linéarité)

Un premier résultat important, parfois appelé principe de superposition (mais c'est un théorème !), affirme que toute combinaison linéaire de solutions d'une équation différentielle linéaire homogéne est aussi une solution. Plus précisément :

Proposition 1.18 *Si $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont deux solutions de l'équation différentielle linéaire homogène*

$$y'(x) = a(x)\, y(x)$$

alors toute combinaison linéaire des deux solutions :

$$\alpha y_1(x) + \beta y_2(x)$$

est aussi une solution.

Théorème 1.19 *Soit $y_p(x)$ une solution particulière de l'équation non homogène* (1.4) *$y(x)$ est solution générale de l'équation différentielle précédente si et seulement si l'on a*

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x)$$

où $y_h(x)$ est solution de l'équation homogène

Proposition 1.20 (Problème de Cauchy) *La recherche d'une solution de l'équation différentielle* (1.4) *sur I qui prenne en x_0 la valeur y_0 constitue le problème de Cauchy défini sur I par* (1.4) *pour la condition initiale $y(x_0) = y_0$.*

Proposition 1.21 (de Cauchy Lipschitz dans le cas linéaire) *Si les applications a et b sont continues sur l'intervalle I alors le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} y'(x) = a(x)\ y(x) + b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

admet une et une seule solution sur I. On obtient, la solution par la formule suivante :

$$\forall x \in I,\ y(x) = \underbrace{y_0 e^{A(x)}}_{y_h} + \underbrace{e^{A(x)} \int_{x_0}^{x} e^{-A(s)} b(s)\, ds}_{y_p}, \tag{1.5}$$

où A une primitive de la fonction a dans l'itervalle I (c'est-à-dire, $A' = a$, $x \in I$)

Exemple 1

Soit l'équation différentielle linéaire d'ordre1 suivante

$$y' = -2y + x^3 e^{-2x}$$

En vertu de la formule (1.5) on a la solution est de la forme

$$y(x) = y_0 e^{A(x)} + e^{A(x)} \int e^{-A(s)} b(s)\, ds,\ x \in I,$$

avec

$$A(x) = \int_{(x_0;x)} -2\ ds,\quad x \in I = \mathbb{R} \Rightarrow A(x) = -2(x - x_0)$$

Et

$$\int_{(x_0;x)} e^{-A(s)} b(s)\, ds = \int e^{2(s-x_0)} s^3 e^{-2s} ds = e^{-2x_0} \int s^3 ds = \frac{e^{-2x_0}}{4}\left(x^4 + c\right)$$

donc

$$y(x) = \frac{e^{-2x}}{4}\left(x^4 + c\right),\ x \in \mathbb{R}$$

Exemple 2

En définie le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} y' + \cot(x)\, y = \dfrac{x}{\sin x} \\ y_0 = 1 \quad , \ x_0 = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Les fonctions $\cot(x)$ et $\dfrac{x}{\sin x}$ n'est pas continu en $x = n\pi,\ n \in \mathbb{N}$, il nous faut donc chercher une slution dans l'intervalle $I =]n\pi, (n+1)\pi[$. On a la solution est de la forme

$$y(x) = y_0 e^{A(x)} + e^{A(x)} \int_{x_0}^{x} e^{-A(s)} b(s)\, ds,\ x \in I$$

avec

$$A(x) = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \cot(x)\ \ ds, \quad x \in]2n\pi, (2n+1)\pi[$$

$$\Rightarrow A(x) = -\ln\sin(x)$$

Et

$$\int e^{\ln\sin(s)} \frac{s}{\sin s} ds = \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} s ds = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{\pi^2}{8}\right)$$

En substituant ceci dans l'expression nous obtenons

$$y(x) = e^{-\ln\sin(x)} + e^{-\ln\sin(x)}\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{\pi^2}{8}\right),\ \forall\ x \in]2n\pi, (2n+1)\pi[.$$

$$= \left(1 - \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{2}x^2\right)\frac{1}{\sin(x)}\ \forall\ x \in]2n\pi, (2n+1)\pi[$$

1.2.2 Méthodologie générale de résolution d'une équation différentielle linéaire :

1. **1ère étape : Modéliser :** L'équation différentielle qui représente le phénomène physique se présentera sous la forme générale :

$$a(x)\,y'(x) + b(x)\,y(x) = c(x) \tag{1.6}$$

Il s'agit là d'une équation avec le second membre $c(x)$ qui est l'entrée forcée du système.

2. **2ème étape :Trouver d'abord la solution de l'équation homogène associée :** Il s'agit de trouver une fonction $y_h(x)$ qui satisfasse l'équation dite homogène (sans second membre) :

$$a(x)\,y'(x) + b(x)\,y(x) = 0 \tag{(h)}$$

3. **3ème étape : Chercher une fonction particulière qui satisfasse l'équation générale avec second membre :**
   - Il s'agit de trouver $y_p(x)$ tel que :

   $$a(x)\,y_p'(x) + b(x)\,y_p(x) = c(x)$$

   - Pour trouver une solution partuculière en fait appelle à une méthode pratique dit **La variation de la constante** qui consiste à chercher une solution partuculière sous la forme

   $$y_p(x) = \lambda(x)\,y_h(x),$$

   où $y_h(x)$ la solution non nulle de l'équation homogene et λ une fonction dérivable sur I. $\forall x \in I$, on a :

   $$a(x)\,(\lambda(x)\,y_h(x))' + b(x)\,\lambda(x)\,y_h(x) = a(x)\,\lambda'(x)\,y_h(x) + \lambda(x)\,[a(x)\,y_h'(x) + b(x)\,y_h(x)]$$

   $$= a(x)\,\lambda'(x)\,y_h(x) \qquad \text{en effe } a(x)\,y_h'(x) + b(x)\,y_h(x) = 0$$

   et donc λy_h est une solution de (1.6) si la fonction λ vérifie

   $$\forall x \in I, \quad \lambda'(x) = \frac{c(x)}{a(x)\,y_h(x)}$$

c'est-à-dire λ est une primitive de la fonction $\dfrac{c(x)}{a(x)\, y_h(x)}$

4. **4ème étape : former la solution générale :** On montrera que la combinaison d'une solution homogène et d'une solution particulière est aussi solution de l'équation générale. Donc, si $y(x) = y_p(x) + y_h(x)$ satisfait :

$$a(x)\, y'(x) + b(x)\, y(x) = c(x)$$

5. **5ème étape : introduire les conditions de initiales pour déterminer la solution spécifique :** L'introduction des conditions initiales nous fait passer d'une solution générale vers une solution spécifique selon les conditions (particulières) au départ.

Exemples : Résoudre les équations différentielles linéaires d'ordre1 avec la méthode de variation de la constante

$$(*)\, y' + 3y = x^2 \;, \quad (**) \qquad xy' - y = x \ln(x) \;\; ; \;\; (***) \;\; y' = x^2 y - x^2$$

$$(4*) \;\; (x-1)\, y' + xy = \sin(x)$$

Pour l'équation

$$y' + 3y = x^2 \qquad \text{(Exemple 1)}$$

Solution de l'équation homogene est

$$y' + 3y = 0, \Rightarrow \; \frac{y'}{y} = -3 \Rightarrow \ln y(x) = -3x + c \; \Rightarrow y(x) = C \exp(-3x)$$

Nous cherchons une soluton de la forme.

$$y(x) = \lambda(x) \exp(-3x)\,,$$

Alors $y(x) = \lambda(x) \exp(-3x)$ est une solution de Exemple 1 si la fonction λ vérifie

$$\lambda'(x) = x^2 \exp(3x) \Longrightarrow \lambda(x) = \frac{1}{3} x^2 e^{3x} - \frac{2}{9} x e^{3x} + \frac{2}{27} e^{3x} + C$$

donc la solution est

$$y(x) = -\frac{2}{9} x + \frac{1}{3} x^2 + \frac{2}{27} + C \exp(-3x)$$

Pour l'équation

$$xy' - y = x\ln(x) \qquad \text{(Exemple 2)}$$

l'équation homogene est

$$xy' - y = 0 \Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{1}{x} \Rightarrow \ln y(x) = \ln(x) + c \Rightarrow y(x) = \lambda\, x$$

de même $y(x) = \lambda(x)\, x$ est une solution de Exemple 2 si la fonction λ vérifie

$$\lambda'(x) = \frac{x\ln(x)}{x^2} \Longrightarrow \lambda(x) = \int \frac{\ln(x)}{x} dx \Rightarrow \quad \lambda(x) = \frac{1}{2}(\ln(x))^2 + C$$

donc la solution est

$$y(x) = \frac{x}{2}(\ln(x))^2 + Cx$$

Pour l'équation

$$y' = x^2 y - x^2 \qquad \text{(Exemple 3)}$$

l'équation homogene est

$$y' = x^2 y \Longrightarrow \frac{y'}{y} = x^2 \Rightarrow \ln y(x) = \frac{1}{3}x^3 + c \Longrightarrow y(x) = \lambda \exp\left(\frac{1}{3}x^3\right)$$

Nous cherchons une soluton de la forme.

$$y(x) = \lambda(x)\exp\left(\frac{1}{3}x^3\right),$$

de même $y(x) = \lambda(x)\exp\left(\frac{1}{3}x^3\right)$ est une solution de Exemple 3 si la fonction λ vérifie

$$\lambda'(x) = -x^2\exp\left(\frac{-1}{3}x^3\right) \Longrightarrow \lambda(x) = \int -x^2\exp\left(\frac{-1}{3}x^3\right)dx = \exp\left(\frac{-1}{3}x^3\right) + C$$

donc la solution est

$$y(x) = 1 + C\exp\left(\frac{1}{3}x^3\right)$$

Pour l'équation

$$(x-1)\,y' + xy = \sin(x)$$

On se place sur l'intervalle $]-\infty, 1[$ *ou* $]1, +\infty[$. Comme vu précédemment, sur chacun d'eux, la solution de l'équation sans second membre est :

$$y_h(x) = \lambda \frac{e^{-x}}{x-1}$$

On cherche alors une solution particulière sous la forme :

$$y(x) = \lambda(x) \; y_h(x)$$

On a :

$$(x-1)(\lambda(x) \; y_h(x))' + x \; \lambda(x) \; y_h(x) = \sin(x)$$

$$(x-1)\lambda'(x) \; y_h(x) + \lambda(x) \; ((x-1) y_h'(x) + x \; y_h(x)) = \sin(x)$$

L'équation étudiée se ramène donc à :

$$(x-1)\lambda'(x) \; \frac{e^{-x}}{(x-1)} = \sin(x) \Longrightarrow \lambda'(x) = e^x \sin(x)$$

Soit :

$$\lambda(x) = \int e^x \sin(x)\, dx$$

• calcul de $\int e^x \sin(x)\, dx$: On effectue une intégration par partie :

$$\int e^x \sin(x)\, dx = [e^x \sin(x)] - \int e^x \cos(x)\, dx + C_1$$

On effectue une deuxième intégration par partie pour

$$\int e^x \cos(x)\, dx = [e^x \cos(x)] + \int e^x \; \sin(x)\, dx + C_2$$

Ainsi :

$$\int e^x \sin(x)\, dx = [e^x \sin(x)] - [e^x \cos(x)] - \int e^x \; \sin(x)\, dx - C_2 + C_1$$

Donc :

$$\int e^x \sin(x)\, dx = \frac{e^x}{2}(\sin(x) - \cos(x)) + C$$

On obtient ainsi $\lambda(x)$ (la constant d'intégration C peut être choisie nulle car on cherche une solution particulière). La solution particulière recherchée est donc :

$$y_p(x) = \frac{1}{2(x-1)}(\sin(x) - \cos(x))$$

La solution générale recherchée est ainsi (sur l'intervalle considéré)

$$y_p(x) = \frac{1}{2(x-1)}(\sin(x) - \cos(x)) + \lambda\frac{e^{-x}}{(x-1)}$$

1.3 Équation différentielle à variables séparbles

Définition 1.22 *On appelle équation différentielle à variables séparées une équation de la forme*

$$f(y)\, y'(x) = g(x) \tag{1.7}$$

où f est une fonction réelle continue dans un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et g une fonction réelle et continue sur un intervalle ouvert J. On peut écrire

$$f(y)\, dy = g(x)\, dx,$$

ce qui explique leur nom.

Proposition 1.23 *Soit F une primitive de f dans I et G une primitive de g dans J. Pour qu'une fonction $x \to y(x)$,définie et dérivable dans un sous-intervalle de J, vérifie l'équation* (1.7), *il faut et il suffit que*

$$F(y(x)) = G(x) + C \quad C \in \mathbb{R}$$

Remarque 1.24 *Si on suppose de plus que, pour tout $y \in I$, $f(y) \neq 0$ on en déduit que F a une dérivée non nulle ; elle est donc bijective de I dans $F(I)$ et $y(x) = F^{-1}(G(x) + C)$.*

Exemples

Résoudre les équations suivantes :

$$y' = x(y^2 + 1)$$
$$(x^2 + 1)\, y' = -xy^2$$

1- On a
$$y' = x\left(y^2+1\right) \Longrightarrow \int \frac{y'(x)\,dx}{\left(y^2(x)+1\right)} = \int x dx$$
on pose le chengement de variable suivant
$$u = y(x) \Longrightarrow du = y'(x)\,dx$$
donc
$$\int \frac{y'(x)\,dx}{\left(y^2(x)+1\right)} = \int \frac{du}{\left(u^2+1\right)} = \frac{1}{2}x^2 + c$$
$$\Rightarrow \arctan(u) = \frac{1}{2}x^2 + c$$
$$\Rightarrow y(x) = \tan\left(\frac{1}{2}x^2 + c\right)$$
alors la solution est
$$y(x) = \tan\left(\frac{1}{2}x^2 + c\right),\ x \in I = \left\{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } \frac{1}{2}x^2 + c \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right\}$$

2- **La résolution de l'équation**
$$\left(x^2+1\right)y' = xy^2$$
On a
$$\frac{y'}{y^2} = \frac{x}{\left(x^2+1\right)} \Rightarrow \int \frac{y'}{y^2}dx = -\int \frac{x}{\left(x^2+1\right)}dx$$
on pose le chengement de variable suivant
$$u = y(x) \Longrightarrow du = y'(x)\,dx$$
donc
$$\int \frac{y'}{y^2}dx = \int \frac{du}{u^2} = -\int \frac{x}{\left(x^2+1\right)}dx = -\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) \Longrightarrow -\frac{1}{u} = -\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + C$$
$$\Longrightarrow \frac{1}{u} = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + \lambda$$
alors la solution est
$$y(x) = \frac{1}{\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + \lambda}$$

1.3.1 Équation de Bernoulli :

Il s'agit d'une équation différentielle que l'on peut écrire sous la forme :

$$a(x)\, y'(x) + b(x)\, y(x) = c(x)\, y^r(x) \text{ où } r \in \mathbb{R} - \{0, 1\} \tag{1.8}$$

Considérons l'équation homogene

$$a(x)\, y'(x) + b(x)\, y(x) = 0 \tag{1.9}$$

on cherche une solution non-trivial de (1.9) ensuite nous cherchons une solution de la forme

$$y(x) = \lambda(x)\, y_h(x)$$

pour çe la nous substituons

$$y(x) = \lambda(x)\, y_h(x)$$

dans (1.8) nous obtenons.

$$\begin{aligned} & a(x)\, \lambda'(x)\, y_h(x) + \lambda(x) \underbrace{\left[a(x)\, y_h'(x) + b(x)\, y_h(x)\right]}_{=0} \\ & = c(x)\left(\lambda(x)\, y_h(x)\right)^r. \end{aligned}$$

Donc λy_h est une solution de (1.8) si la fonction λ vérifie

$$\forall x \in I, \frac{\lambda'(x)}{\lambda^r(x)} = \frac{c(x)\, y_h^{r-1}(x)}{a(x)}$$

Exemple

Résoudre l'équation suivant :

$$y' - y = xy^2$$

La solution de $y' - y = 0$ est $y_h(x) = e^x$.On cherche une solution de la forme $y(x) = \lambda(x)\, e^x$ alors λ vérifie

$$\frac{\lambda'(x)}{\lambda^2(x)} = xe^x$$

est une équation différentielle à variables séparbles, une integration donne

$$-\frac{1}{\lambda(x)} = (x-1)\, e^x + c$$

d'où

$$\lambda(x) = -\frac{1}{(x-1)\,e^x + c}$$

donc la solution est

$$y(x) = -\frac{e^x}{(x-1)\,e^x + c}$$

1.3.2 Équation de Riccati

Il s'agit d'une équation différentielle que l'on peut écrire sous la forme :

$$y'(x) = a(x)\,y^2(x) + b(x)\,y(x) + c(x)$$

Il faut connaître une solution particulière y_p. On cherche ensuite la solution générale sous la forme

$$y(x) = y_p(x) + z(x)$$

L'équation différentielle devient :

$$y_p' + z' = a(x)\,(y_p + z)^2 + b(x)\,(y_p + z) + c(x)$$

$$y_p' + z' = a(x)\,z^2 + 2a(x)\,y_p z \; + b(x)\,z + a(x)\,y_p^2 + b(x)\,y_p + c(x)$$

$$z' = a(x)\,z^2 + [2a(x)\,y_p \; + b(x)]\,z$$

On reconnaît alors une équation de Bernoulli avec $r = 2$.

1.3.3 Exercice corrigé

Exercice 1

Résoudre les équations différentielles suivantes :

(a)	$y' - (x+1)\,y = 0$	;	(d)	$\sin(x)\,y' + y\cos(x) = \sin^2(x)$
(b)	$(x+1)\,y' - xy = 0$	;	(e)	$y'\ln(x) + \dfrac{1}{x}y = -1$
(c)	$(x^2+1)\,y' + 2x\,(x^2+1)\,y = \exp(-x^2)$	;	(f)	$\lvert x\rvert\,y' + (x-1)\,y = x^3$

Exercice 2 (**Équations à variables séparées**)

Résoudre les équations différentielles suivant

$$xy' = y^2 + 1; \quad y' = y^2 e^{-x}; \quad x^2 y' = 1 - y^2$$

On considère l'équation différentielle

$$\left(1 + x^2\right) y' = -2xy^2$$

- Montrer que la fonction nulle est solution.
- Justifier le fait que toute autre solution ne peut s'annuler, et est donc de signe constant.
- Déterminer l'ensemble des solutions ne s'annulant pas
- Déterminer la solution valant 1 en 0 et en donner l'allure.
- Sur le même graphique, représenter la solution valant -1 en 0.

Exercice 3

Pour $x \in \left]0, \pi\right[$,on considère l'équation différentielle :

$$y' + \cot(x) \ y = \cos(x)$$

- Donner la solution générale de cette équation.
- Déterminer la seule solution bornée sur $\left]0, \pi\right[$.

Corrigé de exercice 1

L'équations différentielles (a) est homogene :

$$y' - (x+1) y = 0 \tag{a}$$

alors on a

$$\int \frac{y'}{y} dx = \int (x+1) dx \Rightarrow \ln(y(x)) = \left(\frac{1}{2}x^2 + x + c\right)$$

danc la solution de (a) est

$$y(x) = \lambda \exp\left(\frac{1}{2}x^2 + x\right) \quad \textit{tel que} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Pour l'équation (b)

$$(x+1) y' - xy = 0 \tag{b}$$

La solutions est

$$y\left(x\right)=\lambda\frac{\exp\left(x\right)}{x+1}\quad tel\ que\quad \lambda\in\mathbb{R}$$

Pour l'équation (c)

On veut résoudre l'équation

$$\left(x^2+1\right)y'+2x\left(x^2+1\right)y=\exp\left(-x^2\right)\Leftrightarrow y'+2xy=\frac{\exp\left(-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)}\tag{c}$$

On résout l'équation homogène

$$y'+2xy=0$$

On remarque que $y_h\left(x\right)=0$ est solution, on cherche maintenant les solutions non nulles, on peut donc diviser par $y_h\left(x\right)$.

$$\frac{y'}{y}=-2x$$

En prenant une primitive, on a donc

$$\ln\left|y_h\left(x\right)\right|=-x^2+\alpha,\qquad\qquad \alpha\in\mathbb{R}$$

Ce qui est équivalent a

$$\left|y_h\left(x\right)\right|=\lambda\exp\left(-x^2\right),\Leftrightarrow y_h\left(x\right)=\pm\lambda\exp\left(-x^2\right)$$

La constante $\pm\lambda$ est une constante strictement positive ou strictement négative. On peut résumer en écrivant

$$y_h\left(x\right)=C\exp\left(-x^2\right)\quad C\in\mathbb{R}$$

On a obtenu ainsi toutes les solutions de l'équation homogène. On dit que y_h est la **solution générale** de l'équation homogène.

On chercher une solution partuculière sous la forme

$$y\left(x\right)=\lambda\left(x\right)\exp\left(-x^2\right)=\lambda\left(x\right)y_h\left(x\right)\tag{1.10}$$

Nous allons remplacer (1.10) dans (c) on btient

$$\lambda'\left(x\right)=\frac{1}{\left(x^2+1\right)}\Longrightarrow\lambda\left(x\right)=\int\frac{1}{\left(x^2+1\right)}dx=\arctan\left(x\right)+\gamma$$

car

$$y_h(x)' + 2xy_h(x) = 0$$

Donc la solution de (c) est :

$$y(x) = \arctan(x)\exp\left(-x^2\right) + \gamma\exp\left(-x^2\right)$$

Pour l'équation (c)

Nous allons maintenant résoudre l'équation

$$\sin(x)\,y' + y\cos(x) = \sin^2(x) \tag{d}$$

L'équation homogène est

$$\sin(x)\,y' + y\cos(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = -\frac{\cos(x)}{\sin(x)}, \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{k\pi\}$$
$$\Longrightarrow \ln|y_h(x)| = -\int \frac{\cos(x)}{\sin(x)}dx = -\ln|\sin(x)| + \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R} \Longrightarrow |y_h(x)| = \lambda\frac{1}{\sin(x)}$$

La variaxion de la constante donne

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{k\pi\}, \lambda'(x) = \frac{\sin^3(x)}{\sin(x)} = \sin^2(x)$$

alors

$$\lambda(x) = \int \frac{-\cos(2x)+1}{2}dx \Leftrightarrow \lambda(x) = \frac{1}{4}(-\sin(2x) + 2x + C)$$

Donc la solution de (d) est :

$$y(x) = \lambda(x)\,y_h(x) = \frac{1}{4}(-\sin(2x) + 2x + C)\frac{1}{\sin(x)} = -\frac{1}{2}\cos x + \frac{x}{2\sin(x)} + \frac{C}{4\sin(x)}$$

Pour l'équation (e)

$$y'\ln(x) + \frac{1}{x}y = -1 \tag{e}$$

L'équation homogène est

$$y'\ln(x) + \frac{1}{x}y = 0 \Longrightarrow \frac{y'}{y} = -\frac{1}{x\ln(x)}, \forall x \in]0,1[\cup]1,+\infty[\Longrightarrow \int \frac{y'}{y}dx = -\int \frac{1}{x\ln(x)}dx$$

avec un chengement de variable $u = \ln(x)$ on obtient

$$\ln|y_h(x)| = -\ln(|\ln x|) + \alpha, \;\; \alpha \in \mathbb{R} \Longrightarrow y_h(x) = \lambda\frac{1}{\ln(x)}$$

La variaxion de la constante donne

$$\forall x \in \left]0,1\right[\cup \left]1,+\infty\right[, \lambda'(x) = \frac{-1}{\ln(x)\,\dfrac{1}{\ln(x)}} = -1$$
$$\Longrightarrow \lambda(x) = -x + C$$

donc la solution est

$$y(x) = (-x + C)\,\frac{1}{\ln(x)}$$

Pour l'équation (f)

On chercher une solution de

$$|x|\,y' + (x-1)\,y = x^3 \tag{f}$$

Noter que cette dernière équation signifie que

$$\begin{cases} xy' + (x-1)\,y = x^3 & \text{si } x > 0 \\ -xy' + (x-1)\,y = x^3 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

L'équation homogène est

$$\begin{cases} xy' + (x-1)\,y = 0 & \text{si } x \in \left]0,+\infty\right[\\ -xy' + (x-1)\,y = 0 & \text{si } x \in \left]-\infty,0\right[\end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \displaystyle\int \frac{y'}{y}dx = \int \frac{(-x+1)}{x}dx & \text{si } x \in \left]0,+\infty\right[\\ \\ \displaystyle\int \frac{y'}{y}dx = \int \frac{(x-1)}{x}dx & \text{si } x \in \left]-\infty,0\right[\end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \ln|y_h(x)| = \ln x - x + \alpha & \text{si } x \in \left]0,+\infty\right[\text{ tel que } \alpha \in \mathbb{R} \\ \\ \ln|y_h(x)| = x - \ln|x| + \alpha' & \text{si } x \in \left]-\infty,0\right[\text{ tel que } \alpha' \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} y_h(x) = \beta\; x\; \exp(-x) & \text{si } x \in \left]0,+\infty\right[\text{ tel que } \beta \in \mathbb{R} \\ \\ y_h(x) = \theta\;\dfrac{\exp(x)}{x} & \text{si } x \in \left]-\infty,0\right[\text{ tel que } \theta \in \mathbb{R} \end{cases}$$

La variaxion de la constante donne

$$\begin{cases} \beta'(x) = C\ x\ e^{x} \Longrightarrow \beta(x) = \displaystyle\int C\ x\ e^{x} dx \Longrightarrow \beta(x) = xe^{x} - e^{x} + \lambda \\ \\ \theta'(x) = -C' \displaystyle\int\ x^{3} e^{-x} dx \Longrightarrow \theta(x) = 6xe^{-x} + 3x^{2}e^{-x} + x^{3}e^{-x} + 6e^{-x} + \lambda' \end{cases}$$

Donc la solution est

$$\begin{cases} y_1(x) = x^2 - x + \lambda\beta\ x\ e^{-x} \quad \text{si } x \in]0, +\infty[\\ \\ y_2(x) = 6 + 3x + x^2 + \dfrac{6}{x} + \lambda'\theta\ \dfrac{e^{x}}{x} \quad x \in]-\infty, 0[\end{cases}$$

Corrigé de exercice 2

Pour l'équation

$$x^2 y' = y^2 + 1$$

alors

$$\frac{y'}{y^2+1} = \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow \int \frac{y'(x)}{y^2(x)+1} dx = \int \frac{1}{x^2} dx$$

On pose $u = y(x) \Longrightarrow du = y'(x)\,dx$ ainsi

$$\begin{aligned} \int \frac{y'(x)}{y^2(x)+1} dx = \int \frac{1}{u^2+1} du &= \int \frac{1}{x^2} dx \\ \Longrightarrow \arctan(u) &= -\frac{1}{x} + c \\ \Longrightarrow u = \tan &\left(-\frac{1}{x} + c\right) \end{aligned}$$

Donc la solution est :

$$y(x) = \tan\left(-\frac{1}{x} + c\right)$$

Pour l'équation

$$y' = y^2 e^{-x}$$

donc

$$\frac{y'}{y^2} = e^{-x} \Leftrightarrow \int \frac{y'(x)}{y^2(x)} dx = \int e^{-x} dx$$

On pose $u = y(x) \Longrightarrow du = y'(x)\,dx$ ainsi

$$\int \frac{y'(x)}{y^2(x)}dx = \int \frac{1}{u^2}du = \int e^{-x}dx$$
$$\Longrightarrow -\frac{1}{u} = -e^{-x} + c$$
$$\Longrightarrow u = \frac{1}{e^{-x} + \lambda}$$

Donc la solution est :

$$y(x) = \frac{1}{e^{-x} + \lambda}$$

Pour l'équation

$$x^2 y' = 1 - y^2$$

alors

$$\frac{y'}{1 - y^2} = e^{-x} \Leftrightarrow \int \frac{y'(x)}{1 - y^2(x)}dx = \int \frac{1}{x^2}dx$$

On pose $u = y(x) \Longrightarrow du = y'(x)\,dx$ ainsi

$$\int \frac{y'(x)}{1 - y^2(x)}dx = \int \frac{1}{-u^2 + 1}du = \int \frac{1}{x^2}dx$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2}\ln\frac{(u+1)}{(u-1)} = -\frac{1}{x} + C \Longrightarrow \frac{(u+1)}{(u-1)} = \lambda e^{-\frac{2}{x}} \ \textit{où}\ \lambda = e^{C}$$
$$\Longrightarrow \frac{u - 1 + 2}{(u-1)} = \lambda e^{-\frac{2}{x}}$$
$$\Longrightarrow 1 + \frac{2}{(u-1)} = \lambda e^{-\frac{2}{x}}$$
$$\Longrightarrow \frac{2}{y(x) - 1} = \lambda e^{-\frac{2}{x}} - 1 \Longrightarrow y(x) - 1 = \frac{2}{\lambda e^{-\frac{2}{x}} - 1} \Longrightarrow y(x) = \frac{2}{\lambda e^{-\frac{2}{x}} - 1} + 1$$

Donc la solution est :

$$y(x) = \frac{2}{\lambda e^{-\frac{2}{x}} - 1} + 1$$

Pour l'équation

$$\left(1 + x^2\right) y' = -2xy^2 \qquad (1.11)$$

1. La fonction nulle est solution. (1.11) en effet $(1 + x^2)\,0 = -2x\ 0$

2. La dérive de la solution vérifie
$$y' = \frac{-2x}{(1+x^2)} y^2$$
de plus on a
$$\frac{y^2}{(1+x^2)} \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$$
donc
$$\begin{array}{ll} \forall x \in [0,+\infty[& y'(x) \leq 0 \\ \forall x \in]-\infty,0] & y'(x) \geq 0 \end{array}$$
tout les fonctions vérifies l'équation (1.11) son croissente sur $]-\infty,0]$ et decroissente sur $[0,+\infty[$

3. L'ensemble des solutions ne s'annulant pas
$$y' = \frac{-2x}{(1+x^2)} y^2 \Longrightarrow \int \frac{y'(x)\,dx}{y^2(x)} = \int \frac{-2x}{(1+x^2)} dx$$
On pose $u = y(x) \Longrightarrow du = y'(x)\,dx$ ainsi
$$\begin{aligned} \int \frac{y'(x)\,dx}{y^2(x)} = \int \frac{du}{u^2} &= -\ln\left(x^2+1\right) + C \\ \Longrightarrow -\frac{1}{u} &= -\ln\left(x^2+1\right) + C \\ \Longrightarrow \frac{1}{u} &= \ln\left(x^2+1\right) + \lambda \end{aligned}$$
Donc la solution est :
$$y(x) = \frac{1}{\ln(x^2+1) + \lambda}$$

4. La solution valant 1 en 0 est
$$y(x) = \frac{1}{\ln(x^2+1) + 1}$$

Corrigé de exercice 3

– Pour $x \in]0, \pi[$,on considère l'équation différentielle :

$$y' + \cot(x)\ \ y = \cos(x)$$

– La solution générale de cette équation

- l'équation Homogéne est :

$$y' + \cot(x)\ \ y = 0 \Longrightarrow \int \frac{y'}{y} dx = -\int \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\, dx \Longrightarrow \ln|y_h(x)| = \ln\left(\frac{1}{\sin(x)}\right) + C$$

Donc

$$y_h(x) = \lambda \frac{1}{\sin(x)}$$

La variaxion de la constante donne

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\},\ \ \lambda'(x) = \cos(x)\sin(x)$$

$$\Longrightarrow \lambda(x) = \int \cos(x)\sin(x)\, dx = -\frac{1}{4}\cos(2x) + C$$

Donc la solution générale de cette équation est :

$$y(x) = \left(-\frac{1}{4}\cos(2x) + C\right)\frac{1}{\sin(x)}$$

– La seule solution bornée sur $]0, \pi[$, est :

$$y(x) = \frac{1}{2}\sin(x)$$

en effet on a la solution générale de cette équation

$$y(x) = \left(-\frac{1}{4}\cos(2x) + C\right)\frac{1}{\sin(x)} = \left(\frac{1}{2}\sin(x) + \frac{1}{\sin(x)}\left(\frac{4C-1}{4}\right)\right)$$

par conséquence la seule solution bornée sur $]0, \pi[$ est

$$y(x) = \frac{1}{2}\sin(x)$$

1.4 Équations différentielles linéaires du second ordre

Définition 1.25 *On appelle équation différentielle linéaire du deuxième ordre une équation de la forme*

$$y''(x) + A(x) y'(x) + B(x) y(x) = f(x). \tag{1.12}$$

où $A,\ B,\ f$ sont des fonctions réelle continue définier dans un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. On appelle équation homogène associée à l'équation (1.12) *l'équation*

$$y''(x) + A(x) y'(x) + B(x) y(x) = 0 \tag{1.13}$$

Théorème 1.26 *Toute solution de* (1.12) *peut s'écrire sous la forme*

$$y = y_h + y_p$$

où y_h est la solution générale de l'équation homogène (1.13) *et y_p est une solution particulière de l'équation "avec second membre"* (1.12).

Résoudre l'équation (1.12)consiste donc à déterminer y_h et y_p. Il n'existe pas de méthode générale pour calculer ces solutions dans le cas où les éléments A, B et f ne sont pas des constantes.

Proposition 1.27 *Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ si $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont des solutions de* (1.13). *Alors la fonction*

$$y(x) = \alpha y_1(x) + \beta y_2(x)$$

est solution de (1.13)

Théorème 1.28 *On suppose que $A,\ B$ sont des fonctions continues définier dans un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Soit $x_0 \in I$ et $k_0,\ k_1$ des nombres réelle. Le problème avec condition initiale suivant :*

$$\begin{cases} y''(x) + A(x) y'(x) + B(x) y(x) = 0 \\ y(x_0) = k_0, \quad y'(x_0) = k_1. \end{cases}$$

Adme une unique solution définie sur I

Exemple

Résoudre l'équation suivant :

$$\begin{cases} y'' - y = 0 \\ y(0) = 1, \ y'(0) = 3 \end{cases} \tag{1.14}$$

Par conséquence de théorème 1.28 le problème adme une unique solution définie sur $\mathbb{R}$. il est simple de voire que les fonctions suiventes e^x et e^{-x} sont des solutions de (1.14) et de même pour

$$y(x) = \alpha e^x + \beta e^{-x}$$

Cherchons la solution qui vérifie $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$. Alors

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha - \beta = 3 \end{cases}$$

donc

$$y(x) = 2e^x - e^{-x}$$

Corollaire 1.29 *Soit le problème avec condition initiale suivant*

$$\begin{cases} \lambda(x) y''(x) + A(x) y'(x) + B(x) y(x) = 0 \\ y(x_0) = k_0, \quad y'(x_0) = k_1. \end{cases} \tag{1.15}$$

Adme une unique solution définie sur I si $x_0 \in I$ et les fonctions λ, A, B continues sur I et $\lambda(x) \neq 0 \ \forall x \in I$.

Exemple :

On considere le problème suivant :

$$x^2 y'' + xy' - 4y = 0$$

est de la forme (1.15) avec $\boldsymbol{\lambda}(x) = x^2$ et $A(x) = x$, $B(x) = -4$, ici on cherche la solution dans $]0, +\infty[$ *ou* $]-\infty, 0[$. Il est simple de voire que les fonctions suiventes x^2 et $\dfrac{1}{x^2}$ sont des solutions et de même pour

$$y(x) = \alpha x^2 + \frac{\beta}{x^2}$$

Proposition 1.30 *On suppose que A, B sont des fonctions continues définier dans un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, et $\{y_1, y_2\}$ deux solutions dans I de l'équation*

$$y''(x) + A(x)y'(x) + B(x)y(x) = 0 \tag{1.16}$$

Si $\{y_1, y_2\}$ est linéairement independant, alors $\{y_1, y_2\}$ est l'ensemble fondamental des solutions. Autrement dit tout solution de (1.16) *il s'écrie comme combinaison linéair de $\{y_1, y_2\}$*

1.4.1 Wronskian et la formule d'Abel

Soit le problème avec condition initiale suivant

$$\begin{cases} y''(x) + A(x)y'(x) + B(x)y(x) = 0 \\ y(x_0) = k_0, \quad y'(x_0) = k_1. \end{cases} \tag{1.17}$$

Si $\{y_1, y_2\}$ est un système fondamental de solutions de (1.16) dans I. Donc la solution de problème avec condition initiale il s'écrie comme combinaison linéair de $\{y_1, y_2\}$. Nous avons alors

$$y(x) = \alpha y_1(x) + \beta y_2(x)$$

et

$$\begin{cases} \alpha y_1(x_0) + \beta y_2(x_0) = k_0 \\ \alpha y_1'(x_0) + \beta y_2'(x_0) = k_1 \end{cases}$$

équivalent

$$\begin{pmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_0 \\ k_1 \end{pmatrix}$$

L'unicité de la solution(1.17) signifie que le système d'équations linéaires en α et β à une solution donc

$$\det \begin{pmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{pmatrix} = y_1(x_0)y_2'(x_0) - y_1'(x_0)y_2(x_0) \neq 0$$

$$\Longrightarrow \alpha = \frac{\det \begin{pmatrix} k_0 & y_2(x_0) \\ k_1 & y_2'(x_0) \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{pmatrix}} = \frac{y_2'(x_0)k_0 - y_2(x_0)k_1}{y_1(x_0)y_2'(x_0) - y_1'(x_0)y_2(x_0)}$$

et

$$\beta = \frac{\det\begin{pmatrix} y_1(x_0) & k_0 \\ y_1'(x_0) & k_1 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{pmatrix}} = \frac{y_1(x_0)\,k_1 - y_1'(x_0)\,k_0}{y_1(x_0)\,y_2'(x_0) - y_1'(x_0)\,y_2(x_0)}$$

pour tout $k_0, k_1 \in \mathbb{R}$.

Définition 1.31 *Si y_1, y_2 deux solutions de l'équation*

$$y''(x) + A(x)\,y'(x) + B(x)\,y(x) = 0 \tag{1.18}$$

dans I, on appelle matrice wronskienne

$$W(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix}$$

Le déterminant de $W(x)$, noté $w(x)$ est appelé wronskien

Proposition 1.32 *Soient $(y_1, y_2) \in S^2$ où S est l'ensemble des solutions de (1.18) et W la matrice wronskienne. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1)- *$\{y_1, y_2\}$ est un système fondamental de solutions*

2)- *Pour tout $x \in I$, $W(x)$ est inversible.*

3)- *il existe $x_0 \in I$ tel que $W(x_0)$ est inversible.*

Proposition 1.33 (La formul d'Abel) *Soit ,$(y_1, y_2) \in S^2$ et $w(x)$ son wronskien. Alors, si $x_0 \in I$*

$$w(x) = w(x_0)\exp - \int_{(x_0,x)} A(s)\,ds,\ \ x \in I$$

ainsi $w(x) \neq 0,\ \forall\ x \in I$ ou si $\exists\ x_0 \in I$ tel que $w(x_0) = 0$ alors $w(x) = 0,\ \forall\ x \in I$

Théorème 1.34 *On suppose que A, B et f sont des fonctions continues définier dans un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Soit $x_0 \in I$ et k_0, k_1 des nombres réelle. Le problème avec condition initiale suivant :*

$$\begin{cases} y''(x) + A(x)\,y'(x) + B(x)\,y(x) = f(x) \\ y(x_0) = k_0, \quad y'(x_0) = k_1. \end{cases}$$

Adme une unique solution définie sur I.

Théorème 1.35 *On suppose que* A, B *et* f *sont des fonctions continues définier dans un intervalle* $I \subset \mathbb{R}$. *Soit* y_A *une solution particulière de*

$$y''(x) + A(x)\,y'(x) + B(x)\,y(x) = f(x) \tag{1.19}$$

dans I.*Soit* $\{y_1, y_2\}$ *est un système fondamental de solutions d'équation*

$$y''(x) + A(x)\,y'(x) + B(x)\,y(x) = 0 \tag{1.20}$$

dans I. *Puis* y *est une solution de* (1.19) *si est seulement si*

$$y(x) = y_p(x) + \alpha y_1(x) + \beta y_2(x)$$

où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Proposition 1.36 *Supposons qu'on ait trouvé des solutions non proportionnelles* $u(x)$ *et* $v(x)$ *de l'équation homogène* (1.20.) *Voici comment obtenir une solution particulière* S *de l'équation* (1.19). *On calcule la fonction*

$$w(x) = u(x)\,v'(x) - u'(x)\,v(x)$$

(elle ne s'annule pas), et les fonctions

$$\lambda(x) = \int_{[x_0,x]} \frac{-f(s)\,v(s)}{w(s)}ds \quad et \quad \varphi(x) = \int_{[x_0,x]} \frac{f(s)\,u(s)}{w(s)}ds$$

Alors

$$S(x) = \lambda(x)\,u(x) + \varphi(x)\,v(x)$$

est une solution de (1.19) *telle que* $S(x_0) = 0$

Exemple :

(1) − trouver la solution générale de l'équation suivant

$$y'' + y = 1$$

Nous pouvons appliqué le théorème1.35 avec $I =]-\infty, +\infty[$. La solution est

$$y(x) = \alpha\cos(x) - \beta\sin(x) + 1$$

(2) −trouver la solution générale de l'équation suivant

$$y'' - 2y' + y = -3 - x + x^2$$

L'espace S des solution est donc engendré par e^x, xe^x, pour obtenir une solution particulière nous utilisons la proposition 1.36

i)- On calcule la fonction $w(x) = e^x(e^x + xe^x) - e^x(xe^x) = e^{2x}$

ii)- et les fonctions

$$\lambda(x) = \int_{[x_0,x]} -\left(-3 - s + s^2\right) se^{-s} ds \ ; \ \varphi(x) = \int_{[x_0,x]} \left(-3 - s + s^2\right) e^{-s} ds$$

danc

$$\lambda(x) = \left(xe^{-x} + 2x^2e^{-x} + x^3e^{-x} + e^{-x}\right) + C$$

$$\varphi(x) = \left(2e^{-x} - x^2e^{-x} - xe^{-x}\right) + C'$$

Alors

$$S(x) = x^2 + 3x + 1 + e^x(C + xC')$$

d'où la solution est de la forme

$$y(x) = x^2 + 3x + 1 + e^x(\alpha + \beta x)$$

Proposition 1.37 (Principe superposition) *Supposons que le second membre f est une somme $f_1(x) +\ f_2(x)$ de deux fonctions. Si $s_1(x)$ est une solution de l'équation $y''(x) + A(x)y'(x) + B(x)y(x) = f_1(x)$ et si $s_2(x)$ est une solution de l'équation $y''(x)+A(x)y'(x)+B(x)y(x) = f_2(x)$. Alors $s_1(x)+s_2(x)$ est solution de l'équation $y''(x) + A(x)y'(x) + B(x)y(x) = f_1(x) +\ f_2(x)$*

1.4.2 Equations linéaires à coefficients constants

Il s'agit des équations différentielles de la forme

$$y''(x) + p\ y'(x) + q\ y(x) = f(x)\,. \tag{1.21}$$

où $p,\ q \in \mathbb{R}$,et f une fonction continue sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Pour résoudre l'équation, il suffit, d'après les propriétés générales, de trouver une solution particulière $s(x)$ et de résoudre l'équation homogène $y''(x) + p\ y'(x) + q\ y(x) = 0$

Résolution de l'équation homogène

Il est plus simple de chercher les solutions à valeurs complexes. Rappelons que pour dériver une fonction à valeurs complexes, on dérive sa partie réelle et sa partie imaginaire. Une telle fonction est donc solution si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire le sont. Rappelons aussi que si $z = a + bi$ est un nombre complexe, on a posé

$$e^{zx} = e^{(a+bi)x} = e^{ax} \left[\cos(bx) + i\ \sin(bx)\right]$$

pour tout nombre réel x. La fonction $x \to e^{zx}$ a pour dérivée ze^{zx} . Posons $y(x) = e^{zx}$. Puisque $y''(x) = z^2 e^{zx}$, il vient $y''(x) + p\ y'(x) + q\ y(x) = (z^2 + pz + q)\, e^{zx}$. La fonction e^{zx} est solution de l'équation homogène si et seulement si le nombre z satisfait **l'équation algebrique dit équation caractéristique**

$$z^2 + pz + q = 0.$$

Premier cas $p^2 - 4q > 0$ **:** L'équation caractéristique à deux racines réelles distinctes r_1, r_2, d'où les solutions $u(x) = e^{r_1 x}$ et $v(x) = e^{r_2 x}$.Ces fonctions n'étant pas proportionnelles, on en déduit d'après le théorème précédent les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

$$y(x) = \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}\ ,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Deuxième cas $p^2 - 4q < 0$: L'équation caractéristique a deux racines distinctes conjuguées $r + i\omega$ et $r - i\omega$. Les fonctions $u(x) = e^{rx} e^{ix\omega}$ et $\overline{u}(x) = e^{rx} e^{-ix\omega}$,sont donc des solutions de l'équation homogène et il en va de même des fonctions.

$$y_1(x) = \frac{1}{2}\left(u(x) + \overline{u}(x)\right) = e^{rx}\cos(\omega x)$$
$$y_2(x) = \frac{1}{2i}\left(u(x) - \overline{u}(x)\right) = e^{rx}\sin(\omega x)$$

Puisque y_1 et y_2 ne sont pas proportionnelles, on en déduit les solutions de de l'équation homogène sont les fonctions

$$y(x) = \left[\alpha\cos(\omega x) + \beta\sin(\omega x)\right] e^{rx}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Troisième cas $p^2 - 4q = 0$: L'équation caractéristique a une racine double $-p/2$, ce qui fournit la solution réelle $u_1(x) = e^{-\frac{px}{2}}$. Montrons que la fonction $u_2(x) = xu_1(x)$ est aussi une solution : on a en effet

$$\begin{aligned}
&u_2'(x) = u_1(x) + xu_1'(x),\\
&u_2''(x) = 2u_1'(x) + xu_1''(x)\\
&2u_1'(x) + xu_1''(x) + p\ u_1(x) + xpu_1'(x) + xq\ u_1(x)\\
&= 2u_1'(x) + p\ u_1(x) + x\ \ [u_1''(x) + pu_1'(x) + q\ u_1(x)] = 0
\end{aligned}$$

car u_1 est solution et $u_1'(x) = -\dfrac{p}{2}\ u_1(x)$. Puisque les solutions u_1 et u_2 ne sont pas proportionnelles, on en déduit les solutions de de l'équation homogène sont les fonctions

$$y\,(x) = [\alpha + x\beta]\, e^{-\frac{px}{2}},\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Proposition 1.38 –

– *On suppose que p, q de l'équation* (1.21) *sont des canstantes. Nous allons étudier le cas où le second membre est de la forme*

$$f\,(x) = e^{zx} Q\,(x)$$

où Q est un polynôme et z un nombre complexe, il existe alors une solution de (1.21) *de la forme*

$$y\,(x) = e^{zx} R\,(x)$$

où R est un polynôme. Plus présisément

1- Si z n'est pas un racine de $P\,(X) = X^2 + pX + q$,

$$\deg R\,(x) = \deg Q\,(x)$$

2- Si z est racine simple de $P\,(X) = X^2 + pX + q$,

$$\deg R\,(x) = 1 + \deg Q\,(x)$$

3- Si z est racine double de $P\,(X) = X^2 + pX + q$,

$$\deg R\,(x) = 2 + \deg Q\,(x)$$

Proposition 1.39 *On considére une équation différentielle à coefficient constante de la forme*

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = e^{\lambda x}(P(x)\cos(\omega x) + Q(x)\sin(\omega x)) \tag{1.22}$$

où $\lambda, \omega \in \mathbb{R}$ *tel que* $\omega \neq 0$ *et* P, Q *deux polynômes. On pose* $y(x) = e^{\lambda x}u(x)$ *alors* (1.22) *devient*

$$au'' + (b + 2a\lambda)u' + \left(c + b\lambda + a\lambda^2\right)u = (P\cos(\omega x) + Q\sin(\omega x)) \tag{1.23}$$

On pose $k = \max(\deg P, \deg Q)$, *alors si les fonctions* $\cos(\omega x)$, $\sin(\omega x)$ *n'est pas des solutions de l'équation Homogéne. l'équation* (1.23) *à une solution partuculière de la forme*

$$u_p(x) = A(x)\cos(\omega x) + B(x)\sin(\omega x)$$

où

$$\begin{array}{l} A(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \cdots + A_0x^k \\ B(x) = B_0 + B_1x + B_2x^2 + \cdots + B_0x^k \end{array}$$

Dons le cas où $\cos(\omega x)$, $\sin(\omega x)$ *est solution de l'équation Homogéne, la solution partuculière est de la forme*

$$u_p(x) = C(x)\cos(\omega x) + D(x)\sin(\omega x)$$

avec

$$\begin{array}{l} C(x) = xA(x) = A_0x + A_1x^2 + A_2x^3 + \cdots + A_0x^{k+1} \\ D(x) = xB(x) = B_0x + B_1x^2 + B_2x^3 + \cdots + B_0x^{k+1} \end{array}$$

1.4.3 Méthode de variation des constantes

Proposition 1.40 *On considère l'équation différentielle linéaire*

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = c(x) \tag{1.24}$$

où $a; b; c : I \to K$ *sont trois applications continues définies sur un intervalle* I. *Soit* (y_1, y_2) *est un système fondamental de solutions de l'équation différentielle homogène*

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0 \tag{1.25}$$

On peut déterminer une solution de l'équation différentielle (1.24) *en la cherchant sous la forme*

$$y(x) = \lambda_1(x) y_1 + \lambda_2(x) y_2$$

où λ_1, λ_2 *sont deux fonctions dérivables à déterminer, définies sur l'intervalle* I*, intervalle de définition des fonctions* a, b *et* c*.*

Démonstration. On procède par condition nécessaire. Supposons donc qu'il existe une solution de l'équation écrite comme suit.

$$y(x) = \lambda_1(x) y_1 + \lambda_2(x) y_2$$

On a alors

$$y'(x) = \lambda_1'(x) y_1 + \lambda_2'(x) y_2 + \lambda_2(x) y_2' + \lambda_1(x) y_1'$$

On va de plus supposer que λ_1 λ_2 vérifient

$$\forall x \in I, \ \lambda_1'(x) y_1(x) + \lambda_2'(x) y_2(x) = 0 \tag{1.26}$$

afin de ne pas avoir à dériveré λ_1 et λ_2 deux fois. On obtient alors

$$\forall x \in I, \quad y''(x) = \lambda_2'(x) y_2' + \lambda_2(x) y_2'' + \lambda_1'(x) y_1' + \lambda_1(x) y_1''$$

En remplacant dans l'équation différentielle (1.24), il vient

$$\begin{gathered}
\lambda_2' y_2' + \lambda_2 y_2'' + \lambda_1' y_1' + \lambda_1 y_1'' + a(\lambda_2 y_2' + \lambda_1 y_1') + b(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = c(x) \\
\lambda_1' y_1' + \lambda_2' y_2' + \underbrace{\lambda_2(y_2'' + a y_2' + b y_2) + \lambda_1(y_1'' + a y_1' + b y_1)}_{=0 \ ((y_1, y_2) \text{ est un système fondamental de solutions})} = c(x) \\
\lambda_1' y_1' + \lambda_2' y_2' = c(x)
\end{gathered}$$

Ainsi, on cherche λ_1 λ_2 vérifient

$$\forall x \in I \ \begin{cases} \lambda_1'(x) y_1(x) + \lambda_2'(x) y_2(x) = 0 \\ \lambda_1'(x) y_1'(x) + \lambda_2'(x) y_2'(x) = c(x) \end{cases}$$

Comme (y_1, y_2) est un système fondamental de solutions de l'équation différentielle (1.25), le wronskien de ce système est non nul en tout $x \in I$.

Le système précédent admet comme solution unique.

$$\forall x \in I, \ \lambda_1'(x) = \frac{1}{w(y_1, y_2)} \begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ c(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}, \ \lambda_2'(x) = \frac{1}{w(y_1, y_2)} \begin{vmatrix} y_1(x) & 0 \\ y_1'(x) & c(x) \end{vmatrix}$$

1.4.4 Réduction de l'ordre de l'équation

On considère l'équation différentielle linéaire

$$y''(x) + p(x)\,y' + q(x)\,y = c(x)$$

Si on suppose que la fonction y_1 est une solution de l'équation

$$y''(x) + p(x)\,y' + q(x)\,y = 0 \tag{1.27}$$

Alors on pose le changement de fonction suivant

$$y(x) = y_1(x)\,u(x)$$

alors (1.27) devien

$$y_1 u'' + (2{y_1}'(x) + p(x)\,y_1)u' + (y_1'' + p(x)\,y_1' + q(x)\,y_1)u = 0.$$

y_1 est une solution de l'équation Homogéne alors on obtien

$$y_1 u'' + (2{y_1}'(x) + p(x)\,y_1)u' = 0$$

1.4.5 Exercice corrigé

Exercice 1

$$y'' - 2y' + y = x\ ,\, y(0) = y'(0) = 0$$
$$y'' - 4y' + 3y = (2x+1)e^{-x}\ ;\quad y'' - 4y' + 3y = (2x+1)e^{x}$$
$$y'' - 4y' + 3y = x^2e^x + xe^{2x}\cos(x)\quad ;\quad y'' + 9y = x+1,\, y(0) = 0$$
$$y'' - 2y' + 5y = -4e^{-x}x\cos(x) + 7e^{-x}\sin(x) - 4e^x\sin(2x)\,;$$

Changement de fonction inconnue - et on retrouve des coéffcients constants

$$xy'' + 2(x+1)y' + (x+2)y = 0. \text{ En posant } \; z = xy,$$

Changement de variable - et on retrouve des coéffcients constants

$$y'' - y' - e^{2x}y = e^{3x} \text{ en posant } t = e^x;$$
$$y'' + y'\tan(x) - y\cos(2x) = 0 \text{ en posant } t = \sin(x)\,;$$
$$x^2y'' + y = 0 \text{ en posant } t = \ln(x)\,;$$
$$(1-x^2)y'' - xy' + y = 0 \text{ sur}]-1,1[;$$

Exercice 2

On considère l'équation différentielle :

$$\left(1+x^2\right) y''(x) - 2xy'(x) + 2y(x) = x^2+2$$

1. Chercher une solution polynomiale autre que 0 de l'équation Homogene.
2. Résoudre l'équation différentielle
3. Reprendre le même exercice avec

$$\left(x^2+x\right) y'' + (x-1)\, y' - y = 0. \; Et \;\; x^2y'' - 3xy' + 4y = x^3$$

Exercice 3

Soit $p(x)$ et $q(x)$ des fonctions réel. On consdére l'équation différentielle suivante

$$y''(x) + p(x)\, y' + q(x)\, y = 0 \tag{1.28}$$

1. Montrer que par le changement d'inconnue $y(x) = a(x)\, z(x)$ l'équation (1.28) devient

$$a(x)\, z'' + (2a'(x) + p(x)\, a(x))z' + (a''(x) + p(x)\, a'(x) + q(x)\, a(x))z = 0.$$

Posons

$$a(x) = \exp\left[-\frac{1}{2}\int_{(x_0,x)} p(t)\, dt\right]$$

2. Montrer que l'on a $a(x) > 0$ pour tout x et que z est solution de l'équation différentielle linéaire

$$z'' + \left(q(x) - \frac{1}{2}p'(x) - \frac{1}{4}p^2\right) z = 0.$$

3. Utiliser cette transformation pour résoudre l'équation suivante

$$y'' + 2xy' + x^2y = 0,$$

Résoudre les équations suivantes

$$\left(1+x^2\right) y'' - 2y = 1, \quad y'' + 2xy' + x^2y = (1+x)\exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right),$$

Corrigé de exercice 1

- On commence par cherche l'équation caractéristique de l'équation homogène

$$y'' - 2y' + y = 0$$

Nous supposerons au départ que $y(x) = \beta e^{rx}$ .Nous obtenons ainsi une équation algebrique

$$r^2 - 2r + 1 = 0$$

il y a alors une racine double égale à 1. Ce qui fournit un système fondamentalle $\{y_1(x), y_2(x)\}$ tel que $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = xe^x$ en effet on a la matric Wronskian est

$$W(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & (x+1)e^x \end{pmatrix}$$

donc le Wronskian

$$w(x) = \det \begin{pmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & (x+1)e^x \end{pmatrix} = e^{2x} \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$$

On en déduit les solutions générales de l'équation homogène sont donc les fonctions de la forme

$$y(x) = (\alpha + \beta x) e^x$$

- Comme 0 n'est pas racine de l'équation caractéristique, on va chercher une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré 1. Mais $y_p(x) = \beta_1 x + \beta_0$ est solution de l'équation différentielle si et seulement si :

$$y_p(x) = \beta_1 x + \beta_0$$

vérifie

$$\begin{aligned} &(\beta_1 x + \beta_0)'' - 2(\beta_1 x + \beta_0)' + \beta_1 x + \beta_0 = x \\ &\beta_1 x + \beta_0 - 2\beta_1 = x \\ &\Longrightarrow \begin{cases} \beta_1 = 1 \\ \beta_0 - 2\beta_1 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \beta_1 = 1 \\ \beta_0 = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Les solutions de l'équation sont donc les fonctions de la forme

$$y(x) = (\alpha + \beta x) e^x + x + 2$$

Si on ajoute les conditions $y(0) = y'(0) = 0$, on obtient les équations

$$\begin{cases} \alpha + 2 = 0 \\ \alpha + \beta + 1 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha = -2 \\ \beta = 1 \end{cases}$$

La seule solution de l'équation est donc la fonction

$$y(x) = (-2 + x) e^{x} + x + 2$$

La résoulution de l'équation

$$y'' - 4y' + 3y = (2x + 1)e^{-x}$$

On commence par cherche l'équation caractéristique de l'équation homogène

$$y'' - 4y' + 3y = 0$$

Son équation caractéristique est

$$r^2 - 4r + 3 = (r - 3)(r - 1) = 0$$

Les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions

$$y(x) = \alpha e^{x} + \beta e^{3x}$$

Comme $z = -1$ n'est pas racine de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière sous la forme

$$y(x) = (\alpha + \beta x) e^{-x}$$

En dérivant, on trouve

$$y'(x) = (\beta - \alpha - \beta x) e^{-x},\ y''(x) = (\alpha - 2\beta + x\beta) e^{-x}$$

alors

$$\begin{aligned}
&y'' - 4y' + 3y = (2x + 1)e^{-x} \\
&(\alpha - 2\beta + x\beta) e^{-x} - 4(\beta - \alpha - \beta x) e^{-x} + 3(\alpha + \beta x) e^{-x} = (2x + 1)e^{-x} \\
&(\alpha - 2\beta + x\beta) - 4(\beta - \alpha - \beta x) + 3(\alpha + \beta x) = (2x + 1) \\
&8\alpha - 6\beta + 8\beta x = 2x + 1
\end{aligned}$$

Par identification α et β sont solutions du système :

$$\begin{cases} 8\alpha - 6\beta = 1 \\ 8\beta = 2 \end{cases} \Longrightarrow \alpha = \frac{5}{16},\ \beta = \frac{1}{4}$$

on trouve qu'une solution particulière est donnée par

$$y_p(x) = \left(\frac{5}{16} + \frac{1}{4}x\right) e^{-x}$$

Finalement, les solutions de l'équation avec second membre sont les fonctions de la forme

$$y(x) = \alpha e^{x} + \beta e^{3x} + \left(\frac{5}{16} + \frac{1}{4}x\right) e^{-x}$$

La résoulution de l'équation

$$y'' - 4y' + 3y = (2x+1)e^{x}$$

L'équation homogène a déjà été résolue à la question précédente. Les solutions sont les fonctions

$$y(x) = \alpha e^{x} + \beta e^{3x}$$

on remarque cette fois que $z = 1$ est racine simple de l'équation caractéristique. On cherche donc une solution particulière sous la forme

$$y(x) = \left(\alpha x^2 + \beta x\right) e^{x}$$

On dérive pour trouver

$$y'(x) = \left(\beta + (2\alpha+\beta)x + x^2\alpha\right) e^{x}, y''(x) = \left(2\alpha + 2\beta + (4\alpha+\beta)x + x^2\alpha\right) e^{x}$$

alors

$$\begin{aligned} &y'' - 4y' + 3y = (2x+1)e^{x} \\ &(\beta + (2\alpha+\beta)x + x^2\alpha) - 4(2\alpha + 2\beta + (4\alpha+\beta)x + x^2\alpha) + 3(\alpha x^2 + \beta x) = (2x+1) \\ &-8\alpha - 7\beta - 14x\alpha = 2x + 1 \end{aligned}$$

Par identification α et β sont solutions du système :

$$\begin{cases} -8\alpha - 7\beta = 1 \\ -14\alpha = 2 \end{cases} \Longrightarrow \alpha = \frac{-1}{7},\ \beta = -\frac{1}{49}$$

on trouve qu'une solution particulière est donnée par

$$y_p(x) = -\frac{1}{49}\left(7x^2 + x\right)e^x$$

les solutions de l'équation avec second membre sont les fonctions de la forme

$$y(x) = \alpha e^x + \beta e^{3x} - \frac{1}{49}\left(7x^2 + x\right)e^x$$

La résoulution de l'équation

$$y'' - 4y' + 3y = x^2 e^x + x e^{2x}\cos(x)$$

L'équation homogène a déjà été résolue à la question précédente. Les solutions sont les fonctions

$$y(x) = \alpha e^x + \beta e^{3x}$$

On cherche une solution particulière de l'équation générale en utilisant le principe de superposition des solutions

La résoulution de l'équation

$$y'' - 4y' + 3y = x^2 e^x$$

On remarque que $z = 1$ est racine simple de l'équation caractéristique. On cherche donc une solution particulière sous la forme

$$y(x) = \left(\alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3\right)e^x$$

On dérive pour trouver

$$y'(x) = \left(\alpha + (\alpha + 2\beta)x + (\beta + 3\gamma)x^2 + \gamma x^3\right)e^x$$
$$y''(x) = \left(2\alpha + 2\beta + (\alpha + 4\beta + 6\gamma)x + (\beta + 6\gamma)x^2 + \gamma x^3\right)e^x$$

alors

$$\begin{aligned}
&y'' - 4y' + 3y = x^2 e^x \\
&(2\alpha + 2\beta + (\alpha + 4\beta + 6\gamma)x + (\beta + 6\gamma)x^2 + \gamma x^3) \\
&-4(\alpha + (\alpha + 2\beta)x + (\beta + 3\gamma)x^2 + \gamma x^3) + 3(\alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3) = x^2 \\
&\Longrightarrow 2\beta - 2\alpha + (-4\beta + 6\gamma)x - 6\gamma x^2 = x^2
\end{aligned}$$

Par identification α β et γ sont ,

$$\begin{cases} 2\beta - 2\alpha = 0 \\ -4\beta + 6\gamma = 0 \\ -6\gamma = 1 \end{cases} \Longrightarrow \alpha = -\frac{1}{4}, \beta = -\frac{1}{4}, \gamma = -\frac{1}{6}$$

Les solutions sont les fonctions

$$S_1(x) = \alpha e^x + \beta e^{3x} + \left(-\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{6}x^3\right) e^x$$

2- La résoulution de l'équation

$$y'' - 4y' + 3y = xe^{2x}\cos(x)$$

On pose

$$y(x) = e^{2x}u(x)$$

on obtient

$$u'' - u = x\cos(x)$$

L'équation caractéristique est

$$r^2 - 1 = 0$$

Les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions

$$u(x) = \alpha e^x + \beta e^{-x}$$

on cherche des solutions particulières sous la formes

$$u_p(x) = (\alpha + \beta x)\cos(x) + (\alpha' + \beta' x)\sin(x)$$

On dérive pour trouver

$$\frac{d^2}{dx^2}((\alpha + \beta x)\cos(x) + (\alpha' + \beta' x)\sin(x))$$
$$-(\alpha + \beta x)\cos(x) - (\alpha' + \beta' x)\sin(x) = x\cos(x)$$

$$\Longrightarrow (2\beta' - 2\alpha)\cos x - (2\beta + 2\alpha')\sin x - 2x\beta\cos x - 2\beta' x\sin x = x\cos(x)$$

Par identification on obtient le système

$$\begin{cases} 2\beta' - 2\alpha = 0 \\ 2\beta + 2\alpha' = 0 \\ 2\beta' = 0 \\ -2\beta = 1 \end{cases} \Longrightarrow \alpha = 0, \beta = -\frac{1}{2}, \alpha' = \frac{1}{2}, \beta' = 0$$

donc

$$u_p(x) = -\frac{1}{2}x\cos(x) + \frac{1}{2}\sin(x)$$

d'ou

$$u(x) = \alpha e^{x} + \beta e^{-x} - \frac{1}{2}x\cos(x) + \frac{1}{2}\sin(x)$$

alors

$$S_2(x) = \alpha e^{3x} + \beta e^{x} - \frac{1}{2}x\cos(x)e^{2x} + \frac{1}{2}\sin(x)e^{2x}$$

Par le principe de superposition des solutions on obtien la solution générale de l équation de départ.

$$y(x) = \alpha e^{x} + \beta e^{3x} + \left(-\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{6}x^3\right)e^{x} - \frac{1}{2}x\cos(x)e^{2x} + \frac{1}{2}\sin(x)e^{2x}$$

La résoulution de l'équation

$$y'' + 9y = x + 1$$

L'équation homogène

$$y'' + 9y = 0$$

admet pour équation caractéristique associée

$$r^2 + 9 = 0$$

dont les racines sont $r = \pm 3i$. Les solutions réelles de l'équation homogène sont donc les fonctions de la forme

$$y(x) = \cos(3x) \;\; et \; y(x) = \sin(3x).$$

On cherche une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré 1, et on trouve

$$y_p(x) = \frac{1}{9}(x+1)$$

Les solutions de l'équation

$$y\left(x\right)=\alpha\cos\left(3x\right)\ +\beta\sin\left(3x\right)+\frac{1}{9}\left(x+1\right)$$

La condition $y(0)=0$ entraîne $\alpha=-\dfrac{1}{9}$.

La résoulution de l'équation

$$y''-2y'+5y=-4e^{-x}\cos\left(x\right)+7e^{-x}\sin\left(x\right)-4e^{x}\sin\left(2x\right)$$

L'équation caractéristique est $r^2-2r+5=0$, dont les racines sont $1+2i,\ 1-2i$. La solution générale de l'équation homogène est donc donnée par

$$y_h\left(x\right)=\alpha e^{x}\cos\left(2x\right)+\beta e^{x}\sin\left(2x\right),$$

On cherche ensuite une solution particulière de l'équation

$$y''-2y'+5y=-4e^{-x}\cos\left(x\right)+7e^{-x}\sin\left(x\right)$$

On pose $y\left(x\right)=e^{-x}u\left(x\right)$

$$u''-4u'+8u=-4\cos\left(x\right)+7\sin\left(x\right)$$

on cherche des solutions particulières sous la formes

$$u_p\left(x\right)=\left(\alpha+\beta x\right)\cos\left(x\right)+\left(\alpha'+\beta'x\right)\sin\left(x\right)$$

On dérive pour trouver

$$\begin{aligned}&[7\alpha-4\beta-4\alpha'+2\beta']\cos x+[4\alpha-2\beta+7\alpha'-4\beta']\sin x\\&+\left(7\beta-4\beta'\right)x\cos x+\left(4\beta+7\beta'\right)x\sin x\\&=-4\cos\left(x\right)+7\sin\left(x\right)\end{aligned}$$

Par identification on obtient le système

$$\left\{\begin{array}{l}7\alpha-4\beta-4\alpha'+2\beta'=-4\\4\alpha-2\beta+7\alpha'-4\beta'=7\\7\beta-4\beta'=0\\\left(4\beta+7\beta'\right)=0\end{array}\right.\Longrightarrow\alpha=0,\beta=0,\alpha'=1,\beta'=0$$

alors la solution est

$$u_p(x) = \sin(x)$$

donc

$$S_1(x) = e^x \sin(x)$$

On cherche de la même façon à résoudre

$$y'' - 2y' + 5y = -4e^x \sin(2x)$$

On pose $y(x) = e^x u(x)$ alors l'équation devient

$$\begin{aligned}
&e^x u(x)\\
&e^x u'' + 2e^x u' + e^x u - 2(e^x u' + e^x u) + e^x u\\
&e^x u''(x) + 2e^x u'(x) + e^x u(x)
\end{aligned}$$

$$u'' + 4u = -4\sin(2x)$$

On a $\cos(2x)$, $\sin(2x)$ est solution de l'équation Homogéne donc on va chercher une solution sous la forme

$$u_p(x) = (\alpha x \cos(2x) + \beta x \sin(2x))$$

On dérive pour trouver

$$(\alpha x \cos(2x) + \beta x \sin(2x))'' + 4(\alpha x \cos(2x) + \beta x \sin(2x)) = -4\sin(2x)$$

$$4\beta \cos(2x) - 4\alpha \sin(2x) = -4\sin(2x)$$

Par identification on obtient

$$\beta = 0, \ \ \alpha = 1$$

On trouve

$$u_p(x) = x\cos(2x)$$

donc

$$S_2(x) = xe^{-x}\cos(2x)$$

Finalement, les solutions de l'équation de départ sont les fonctions

$$y(x) = \alpha e^x \cos(2x) + \beta e^x \sin(2x) + e^x \sin(x) + xe^{-x}\cos(2x)$$

Changement de fonction inconnue - et on retrouve des coéffcients constants

$$xy'' + 2(x+1)y' + (x+2)y = 0. \quad z = xy,$$

On a

$$\begin{cases} z = xy \\ z' = xy' + y \\ z'' = xy'' + 2y' \end{cases}$$

donc

$$2\underbrace{(y + xy')}_{z'} + \underbrace{xy'' + 2y'}_{z''} + \underbrace{xy}_{z} = 0.$$

Ainsi, z vérifie l'équation

$$2z' + z'' + z = 0.$$

L'équation caractéristique est $r^2 + 2r + 1$ dont -1 est racine double. Ainsi,

$$z(x) = \alpha e^{-x} + \beta x e^{-x}$$

On en déduit que les solutions de l'équation initiale sur $]0, +\infty[$ ou sur $]-\infty, 0[$ sont les fonctions de la forme

$$y(x) = \frac{\alpha}{x} e^{-x} + \beta e^{-x}$$

La résoulution de l'équation

$$y'' - y' - e^{2x} y = e^{3x} \text{ en posant } t = e^x;$$

Posons $t = e^x$, puis $z(t) = y(x)$ soit $z(e^x) = y(x)$. On en déduit $y'(x) = e^x z'(e^x)$ puis $y''(x) = e^{2x} z''(e^x) + e^x z'(e^x)$

$$\begin{aligned} y''(x) - y'(x) - e^{2x} y(x) = e^{2x} z''(e^x) + e^x z'(e^x) - e^x z'(e^x) - e^{2x} z(e^x) = e^{3x} \\ \Longrightarrow z''(e^x) - z(e^x) = e^x \\ \Longrightarrow z''(t) - z(t) = t \end{aligned}$$

On résoud maintenant très facilement cette équation. Les solutions de l'équation homogène sont

$$z(t) = \alpha e^t + \beta e^{-t} \qquad \beta, \alpha \in \mathbb{R}$$

La fonction $t \to -t$ est solution particulière de l'équation, et donc la solution générale de l'équation vérifiée par z est de la forme

$$z(t) = \alpha e^{t} + \beta e^{-t} - t$$

Revenant à y, on trouve

$$y(x) = \alpha e^{e^{x}} + \beta e^{-e^{x}} - e^{x} \ \beta, \alpha \in \mathbb{R}$$

La résoulution de l'équation

$$y'' + y' \tan(x) - y\cos(2x) = 0 \text{ en posant } t = \sin(x)$$

L'équation de départ est définie sur chaque intervalle

$$\left] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right[.$$

Puisque les fonctions intervenant dans l'équation différentielle sont π-périodiques, on peut se contenter de résoudre l'équation sur $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$.

Posons $t = \sin(x)$, puis $z(t) = y(x)$ soit $z(\sin(x)) = y(x)$. On en déduit

$$\begin{aligned}
y'(x) &= \cos(x) z'(\sin(x)) \\
y'(x) &= \cos(x) z' \\
y''(x) &= -\sin(x) z'(\sin(x)) + \cos^{2}(x) z''(\sin(x)) \\
y''(x) &= -\sin(x) z' + \cos^{2}(x) z''
\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}
& y'' + y' \tan(x) - y\cos(2x) = 0 \\
& \Longrightarrow -\sin(x) z' + \cos^{2}(x) z'' + (\cos(x) z') \tan(x) - z\cos(2x) = 0 \\
& \Longrightarrow -\sin(x) z' + \cos^{2}(x) z'' + z' \sin(x) - z\cos(2x) = 0 \\
& \Longrightarrow \cos^{2}(x) z'' - z\cos^{2}(x) = 0 \\
& \Longrightarrow (1 - t^{2}) z'' - (1 - t^{2}) z = 0
\end{aligned}$$

la simplification étant légitime puisque $(1 - t^{2}) \neq 0$ On obtient

$$z(t) = \alpha e^{t} + \beta e^{-t} \quad \beta, \alpha \in \mathbb{R}$$

Revenant à y, on trouve

$$y(x) = \alpha e^{\sin(x)} + \beta e^{-\sin(x)}$$

La résoulution de l'équation

$$x^2 y'' + y = 0 \text{ en posant } t = \ln(x);$$

Posons $t = \ln(x)$, puis $z(t) = y(x)$ soit $z(\ln(x)) = y(x)$. On en déduit

$$y'(x) = \frac{1}{x} z'(\ln(x))$$

puis

$$y''(x) = \frac{1}{x^2} z''(\ln(x)) - \frac{1}{x^2} z'(\ln(x))$$

L'équation devient

$$x^2 \left(\frac{1}{x^2} z''(t) - \frac{1}{x^2} z'(t) \right) + z(t) = 0 \Longleftrightarrow z''(t) - z'(t) + z(t) = 0$$

L'équation caractéristique est $r^2 - r + 1$, dont $\frac{1}{2} i\sqrt{3} + \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} i\sqrt{3}$ des racines . Ainsi,

$$z(t) = e^{\frac{1}{2}t} \left(\alpha \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}t \right) + \beta \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}t \right) \right)$$

Revenant à y, on trouve

$$y(x) = \sqrt{x} \left[\alpha \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\ln(x) \right) + \beta \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\ln(x) \right) \right] \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

La résoulution de l'équation

$$(1 - x^2) y'' - xy' + y = 0 \text{ sur}]-1, 1[;$$

On pose $x = \sin(t)$ avec $t \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ et

$$\begin{aligned} z(t) &= y(\sin(t)) \\ z'(t) &= \cos(t)\, y'(\sin(t)) \\ z''(t) &= \cos^2(t)\, y''(\sin(t)) - \sin(t)\, y'(\sin(t)) \end{aligned}$$

L'équation initiale se traduit en

$$\underbrace{\cos^2(t)\, y''(\sin(t)) - \sin(t)\, y'(\sin(t))}_{z''(t)} + \underbrace{y(\sin(t))}_{z(t)} = 0 \text{ sur } \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[;$$
$$\Longleftrightarrow z''(t) + z(t) = 0 \text{ sur } \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

La solution générale est donnée par

$$z(t) = \alpha\cos(t) + \beta\sin(t)$$

En revenant à y et x, on trouve que

$$\begin{aligned} y(x) &= \alpha\cos(\arcsin x) + \beta\sin(\arcsin x) \\ y(x) &= \alpha\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)} + \beta\sin(\arcsin x) \\ y(x) &= \alpha\sqrt{1-x^2} + \beta x \end{aligned}$$

Pour résoudre l'équation sur $]1,+\infty[$, on aurait pu considérer le changement de variables $x = Ch(t)$

Corrigé de exercice 2

On considère l'équation différentielle suivant

$$\left(1+x^2\right) y''(x) - 2xy'(x) + 2y(x) = x^2 + 1$$

La rechercher d'une solution polynômiale autre que 0 de l'équation Homogene

$$\left(1+x^2\right) y''(x) - 2xy'(x) + 2y(x) = 0 \tag{1.29}$$

Autrement dit on cherche une solution de la forme

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots\cdots + a_n x^n = \sum_{i=0}^{i=n} a_i x^i$$

où $a_n \neq 0$ et $a_{n-1} \cdots\cdots a_0 \in \mathbb{R}$ de plus y est solution de (1.29) si et seulement si :

$$
\begin{aligned}
&(1+x^2)\left[\sum_{k=2}^{k=n} k(k-1)a_k x^{k-2}\right] - 2x\left[\sum_{k=1}^{k=n} k a_k x^{k-1}\right] + 2\left[\sum_{k=0}^{k=n} a_k x^k\right] = 0\\
&\Longrightarrow \left[\sum_{k=2}^{k=n} k(k-1)a_k x^{k-2}\right] + 2a_0 + \sum_{k=2}^{k=n}\left[(k(k-1)-2k+2)a_k x^k\right] = 0\\
&\Longrightarrow \left[\sum_{k=2}^{k=n} k(k-1)a_k x^{k-2}\right] + 2a_0 + \sum_{k=2}^{k=n}\left[(k^2-3k+2)a_k x^k\right] = 0\\
&\Longrightarrow \left[\sum_{k=0}^{k'=n-1} (k'+2)(k'+1)a_{k'+1} x^{k'}\right] + 2a_0 + \sum_{k=2}^{k=n}\left[(k^2-3k+2)a_k x^k\right] = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

Ce qui montre que

$$
\begin{cases}
(k'+2)(k'+1)a_{k'+1} = 0\\
2a_0 = 0\\
(k^2-3k+2)a_k = 0\\
(n^2-3n+2)a_n = 0
\end{cases}
\Longrightarrow
\begin{cases}
a_{k'+1} = 0 \text{ car } (k'+2) \neq 0 \text{ et } (k'+1) \neq 0\\
a_0 = 0\\
a_k = 0 \quad \forall k \in \{0, 3, \cdots\cdots, n-1\}\\
n \in \{1, 2\}
\end{cases}
$$

donc la solution polynômiale de l'équation (1.29) est de la forme

$$
y(x) = \alpha x^2 + \beta x + \delta \quad (\alpha, \beta, \delta) \in \mathbb{R}^3
$$

On a

$$
\begin{aligned}
&\forall x \in \mathbb{R},\ (1+x^2)y''(x) - 2xy'(x) + 2y(x) = 0 \Longleftrightarrow 2\alpha(1+x^2) - 2x(2\alpha x+\beta) + 2(\alpha x^2+\beta x+\delta)\\
&\Longleftrightarrow 2\alpha x^2 + 2\alpha - 4\alpha x^2 - 2\beta x + 2\alpha x^2 + 2\beta x + 2\delta = 0 \Longleftrightarrow \alpha = -\delta\\
&\Longrightarrow y(x) = \alpha(x^2-1) + \beta x\ ,\quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2
\end{aligned}
$$

Nous remarquons que les fonctions $y_1(x) = (x^2-1)$ et $y_2(x) = x$ forme un système fondamentale des solutions de l'équation homogene (1.29) en effet

$$
w(x) = \det\begin{pmatrix} (x^2-1) & x\\ 2x & 1 \end{pmatrix} = \left(x^2-1\right) - 2x^2 = -\left(x^2+1\right) \neq 0\ \forall x \in \mathbb{R}
$$

On suppose que

$$
y(x) = \alpha(x)\left(x^2-1\right) + \beta(x)x
$$

On pose

$$
y_1(x) = \left(x^2-1\right),\ y_2(x) = x
$$

Alors

$$\begin{aligned} y(x) &= \alpha(x) y_1 + \beta(x) y_2(x) \\ y'(x) &= \alpha'(x) y_1 + \beta'(x) y_2(x) + \alpha(x) y_1' + \beta(x) y_2'(x) \end{aligned}$$

On supposer que $\alpha,\ \beta$ vérifient

$$\alpha'(x) y_1 + \beta'(x) y_2(x) = 0$$

On obtient alors

$$y''(x) = \alpha'(x) y_1' + \beta'(x) y_2'(x) + \alpha(x) y_1'' + \beta(x) y_2''(x)$$

En reportant dans l'équation, on obtient

$$\begin{aligned} &(1+x^2)\left[\alpha' y_1' + \beta' y_2' + \alpha y_1'' + \beta y_2''\right] - 2x\left[\alpha y_1' + \beta y_2'\right] + 2\left[\alpha y_1 + \beta y_2\right] = e^{3x} + 2 \\ &(1+x^2)\left(\alpha' y_1' + \beta' y_2'\right) + \underbrace{\alpha\left[\left(1+x^2\right) y_1'' - 2x y_1' + 2y_1\right] + \beta\left[\left(1+x^2\right) y_2'' - 2x y_2' + 2y_2\right]}_{=0\ ((y_1,y_2)\text{ est un système fondamental de solutions})} = x^2+1 \\ &\Longrightarrow (1+x^2)\left(\alpha' y_1' + \beta' y_2'\right) = x^2 + 2 \end{aligned}$$

Ainsi, on cherche α, β vérifient

$$\begin{cases} \alpha'(x) y_1 + \beta'(x) y_2(x) = 0 \\ (1+x^2)\left(\alpha' y_1' + \beta' y_2'\right) = x^2+1 \end{cases}$$

Ce qui montre que

$$\begin{cases} \alpha'(x^2-1) + \beta'\ x = 0 \\ 2x\alpha' + \beta' = 1 \end{cases}$$

donc

$$\begin{aligned} \alpha' &= \frac{x}{1+x^2} \Longrightarrow \alpha = \int \frac{x}{1+x^2} dx = \\ \beta' &= \frac{1-x^2}{1+x^2} \Longrightarrow \beta = \int \frac{1-x^2}{1+x^2} dx = 2\arctan x - x \end{aligned}$$

On obtient la solution suivante $y_1(x) = (x^2-1)$ et $y_2(x) = x$

$$y(x) = \alpha\left(x^2-1\right) + \beta x + \alpha\left(x^2-1\right) + \frac{x}{2}\ln\left(x^2+1\right) + 2x\arctan x - x^2 + \lambda\ , \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

La résoulution de l'équation

$$\left(x^2+x\right)y''+(x-1)\,y'-y=0. \tag{1.30}$$

On cherche une solution de la forme

$$y\,(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots\cdots+a_nx^n=\sum_{i=0}^{i=n}a_ix^i$$

où $a_n\neq 0$ et $a_{n-1}\cdots\cdots a_0\in\mathbb{R}$ de plus y est solution de (1.30) si et seulement si :

$$\begin{aligned}
&(x^2+x)\,(2a_2+6a_3x+\cdots\cdots+n\,(n-1)\,a_nx^{n-2})+(x-1)\,(a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+na_nx^{n-1})\\
&-a_0-a_1x-a_2x^2-a_3x^3-\cdots\cdots-a_nx^n=0.\\
&\Leftrightarrow\\
&2a_2x^2+6\ a_3x^3+\cdots\cdots+n\,(n-1)\,a_nx^n+2a_2x+6a_3x^2+\cdots\cdots+n\,(n-1)\,a_nx^{n-1}\\
&+a_1x+2a_2x^2+3a_3x^3+\cdots\cdots+na_nx^n-a_1-2a_2x-3a_3x^2-\cdots\cdots-na_nx^{n-1}\\
&-a_0-a_1x-a_2x^2-a_3x^3-\cdots\cdots-a_nx^n=0\\
&\Leftrightarrow\\
&-a_0-a_1+\cdots\cdots+(n^2-2n)\,a_nx^{n-1}+(n^2-n)\,a_nx^n=0\,;\quad \forall x
\end{aligned}$$

Ce qui montre que

$$n^2-n=0$$

donc la solution polynômiale de l'équation (1.30) est de la forme

$$y\,(x)=\beta x+\delta\quad(\beta,\delta)\in\mathbb{R}^2$$

On a

$$\begin{aligned}
&(x^2+x)\,y''+(x-1)\,y'-y=0\\
&\Longrightarrow (x^2+x)\,(\beta x+\delta)''+(x-1)\,(\beta x+\delta)'-(\beta x+\delta)=0\\
&\Longrightarrow (x-1)\,\beta-(\beta x+\delta)=0\\
&\Longrightarrow -\beta=\delta\\
&\Longrightarrow y\,(x)=\beta\,(x-1)\ \ ;\quad \beta\in\mathbb{R}
\end{aligned}$$

La résolution de l'équation

$$\left(x^2+x\right)y''+(x-1)\,y'-y=0$$

On a

$$y_1(x) = x - 1$$

Donc on pose le chengement de fonction

$$y(x) = (x-1)\,u(x)$$

On dérive

$$\begin{aligned} y'(x) &= u(x) + (x-1)\,u'(x) \\ y''(x) &= 2u'(x) + (x-1)\,u''(x) \end{aligned}$$

donc l'équation devient

$$\begin{aligned} &(x^2+x)\left[2u'(x) + (x-1)\,u''(x)\right] + (x-1)\left[u(x) + (x-1)\,u'(x)\right] - (x-1)\,u(x) = 0 \\ &2\left(x^2+x\right)u' + (x-1)\left(x^2+x\right)u'' + (x-1)\,u + (x-1)(x-1)\,u' - (x-1)\,u = 0 \\ &(x-1)\left(x^2+x\right)u''(x) + \left[(x-1)(x-1) + 2\left(x^2+x\right)\right]u'(x) = 0 \\ &(x-1)\left(x^2+x\right)u''(x) + \left(3x^2+1\right)u'(x) = 0 \end{aligned}$$

Alors si on pose $z(x) = u'(x)$

$$\begin{aligned} &(x-1)\left(x^2+x\right)z'(x) + \left(3x^2+1\right)z(x) = 0 \\ &\frac{z'(x)}{z(x)} = -\frac{\left(3x^2+1\right)}{x\left(x^2-1\right)} = -\left(\frac{\alpha}{x} + \frac{\beta x}{\left(x^2-1\right)}\right) = -\frac{\alpha\left(x^2-1\right) + \beta x^2}{x\left(x^2-1\right)} \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} &\frac{z'(x)}{z(x)} = \frac{1}{x} - \frac{4x}{\left(x^2-1\right)} \\ &\ln(z(x)) = \ln(x) - 2\ln\left(x^2-1\right) = \ln\left(\frac{x}{\left(x^2-1\right)^2}\right) + C \\ &\Rightarrow z(x) = \lambda\frac{x}{\left(x^2-1\right)^2} \\ &\Rightarrow u'(x) = \lambda\frac{x}{\left(x^2-1\right)^2} \implies u(x) = \lambda\int\frac{x}{\left(x^2-1\right)^2}dx \end{aligned}$$

On pose

$$w = x^2 \implies dw = 2xdx$$

donc

$$u(x) = \lambda\int\frac{x}{\left(x^2-1\right)^2}dx = \lambda\int\frac{du}{2\left(u-1\right)^2} = -\frac{1}{2\left(u-1\right)} + \mu$$

par conséquence

$$\begin{aligned} u(x) &= -\frac{1}{2(x^2-1)} + \mu \\ \Longrightarrow\ y(x) &= (x-1)\left[-\frac{1}{2(x^2-1)} + \mu\right] \\ y(x) &= -\frac{1}{2(x+1)} + \mu(x-1) \end{aligned}$$

La résoulution de l'équation

$$x^2y'' - 3xy' + 4y = x^3$$

La rechercher d'une solution polynômiale autre que 0 de l'équation Homogene

$$x^2y'' - 3xy' + 4y = 0 \tag{1.31}$$

Autrement dit on cherche une solution de la forme

$$y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots\cdots + a_nx^n = \sum_{i=0}^{i=n} a_ix^i$$

où $a_n \neq 0$ et $a_{n-1}\cdots\cdots a_0 \in \mathbb{R}$ de plus y est solution de (1.31) si et seulement si :

$$x^2\left(\sum_{i=0}^{i=n} i(i-1)a_ix^{i-2}\right) - 3x\left(\sum_{i=0}^{i=n} ia_ix^{i-1}\right) + 4\sum_{i=0}^{i=n} a_ix^i = 0$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{i=2}^{i=n} i(i-1)a_ix^i\right) - \left(\sum_{i=1}^{i=n} 3ia_ix^i\right) + 4\sum_{i=0}^{i=n} a_ix^i = 0$$

$$\Rightarrow -3a_1x + 4a_0 + 4a_1x + \sum_{i=2}^{i=n}\left[i^2 - 4i + 4\right]a_ix^i = 0$$

Ce qui montre que

$$n^2 - 4n + 4 = 0 \Rightarrow n = 2$$

donc la solution polynômiale de l'équation (1.31) est de la forme

$$y(x) = \alpha x^2 + \beta x + \delta \quad (\beta, \delta) \in \mathbb{R}^2$$

On a

$$\begin{aligned} &2\alpha x^2 - 3x(2\alpha x + \beta) + 4(\alpha x^2 + \beta x + \delta) = 0 \\ &4\delta + x\beta = 0 \end{aligned}$$

donc

$$\beta = 0,\ \delta = 0$$

Alors la solution polynômiale est

$$y(x) = \alpha x^2,\ \alpha \in \mathbb{R}^2$$

On cherche ensuite une autre solution de (1.31) en utilisant exactement la même méthode, on pose le chengement de fonction

$$y(x) = x^2 u(x)$$

On dérive

$$y'(x) = x^2 u'(x) + 2xu(x)$$
$$y''(x) = 4xu'(x) + x^2 u''(x) + 2u(x)$$

donc l'équation devient

$$x^2\left(4xu' + x^2u'' + 2u\right) - 3x\left(x^2u' + 2xu\right) + 4x^2u = 0$$
$$u''x^4 + u'x^3 = 0 \Rightarrow \frac{u''}{u'} = -\frac{1}{x} \Rightarrow \ln u' = -\ln(x) \Rightarrow u'(x) = \lambda\frac{1}{x}$$

donc

$$u(x) = \lambda \ln x + C$$

par conséquence

$$y(x) = \lambda x^2 \ln x + Cx^2$$

On utilise la remarque 1.36 avec $u(x) = x^2$ et $v(x) = x^2 \ln x$. On calcule la fonction $w(x) = x^3(2\ln x + 1) - 2x^3 \ln x = x^3$ (elle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$) et les fonctions

$$\lambda(x) = \int \frac{-x^5 \ln x}{x^3}dx = \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{3}x^3 \ln x \quad \text{et } \varphi(x) = \int \frac{x^5}{x^3}dx = \frac{1}{3}x^3$$

On obtient alors la solution partuclière suivante

$$y_p(x) = \frac{1}{9}x^5(1 - 3\ln x) + \frac{1}{3}x^5 \ln x = \frac{1}{9}x^5$$

danc les solutions de l'équation avec second membre sont les fonctions de la forme :

$$y(x) = \alpha x^2 + \beta x^2 \ln x + \frac{1}{9}x^5$$

Corrigé de exercice 3

Soit l'équation différentielle

$$y''(x) + p(x)\, y' + q(x)\, y = 0 \tag{1.32}$$

où $p(x)$ et $q(x)$ sont des fonctions. Montrons que par le changement d'inconnue $y(x) = a(x)\, z(x)$ l'équation (1.32) devient

$$a(x)\, z'' + (2a'(x) + p(x)\, a(x))z' + (a''(x) + p(x)\, a'(x) + q(x)\, a(x))z = 0.$$

En effet

$$y'(x) = a'(x)\, z(x) + a(x)\, z'(x)$$
$$et$$
$$y''(x) = a''(x)\, z(x) + 2a'(x)\, z'(x) + a(x)\, z''(x)$$

Nous raportons les expressions dons l'équation on obtient

$$a(x)\, z'' + (2a'(x) + p(x)\, a(x))z' + (a''(x) + p(x)\, a'(x) + q(x)\, a(x))z = 0.$$

Avec

$$a(x) = \exp\left[-\frac{1}{2}\int_{(x_0,x)} p(t)\, dt\right]$$

On obtient

$$z'' + \left(q(x) - \frac{1}{2}p'(x) - \frac{1}{4}p^2\right) z = 0.$$

Pour l'équation

$$y'' + 2xy' + x^2 y = 0, \tag{1.33}$$

On pose

$$y(x) = a(x)\, z(x)$$

Avec

$$a(x) = \exp\left[-\frac{1}{2}\int_{(x_0,x)} 2t dt\right] = \gamma \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$$

On obtient

$$z'' - z = 0$$

par conséquence la solution est

$$z(x) = \alpha e^x + \beta e^{-x}$$

danc les solutions de l'équation (1.33) est

$$y(x) = \left(\alpha e^{x} + \beta e^{-x}\right)\exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) = \alpha \exp\left(-\frac{1}{2}x^2 + x\right) + \beta \exp\left(-\frac{1}{2}x^2 - x\right)$$

Nous cherchons à résoudre

$$y'' + 2xy' + x^2 y = x + 1 \tag{1.34}$$

On pose

$$y_1(x) = \exp\left(-\frac{1}{2}x^2 + x\right),\ \ y_2(x) = \exp\left(-\frac{1}{2}x^2 - x\right)$$

On procède par condition nécessaire. Supposons donc qu'il existe une solution de l'équation écrite comme suit.

$$y(x) = \lambda_1(x)\, y_1 + \lambda_2(x)\, y_2$$

On a alors

$$y'(x) = \lambda_1'(x)\, y_1 + \lambda_2'(x)\, y_2 + \lambda_2(x)\, y_2' + \lambda_1(x)\, y_1'$$

On va de plus supposer que λ_1 λ_2 vérifient

$$\forall x \in I,\ \ \lambda_1'(x)\, y_1(x) + \lambda_2'(x)\, y_2(x) = 0$$

afin de ne pas avoir à dériveré λ_1 et λ_2 deux fois. On obtient alors

$$\forall x \in I,\quad y''(x) = \lambda_2'(x)\, y_2' + \lambda_2(x)\, y_2'' + \lambda_1'(x)\, y_1' + \lambda_1(x)\, y_1''$$

En remplacant dans l'équation différentielle (1.34), il vient

$$\left(\lambda_2' y_2' + \lambda_2 y_2'' + \lambda_1' y_1' + \lambda_1 y_1''\right) + 2x\left(\lambda_1' y_1 + \lambda_2' y_2 + \lambda_2 y_2' + \lambda_1 y_1'\right) + x^2\left(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2\right) = (x+1)\exp\left(-\frac{1}{2}\right.$$

$$\left(\lambda_2' y_2' + \lambda_1' y_1'\right) + 2x\left(\lambda_1' y_1 + \lambda_2' y_2\right) + \underbrace{\lambda_1\left[y_1'' + 2xy_1' + x^2 y_1\right] + \lambda_2\left[x^2 y_2 + 2xy_2' + y_2''\right]}_{=0 \text{ est un système fondamental de solutions}} = (x+1)\exp\left(-\frac{1}{2}\right.$$

Ainsi, on cherche λ_1 λ_2 vérifient

$$\forall x \in I \begin{cases} \lambda_1'(x)\, y_1(x) + \lambda_2'(x)\, y_2(x) = 0 \\ \lambda_1'(x)\, y_1'(x) + \lambda_2'(x)\, y_2'(x) = (x+1)\exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) \end{cases}$$

Comme (y_1, y_2) est un système fondamental de solutions de l'équation différentielle (1.33), le wronskien de ce système est non nul en tout $x \in I$.

$$\begin{aligned}
w(y_1, y_2) &= y_1 y_2' - y_1' y_2 \\
w(y_1, y_2) &= -(x+1)\exp\left(-\frac{1}{2}x^2 - x\right)\exp\left(-\frac{1}{2}x^2 + x\right) - (-x+1)\exp\left(-\frac{1}{2}x^2 + x\right)\exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right. \\
w(y_1, y_2) &= -2\exp\left(-x^2\right)
\end{aligned}$$

par conséquence

$$\begin{aligned}
\lambda_1'(x) &= \frac{1}{w(y_1, y_2)}\begin{vmatrix} 0 & \exp\left(-\frac{1}{2}x^2 - x\right) \\ (x+1)\exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) & -(x+1)\exp\left(-\frac{1}{2}x^2 - x\right)\end{vmatrix}, \\
\lambda_2'(x) &= \frac{1}{w(y_1, y_2)}\begin{vmatrix} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2 + x\right) & 0 \\ (-x+1)\exp\left(-\frac{1}{2}x^2 + x\right) & (x+1)\exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)\end{vmatrix}
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
\lambda_1'(x) &= \frac{-(x+1)\exp\left(-x^2 - x\right)}{-2\exp\left(-x^2\right)}, \ \lambda_2'(x) = \frac{(x+1)\exp\left(-x^2 + x\right)}{-2\exp\left(-x^2\right)} \\
\lambda_1'(x) &= \frac{1}{2}\ (x+1)\exp(-x), \ \lambda_2'(x) = -\frac{1}{2}(x+1)\exp(x)
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\lambda_1(x) &= \frac{1}{2}\int (x+1)\exp(-x)\,dx = -\frac{1}{2}(x+2)e^{-x} \\
\lambda_2(x) &= -\frac{1}{2}\int (x+1)\exp(x)\,dx = -\frac{1}{2}xe^{x}
\end{aligned}$$

danc les solutions de l'équation avec second membre sont les fonctions de la forme :

$$y(x) = \left(\alpha e^{x} + \beta e^{-x} - x - 1\right)\exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$$

Pour l'équation

$$\left(1 + x^2\right)y'' - 2y = 1$$

La rechercher d'une solution de l'équation Homogene

$$\left(1+x^2\right)y''-2y=0$$

On pose

$$y\left(x\right)=\left(1+x^2\right)v\left(x\right)$$

donc l'équation devient

$$4xv'+\left(1+x^2\right)v''=0$$

alors

$$\int\frac{v''}{v'}dx=-4\int\frac{x}{1+x^2}dx=-2\ln\left(1+x^2\right)$$

donc

$$v'\left(x\right)=\frac{\lambda}{\left(x^2+1\right)^2}\Longrightarrow v\left(x\right)=\lambda\int\frac{1}{\left(x^2+1\right)^2}dx$$

On pose

$$x=\tan\left(t\right)\Longrightarrow dx=\left[1+\tan^2\left(t\right)\right]dt$$

alors

$$\begin{aligned}v\left(x\right)&=\lambda\int\frac{1}{1+\tan^2\left(t\right)}dt=\lambda\int\cos^2\left(t\right)dt=\frac{\lambda}{2}\int\left(1+\cos 2t\right)dt\\&=\frac{\lambda}{2}t+\frac{\lambda}{4}\sin\left(2t\right)=\frac{\lambda}{2}t+\frac{\lambda}{2}\sin\left(t\right)\cos\left(t\right)\\&=\frac{\lambda}{2}t+\frac{\lambda}{2}\tan\left(t\right)\cos^2\left(t\right)\\&=\frac{\lambda}{2}t+\frac{\lambda}{2}\frac{\tan\left(t\right)}{1+\tan^2\left(t\right)}\\&=\frac{\lambda}{2}\arctan\left(x\right)+\frac{\lambda}{2}\frac{x}{1+x^2}+\rho\end{aligned}$$

donc la solution est

$$y\left(x\right)=\frac{\lambda\left(1+x^2\right)}{2}\arctan\left(x\right)+\frac{\lambda}{2}x+\rho\left(1+x^2\right)$$

de même en utilisant la méthode de variation des constantes et nous cherchons λ ρ tel que

$$\forall x\in I\ \left\{\begin{array}{l}\lambda'\left(x\right)y_1\left(x\right)+\rho'\left(x\right)y_2\left(x\right)=0\\\lambda'\left(x\right)y_1'\left(x\right)+\rho'\left(x\right)y_2'\left(x\right)=1\end{array}\right.$$

où
$$y_1(x) = \frac{1}{2}\left(1+x^2\right)\arctan(x) + \frac{1}{2}x \text{ et } y_2(x) = \left(1+x^2\right)$$
donc
$$w(y_1, y_2) = x\left(1+x^2\right)\arctan(x) - (x\arctan(x)+1)\left(1+x^2\right) = -\left(1+x^2\right)$$
par conséquence
$$\forall x \in I,\ \lambda'(x) = -\frac{1}{(1+x^2)}\begin{vmatrix} 0 & 1+x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix},\ \rho'(x) = -\frac{1}{(1+x^2)}\begin{vmatrix} \frac{1}{2}(1+x^2)\arctan(x) + \frac{1}{2}x & 0 \\ x\arctan(x)+1 & 1 \end{vmatrix}$$
alors
$$\forall x \in I, \qquad \lambda'(x) = 1,\ \rho'(x) = -\frac{1}{2}\arctan(x) + \frac{1}{2}\frac{x}{(1+x^2)}$$
donc
$$\lambda(x) = x,\ \rho(x) = \frac{3}{4}\ln\left(x^2+1\right) - \frac{1}{2}x\arctan x$$
par conséquence les solutions de l'équation avec second membre sont les fonctions de la forme : lekraya
$$y(x) = \frac{3}{4}\left(1+x^2\right)\ln\left(x^2+1\right) + \frac{\alpha}{2}\left(1+x^2\right)\arctan(x) + \beta\left(1+x^2\right)$$

Chapitre 2

Séries numériques

2.1 Généralités sur les séries numériques

1. Pour toute suite numérique $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ on appelle série de terme général u_n la suite $(S_n)_{n\geqslant n_0}$ (que l'on notera $\sum_n u_n$ dans ce cours) définie par

$$S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k = u_{n_0} + \cdots + u_n$$

2. La limite d'une série de terme général (u_n), $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$ est simplement notée :

$$\sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k \text{ ou encore } \sum_{n\geqslant n_0} u_k$$

Donc dans ce chapitre, à partir d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ donnée, on méne l'étude conjointe des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour $n\in\mathbb{N}$, le scalaire :

$$\forall n\in\mathbb{N} \ ; \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

est appelé somme partielle d'ordre n de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$.

Des exemples

1. On appelle **série géométrique** de raison a la série dont le terme général est $u_n = a^n$ .On aura donc :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a^k = 1 + a + \cdots + a^n$$

2. Une autre famille de séries est formée des **séries de Riemann** : ce sont les séries de terme généra

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

On a donc :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \cdots + \frac{1}{n^\alpha}$$

et parmi les séries de Riemann, une est célèbre, **la série harmonique**, qui correspond à l'exposant $\alpha = 1$:

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

Le nombre H_n est souvent appelé nombre harmonique. Une remarque culturelle : mais oui, c'est de la musique... Une autre remarque : pour ces séries, on démarre par la valeur $n = 1$, par force.

2.1.1 Convergence

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$.

Définition 2.1 *On dit que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$. est* ***convergente*** *si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles a une limite finie.Une série qui ne converge pas est dite* ***divergente.*** *Ce peut être parce que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers l'infini par exemple $\left[\left(\sum_{n\geq 0} 2^n\right)\right]$ ou parce que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite par exemple $\left[\left(\sum_{n\geq 0} (-1)^n\right)\right]$. Lorsque une série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente, la limite de la suite des sommes partielles est notée :*

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = S$$

*Le caractére convergent ou divergent d'une série constitue sa **nature**.*

Exemples

- Toute série dont le terme général est nul à partir d'un certain rang est bien sûr convergente puisque la suite de ses sommes partielles est stationnaire.
- La série de terme général constant égal à 1 est divergente.
- La série de terme général constant égal à $(-1)^n$ est divergente.
- On a

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^k = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}\right) = \frac{3}{2}$$

si bien que la série $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ converge vers $\frac{3}{2}$

2.1.2 Critère de Cauchy pour les séries

Rappel : Critère de Cauchy pour les suites :

Une suite numérique (u_n) est convergente si et seulement si :

$$\forall\varepsilon \geq 0, \exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0\ \forall p > 0 \quad |u_n - u_p| < \varepsilon$$

Théorème 2.2 (Critère de Cauchy pour les séries) *La série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente si et seulement si la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles satisfait le critère de Cauchy :*

$$\forall\varepsilon \geq 0, \exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0\ \forall p > 0 \quad |S_{N+P} - S_N| < \varepsilon$$

Proposition 2.3 (Critère de triviale divergence) *Si la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente, alors son terme général u_n tend vers zéro. Autrement dit, si (u_n) ne tend pas vers zéro, la série diverge. On dit dans ce cas qu'elle diverge trivialement, ou grossièrement.*

Remarque et exemple :

La proposition précédente donne une condition nécessaire de convergence : elle n'est nullement suffisante.

$$\sum_{n\geq 0} u_n < +\infty \implies \lim_{n\to+\infty} u_n = 0 \quad \textit{mais si} \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = 0 \nRightarrow \sum_{n\geq 0} u_n < +\infty$$

1. **la série géométrique** $\sum \alpha^n$. Si $|\alpha| \geqslant 1$ on a $|\alpha|^n \geqslant 1$ pour tout n, donc la série diverge trivialement
2. **La série harmonique** $\sum \frac{1}{n}$ La série harmonique est un exemple typique de série divergente non trivialement divergente. Pour montrer qu'elle diverge, considérons ses sommes partielles $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$. On a

$$|S_{2N} - S_N| = \left| \frac{1}{N+1} + \cdots\cdots\cdots + \frac{1}{2N} \right| \geq \frac{N}{2N} = \frac{1}{2}$$

Or si (S_N) convergeait vers S on aurait aussi convergence de la sous-suite (S_{2N}) vers S, donc$|S_{2N} - S_N|$ tendrait vers 0, ce qui est exclu vu l'inégalité précédente. de plus on a $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ mais $\sum \frac{1}{n}$ divergente

3. Donnons encore une application la **Séries télescopiques**

$$\sum_{n\geq 0} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

On a

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln(N+1)$$

donc $(S_N)_{N\geq 1}$est divergente la série $\sum_{n\geq 0} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$ est divergente. Néanmoins, son terme général tend vers zéro

4. La série de terme général $u_n = \frac{1}{n(n-1)}$ est convergente de somme 1. En effet

$$u_n = \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{(n-1)} - \frac{1}{n}$$

donc

$$S_N = \sum_{n=2}^{N} \left(\frac{1}{(n-1)} - \frac{1}{n} \right)$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{N-1} - \frac{1}{N}$$

$$= 1 - \frac{1}{N} \Longrightarrow \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 1$$

en démarrant bien sûr à l'indice 2 Ce sont les simplifications successives qui s'appellent «télescopage».

2.2 Séries à termes positifs (A.T.P)

Dans ce paragraphe, nous allons nous concentrer aux séries à termes positifs. Pour être plus précis, aux séries dont les termes sont tous positifs à partir d'un certain rang. Et ce en vertu de la remarque suivante :

Remarque :

1. Or la question de savoir si une série donnée converge ou non — on dit "déterminer la nature de la série" — est généralement délicate. Le reste de ce chapitre est d'ailleurs consacré à cette question et, pour plus de clarté, on adopte les abréviations suivantes :

$$\sum_{n\geq 0} u_n \ CV \overset{déf}{\Longleftrightarrow} \text{la série de terme général } u_n \text{ converge}$$
$$\sum_{n\geq 0} u_n \ DV \overset{déf}{\Longleftrightarrow} \text{la série de terme général } u_n \text{ diverge}$$

2. La nature d'une série est indépendante de ses premiers termes

3. Cela signifie que si deux séries $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ sont telles qu'il existe n_0 tel que $\forall n > n_0 \ u_n = v_n$, alors les deux séries sont de même nature ; il est en effet immédiat que les suites de sommes partielles diffèrent d'une constante (pour $\forall n > n_0$) donc convergent ou divergent en même temps. Par contre, bien sûr, les sommes des séries seront différentes. Après ce résultat général, plaçons

nous dans l'hypothèse où tous les termes de toutes les séries qui interviennent sont positifs. L'observation essentielle est :

Théorème 2.4 *Une série* $(A.T.P)$ *est convergents ssi la suite* $(S_N)_{N\geq 1}$ *des sommes partielles est majorée*

Démonstration. Ici borné se résume à majoré, et le résultat est immédiat si l'on observe que la suite des sommes partielles est forcément croissante. ■

Proposition 2.5 (i) –

$$\sum_{n\geq 0} u_n \ CV \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} \sum_{k\geq n} u_k \ \textit{(Le reste d'une série convergente tend vers } 0\textit{)}$$

(ii) –

$$\sum_{n\geq 0} u_n \ CV \ et \quad \sum_{n\geq 0} v_n \ CV \Longrightarrow \alpha \sum_{n\geq 0} u_n + \beta \sum_{n\geq 0} v_n \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad CV$$

(iii) – *Attention*

$$\sum_{n\geq 0} u_n \ CV \quad et \quad \sum_{n\geq 0} v_n \ CV \nRightarrow \sum_{n\geq 0} u_n v_n \ CV$$

2.2.1 Théorème de comparaison

Rappel : L'énoncé $u_n \sim v_n$ quand $n \to +\infty$ signifie trés exactement

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$$

et non (u_n est à peu près égal à v_n)

Proposition 2.6

Soit (u_n) (v_n) *deux suites de nombres positifs*

$$\forall n \geqslant k, \quad u_n \leqslant v_n \ et \quad \sum_{n\geq 0} v_n \ \ CV \Longrightarrow \sum_{n\geq 0} u_n \ \ CV$$

$$\forall n \geqslant k, \quad u_n \leqslant v_n \ \ et \ \sum_{n\geq 0} u_n \ \ DV \ \Longrightarrow \sum_{n\geq 0} v_n \ \ DV$$

Si l'on a $u_n \sim v_n$ *quand* $n \to +\infty$ *alors les séries de termes généraux*

$$(u_n) \ \ et \ \ (v_n) \ \ \text{sont de même nature.}$$

Exemples :

- La série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente. Effet, on a $\frac{1}{n^2} \leqslant \frac{1}{n(n-1)}$ et la série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(n-1)}$ converge (série télescopique). Cet exemple sera généralisé plus loin
- La série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge. En effet $\frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant \frac{1}{n}$ et la série harmonique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge.
- La série $\sum_{n\geq 1} \sin\left(\frac{1}{2^n}\right)$ est une série convergente, via l'inégalité $\sin(x) \leqslant x \ \ \forall x \geqslant 0$, et la convergence de la série géométrique de raison $\frac{1}{2}$

Proposition 2.7 (Séries de Riemann) *La série*

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha} \Longrightarrow \begin{cases} si \quad \alpha > 1 \quad CV \\ si \quad \alpha \leqslant 1 \quad DV \end{cases}$$

Démonstration. Si $\alpha \leqslant 1$ alors $\frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n^\alpha}$ or la série harmonique diverge, donc il en est de même pour la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$

Si $\alpha > 1$ et si on note $\beta = \alpha - 1$, la série télescopique

$$\sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{n^\beta} - \frac{1}{(n+1)^\beta} \right)$$

est donc convergente. Or on a aussi :

$$\frac{1}{n^\beta} - \frac{1}{(n+1)^\beta} = \frac{1}{n^\beta}\left(1 - \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\beta}\right) = \frac{1}{n^\beta}\left(1 - \left(1 - \beta\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{\beta}{n^{\beta+1}} = \frac{\alpha-1}{n^\alpha}$$

Par la propriété des séries (positives) équivalentes, on en déduit que pour tout $\alpha > 1$ la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\alpha-1}{n^\alpha}$ converge, c'est-à-dire que la série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge. ■

Proposition 2.8 (Règle de Riemann) - *S'il existe* $\alpha > 1$ *tel que* $n^\alpha u_n$ *tend vers* 0, *alors* $\sum_{n\geq 1} u_n$ *converge*

- *S'il existe* $\alpha \leqslant 1$ *tel que* $n^\alpha u_n$ *tend vers* $+\infty$, *alors* $\sum_{n\geq 1} u_n$ *diverge*

Exemples :

La série $\sum_{n\geq 1} e^{-2\sqrt{n}}$ est convergente.puisqu'on a par exemple $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 e^{-2\sqrt{n}} = 0$

2.2.2 Critéres d'Alembert et de Cauchy

Théorème 2.9 (Règle de d'Alembert) *Soit* $\sum_{n\geq 1} u_n$ *une série à termes strictement positifs telle que*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lambda \in [0, +\infty]$$

- *Si* $\lambda < 1$, $\sum_{n\geq 1} u_n$ *converge.*
- *Si* $\lambda > 1$, $\sum_{n\geq 1} u_n$ *diverge trivialement.*

Donnons un exemple d'application : la série $\sum_{n\geq 1} \frac{n^2}{2^n}$ est convergente. Il suffit en effet, en notant $u_n = \frac{n^2}{2^n}$ le terme général, de calculer le rapport :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}} = \frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = \frac{1}{2}$$

Remarque

Si $\lambda = 1$, les deux comportements sont possibles, comme le montrent les séries de Riemann. Lorsque $\lambda = 1$, on peut s'en sortir en écrivant un développement limité à l'ordre 1, en $\frac{1}{n}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$. C'est l'objet du résultat suivant (admis), que l'on peut donc voir comme un raffinement du critère de d'Alembert.

Proposition 2.10 (Critère de Raabe-Duhamel) *Soit $\sum_{n\geq 1} u_n$ une série à termes strictement positifs telle que*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\lambda}{n} + O\left(\frac{1}{n^\beta}\right) \text{ tel que } \beta \geqslant 1$$

- *Si $\lambda > 1$, $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge.*
- *Si $\lambda < 1$, $\sum_{n\geq 1} u_n$ diverge*

Exemple.

La série $\sum_{n\geq 1} \frac{e^n n!}{n^n}$ est divergente. On obtient cette fois :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\dfrac{e^{(n+1)}(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}}}{\dfrac{e^n n!}{n^n}} = \frac{e^{(n+1)}(n+1)!n^n}{(n+1)^{(n+1)}e^n n!} = e\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

$$= e\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} = e \ \exp\left[-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$$

$$= e \ \exp\left[-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] \sim \exp\left[1 - n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right]$$

$$= \exp\left[\frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] \sim 1 + \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

On voit donc que la règle de d'Alembert ne permettrait pas de conclure, mais que le critère de Raabe-Duhamel s'applique avec $\lambda = -\frac{1}{2} < 1$ d'où la divergence de la série. Plus précisément, on peut en fait montrer la formule de Stirling :

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

Théorème 2.11 (Règle de Cauchy) *Si* $\sum_{n\geq 1} u_n$ *est une série ATP et si*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lambda$$

- *Si* $\lambda < 1$, $\sum_{n\geq 1} u_n$ *converge.*
- *Si* $\lambda > 1$, $\sum_{n\geq 1} u_n$ *diverge*

Ces deux règles ne sont pas sans rapport, la règle de Cauchy semble approprié aux circonstances où l'on rencontre des exposant n dans u_n, par exemple la règle de Cauchy établit la convergence de la série

$$u_n = \left(\frac{n+2}{3n-1}\right)^n$$

Mais les deux règles ne sont pas équivalentes.

Théorème 2.12 *Soit* (u_n) *une suite ATP, de termes strictement positifs a partir d'un certain rang, alors, si la limite de*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}$$

existe et vaut λ *, la limite de*

$$\sqrt[n]{u_n}$$

existe et vaut λ*.*

2.2.3 Complément : utilisation d'intégrales

Il y a beaucoup d'analogies entre la théorie des séries numériques et l'intégration des fonctions sur un intervalle non borné. Contentons-nous pour commencer d'examiner le cas d'une série de terme général$\sum f(n)$ où f est une fonction positive, décroissante. On a alors le théorème :

Théorème 2.13 *Si f est une fonction positive, décroissante $\sum f(n)$ converge si, et seulement si,*

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{(0,n)} f(x)\,dx = \lambda \in \mathbb{R}_+$$

Démonstration. Une remarque préalable : il est nécessaire que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, puisque le terme général $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n) = 0$ mais ce n'est pas suffisant, bien sûr. La démonstration repose sur :

$$\forall k,\ \forall x \in [k,\ k+1],\ f(k+1) \leqslant f(x) \leqslant f(k)$$

On en déduit, par le théorème d'intégration des inégalités :

$$\forall k,\quad f(k+1) \leqslant \int_{[k,\ k+1]} f(x)\,dx \leqslant f(k)$$

En échangeant les rôles :

$$\forall k,\quad \int_{[k,\ k+1]} f(x)\,dx \leqslant f(k) \leqslant \int_{[k-1,\ k]} f(x)\,dx$$

Il ne reste plus qu'à sommer, par exemple de $p+1$ à q

$$\forall k,\quad \sum_{k=p+1}^{q}\int_{[k,\ k+1]} f(x)\,dx \leqslant \sum_{k=p+1}^{q} f(k) \leqslant \sum_{k=p+1}^{q}\int_{[k-1,\ k]} f(x)\,dx$$

$$\forall k,\int_{[p+1,\ q+1]} f(x)\,dx \leqslant \sum_{k=p+1}^{q} f(k) \leqslant \int_{[p,\ q]} f(x)\,dx$$

Si donc la suite $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_{(0,n)} f(x)\,dx$ converge, alors la série $\sum f(n)$ converge par le critère de Cauchy. La réciproque est du même tonneau. ■

On peut appliquer ce résultat, ou si on préfère cette méthode, aux séries de Riemann, que l'on a déjà étudiées, mais aussi aux séries de Bertrand.

Théorème 2.14 (Séries de Bertrand.) *La série de terme général*

$$\frac{1}{n^{\alpha}(\ln n)^{\beta}} \quad \textit{converges si } \alpha > 1 \textit{ ou } \alpha = 1,\quad \beta > 1$$

2.3 Séries à termes quelconques

Il s'agit maintenant d'étudier des séries dont le terme général n'est pas positif. Plus précisément, les séries ATP pour n suffisamment grand, les séries à terme négatif pour n suffisamment grand, relèvent du paragraphe précédent. Commençons par une notion essentielle.

2.3.1 Séries absolument convergentes

Définition 2.15 *Une série $\sum_{n\geq 1} u_n$ est dite absolument convergente si la série $\sum_{n\geq 1} |u_n|$ est convergente.*

Il faut bien sûr comprendre «convergence de la série des valeurs absolues» (ou des modules dans le cas complexe). Le résultat important est le suivant :

Théorème 2.16 *Toute série absolument convergente est convergente et l'on a alors :*

$$\left|\sum_{n\geqslant 1} u_n\right| \leqslant \sum_{n\geqslant 1} |u_n|$$

On est donc maintenant en mesure de prouver la convergence de séries de la forme

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\ ,\alpha > 1$$

Cela dit, l'histoire n'est pas terminée puisque nous allons montrer que la série

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$$

est convergente, mais n'est pas absolument convergente.

Proposition 2.17 (Critères d'absolue convergence) *Soit $\sum_{n\geq 1} u_n$ une série à termes quelconques et $\sum_{n\geq 1} v_n$*

- *Si $|u_n| \leqslant v_n$ avec $\sum_{n\geq 1} v_n$ $CV \Longrightarrow \sum_{n\geq 1} |u_n|$ est absolument convergente.*
- *Si $|u_n| = O(v_n)$ avec $\sum_{n\geq 1} v_n$ $CV \Longrightarrow \sum_{n\geq 1} |u_n|$ est absolument convergente.*

- *Si* $|u_n| \sim v_n$ *avec* $\sum_{n\geq 1} v_n$ *CV* $\Longrightarrow \sum_{n\geq 1} |u_n|$ *est absolument convergente.*
- *S'il existe* $\alpha > 0$ *tel que* $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha |u_n| = 0$ *, alors* $\sum_{n\geq 1} u_n$ *est absolument convergente.*
- *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \lambda < 1$ *alors* $\sum_{n\geq 1} u_n$ *est absolument convergente. Et si* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \lambda > 1$ *alors* $\sum_{n\geq 1} u_n$ *est trivialement divergente.*
- *S'il existe* $\lambda > 1$ $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{\lambda}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^\beta}\right)$ *tel que* $\beta \geqslant 1$ *alors* $\sum_{n\geq 1} u_n$ *est absolument convergente.*

Nota Bene

Pour des séries à termes quelconques, le critère d'équivalence n'est plus valable : on peut avoir $u_n \sim v_n$ *et* $\sum_{n\geq 1} v_n$ *CV mais* $\sum_{n\geq 1} u_n$ *divergente*

2.3.2 Séries semi-convergentes

Définition 2.18 *Une série est dite semi-convergente si elle est convergente sans être absolument convergente.*

Mais pour que nous soyons convaincus de ne pas travailler pour rien, il nous faut trouver des séries convergentes qui ne sont pas absolument convergentes. L'exemple le plus intéressant est donné par les séries alternées.

Définition 2.19 *On appelle série alternée une série de terme général* u_n *où* u_n *s'écrit* $u_n = (-1)^n a_n$ *avec* $a_n \geqslant 0$

Théorème 2.20 (Critère des séries alternées) *Soit la série alternée* $\sum_{n\geq 1} (-1)^n a_n$ *. Si la suite* (a_n) *décroît vers* 0*, alors la série est convergente.*

Exemple.

La série harmonique alternée $\sum_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^n}{n}$ est donc convergente. C'est un exemple typique de série semi-convergente. On peut montrer que sa somme est $\sum_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^n}{n} = -\ln(2)$

Montrer que la série $\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$ est convergente.

Nota Bene. Pour pouvoir appliquer le critère des séries alternées, il est essentiel que la suite (a_n) elle-même soit décroissante : il ne suffit pas qu'un équivalent le soit. Par exemple, la série $\sum_{n\geq 1} (-1)^n a_n = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$ est alternée, avec $a_n \sim \frac{1}{n}$ et $\left(\frac{1}{n}\right)$ décroissante vers zéro. Mais (a_n) n'est pas décroissante puisque

$$a_{2n+1} = \frac{1}{2n} \geq a_{2n} = \frac{1}{2n+1}$$

on ne peut appliquer directement le critère des séries alternées. Néanmoins, par un développement limité en $\frac{1}{n}$ de $\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$ on montre que la série est bien convergente.

2.3.3 Techniques classiques

a-Développements asymptotiques

Dans de nombreuses situations, on conclut sur la nature d'une série en se ramenant à une série plus simple. On a vu que pour les séries à termes positifs, il suffit de se ramener à un équivalent. Ceci n'est plus le cas avec des séries à termes quelconques (penser au contre-exemple suivant $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ et $\sum_{n\geq 1} \left(\frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n}\right)$). Par ailleurs, un équivalent correspond à une approximation au premier ordre, laquelle ne permet pas forcément de conclure. Dans ces deux situations, il suffit souvent d'écrire un développement asymptotique du terme général, c'est-à-dire d'être plus précis dans l'approximation. Celui-ci est généralement en $\frac{1}{n}$ ou $\frac{1}{\sqrt{n}}$ et s'arrête au premier terme absolument convergent, en $\frac{1}{n^2}$ ou $\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$

Exemples :

– La série

$$\sum_{n\geq 2} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$$

est divergente. En effet, on sait que pour x voisin de 0

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \varepsilon(x)\, x^3 \text{ avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$$

Puisque $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}=0$ on en déduit :

$$\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{3}\frac{(-1)^n}{n^{\frac{3}{2}}}+\frac{\varepsilon_n}{n^{\frac{3}{2}}}\text{ avec }\lim_{n\to 0}\varepsilon_n=0$$

Or la série $\sum_{n\geq 2}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est convergente par le critère des séries alternées, les séries $\sum_{n\geq 2}\dfrac{1}{3}\dfrac{(-1)^n}{n^{\frac{3}{2}}}$, $\sum_{n\geq 2}\dfrac{\varepsilon_n}{n^{\frac{3}{2}}}$ sont absolument convergentes par le critère de Riemann, mais $\sum_{n\geq 2}\dfrac{1}{2n}$ est divergente par ce même critère. Il s'ensuit que $\sum_{n\geq 2}\ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ est divergente.

Rappel. Presque tous les développements limités classiques au voisinage de 0 se déduisent des trois développements suivants :

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots\cdots+\frac{x^n}{n!}+x^n\varepsilon(x)$$

dont on déduit les développements limités de $\cos(x)$, $\sin(x)$, $\cosh(x)$, $\sinh(x)$ etc.

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots\cdots+x^n+x^n\varepsilon(x)$$

dont on déduit les développements limités de

$$\frac{1}{1\pm x^\alpha},\quad \ln(1\pm x^\alpha),\quad \arctan(x)$$

Celui-ci peut d'ailleurs être vu comme un cas particulier du développement limité de la fonction puissance

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\alpha(\alpha-1)\frac{x^2}{2!}+\cdots\cdots+\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)\frac{x^n}{n!}+x^n\varepsilon(x)$$

2.3.4 Transformation d'Abel

Il s'agit d'une transformation qui ressemble à une intégration par parties... Soit en effet deux suites (a_n) et (b_n) , les suites des sommes partielles sont notées (A_n) et (B_n).

On a alors :

$$\sum_{i=n+1}^{n+p} a_i b_i = \sum_{i=n+1}^{n+p} a_i \left(B_i - B_{i-1}\right)$$

$$\sum_{i=n+1}^{n+p} a_i b_i = a_{n+p} B_{n+p} - a_{n+1} B_n + \sum_{i=n+1}^{n+p-1} \left(a_{i+1} - a_i\right) B_i$$

On va utiliser cette transformation dans le contexte de ce qu'on appelle la règle d'Abel

Théorème 2.21 (Règle d'Abel) *Soit une série* $\sum a_n b_n$ *où* (a_n) *est une suite réelle positive, qui converge en décroissant vers* 0*, tandis que* (b_n) *est une suite, éventuellement complexe, telle que la suite des sommes partielles* (B_n) *est bornée, par* B*. Alors la série*

$$\sum a_n b_n \quad \textit{est convergente}$$

Corollaire 2.22 *La série* $\sum \dfrac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ *où* $\theta \neq 0 \pmod{2\pi}$ *et* $\alpha > 0$*, est convergente*

Démonstration. La suite $\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$ converge en décroissant vers 0. Reste à étudier les sommes partielles de $e^{in\theta}$ Or :

$$e^{i\theta} + e^{i2\theta} + \cdots\cdots + e^{in\theta} = e^{i\theta} \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} = e^{i\frac{(n+1)}{2}\theta} \frac{\sin\left(\dfrac{n\theta}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)}$$

le dénominateur n'est pas nul, vue l'hypothèse, et, plus précisément :

$$|B_n| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\right|}$$

En prenant partie réelle et partie imaginaire, on a donc la convergence des séries de terme général

$$\sum \frac{\cos(n\theta)}{n^\alpha} \text{ et } \sum \frac{\sin(n\theta)}{n^\alpha}$$

sous les mêmes hypothèses. Une question : quand, dans le cas des séries ci-dessus décrites, peut-on assurer qu'il y a absolue convergence ? ■

Remarque.

(∗) Dire que les sommes partielles de la série $\sum b_n$ sont bornées signifie qu'il existe $M > 0$ tel que :

$$\sum_{n=0}^{N} b_n \leqslant M$$

(∗∗) La formule obtenue par transformation d'Abel :

$$\sum_{i=n+1}^{N+p} a_i b_i = a_{N+p} B_{N+p} - a_{N+1} B_N + \sum_{i=N+1}^{N+p-1} (a_{i+1} - a_i) B_i$$

est à rapprocher de l'intégration par parties :

$$\int_{(a,b)} F(x) g(x) dx = F(b) G(b) - F(a) G(b) - \int_{(a,b)} f(x) G(x) dx$$

2.4 Exercices corrigés

Exercice 2.4.1 *Calculer la somme des séries de termes géneral suivant :*

$$u_n = \frac{1}{4n^2 - 1} \ , \ v_n = \frac{1}{n(n-1)}$$

Exercice 2.4.2 *Déterminer la nature des séries suivantes* (*convergent ou divergente*)

$$(1) * \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right), \ (2) * \sum_{n\geq 2} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(\frac{1+n}{n-1}\right). \ (3) * \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2 - \ln n}$$

$$(4) * \sum_{n\geq 2} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}, \ (5) * \sum_{n\geq 1} \left(1 - \cos\frac{1}{n}\right), \ (6) * \sum_{n\geq 1} \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^n$$

Exercice 2.4.3 *Soit* $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ *et* $\sum\limits_{n\geq 1} b_n$ *deux séries à termes strictement positif vérifient :*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n} \ \forall n \geq n_0$$

preuver que $\sum\limits_{n\geq 1} b_n$ *converge , alors* $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ *converge aussi .*

Exercice 2.4.4 *Déterminer la nature des séries suivantes*

$$\sum_{n\geq 1} \frac{n^{n-2}}{e^n \ n!}, \quad \sum_{n\geq 1} \frac{n^n}{e^n \ n!}$$

Exercice 2.4.5 *Déterminer pour quelle valeur de* α *la série suivante converge :*

$$\sum_{n\geq 1} \left(1 - n \sin \frac{1}{n}\right)^{\alpha}$$

Exercice 2.4.6 *Etudier la convergence des séries suivantes :*

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n (\ln n)^{\alpha}}, \ \sum_{n\geq 3} \frac{1}{n \ \ln n \ \ln(\ln n)}$$

Exercice 2.4.7 *Préciser la nature de chacune des séries suivantes :*

$(a) * \sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}, \quad (b) * \sum_{n\geqslant 1} (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n}\right), \ (c) * \ \sum_{n\geqslant 1} (-1)^n \cos\left(\frac{1}{n}\right)$

$(d) * \sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n \ln(n)}{\sqrt{n}}, \quad (e) * \ \sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{\ln(n)}, \ (f) * \ \sum_{n\geqslant 1} \sin\left(\frac{1}{n}\right) \cos\left(\frac{1}{n}\right)$

$(g) * \sum_{n\geqslant 1} \arctan\left(\frac{1}{n}\right) \sin(n), \quad (h) * \ \sum_{n\geqslant 1} (-1)^n \left(1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$

$(j) * \sum_{n\geqslant 1} (-1)^n \tan\left(\frac{1}{n^2}\right)$

Exercice 2.4.8

Soit $\alpha \neq 0$. Etudier la nature des séries de terme général suivant (Utiliser un développement limité).

$$(a) * u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^{n+1}};\ (b) * v_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}$$

On considère la série de terme général

$$u_n = \frac{\cos(n)}{n^\alpha + \cos(n)}, \textit{où } \alpha \in \mathbb{R}.$$

1* *Si $\alpha > 1$ montrer que la série converge absolument.*

2* *Si $\frac{1}{2} < \alpha \leqslant 1$, montrer que la série converge*

3* *Si $\alpha = \frac{1}{2}$ montrer que la série diverge*

Corrigé d'exercice 1

On veut connaître la somme des séries de termes géneral suivant :

(a) Décomposer la fraction rationnelle en éléments simples, c'est-à-dire sous la forme :

$$\tfrac{1}{4x^2-1} = \frac{\alpha}{2x+1} + \frac{\beta}{2x-1} = \frac{\alpha(2x-1) + \beta(2x+1)}{4x^2-1}$$

$$= \frac{\beta - \alpha + 2x(\alpha + \beta)}{4x^2-1}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \beta - \alpha = 1 \\ \alpha + \beta = 0 \end{cases} \Longrightarrow \alpha = -\frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{2}$$

alors

$$\frac{1}{4x^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2x-1} - \frac{1}{2x+1}\right)$$

(b) Voir alors que dans la somme partielle :

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \tfrac{1}{4n^2-1} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2N-1} - \frac{1}{2N+1}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{2N+1}\right]$$

des termes se télescopent, et en déduire une expression simple de

$$S_N = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{2N+1}\right]$$

donc la somme de la série est

$$\lim_{N\to+\infty} S_N = \frac{1}{2}\lim_{N\to+\infty}\left[1 - \frac{1}{2N+1}\right] = \frac{1}{2}$$

De même pour la série de termes géneral

$$v_n = \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{(n-1)} - \frac{1}{n}$$

alors

$$S_N = \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n=2}^{N}\left(\frac{1}{(n-1)} - \frac{1}{n}\right)$$
$$= 1 - \frac{1}{N}$$

donc la somme de la série est

$$\lim_{N\to+\infty} S_N = \lim_{N\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{N}\right) = 1$$

Corrigé d'exercice 2

- La série

$$(1) * \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

est à termes positifs et de plus on a

$$\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n^2} \quad \text{car } \ln(1+x) \leqslant x \ \forall x \in]-1,+\infty[$$

alors la série est convergente en effet la série de Rieman $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ est convergente

- La série

$$(2) * \sum_{n\geq 2}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(\frac{1+n}{n-1}\right)$$

est à termes positifs et de plus on a

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(\frac{1+n}{n-1}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{2}{(n-1)}\right)$$

$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}\frac{2}{(n-1)}$$

$$\leqslant \frac{2}{(n-1)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{(Théorème de comparaison)}$$

alors la série est convergente en effet la série $\sum_{n\geqslant 2}\frac{2}{(n-1)^{\frac{3}{2}}}$ est convergente

- La série

$$(3) * \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2-\ln n}$$

On a

$$\ln\left(x^2\right) \leqslant x^2 \ \forall x \in]0,+\infty[$$

alors

$$2\ln n \leqslant n^2 \Longrightarrow \frac{\ln n}{n^2} \leqslant \frac{1}{2} \Longrightarrow -\frac{\ln n}{n^2} \geqslant -\frac{1}{2} \Longrightarrow 1-\frac{\ln n}{n^2} \geqslant \frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{1-\dfrac{\ln n}{n^2}} \leqslant 2$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{n^2\left[1-\dfrac{\ln n}{n^2}\right]} \leqslant \frac{2}{n^2}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{n^2-\ln n} \leqslant \frac{2}{n^2} \quad \text{(Théorème de comparaison)}$$

donc la série est convergente en effet la série de Rieman $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ est convergente

- La série

$$(4) * \sum_{n\geq 2} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$$

On a

$$\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}} = \frac{1}{n^{\ln\ln n}}$$

donc

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \ln\ln n_0 \geq 1$$

La série est donc convergente.

- La série

$$(5) * \sum_{n\geq 1} \left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$$

On a

$$\cos(x) = 1-\frac{x^2}{2!} + O\left(x^3\right)$$

alors

$$\cos\left(\frac{1}{n}\right) \sim 1-\frac{\left(\dfrac{1}{n}\right)^2}{2!} \Longrightarrow 1-\cos\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{2n^2}$$

La série est donc convergente.

- La série

$$(6) * \sum_{n\geq 1} \left(\sqrt[n]{n}-1\right)^n$$

on utilise la règle de Cauchy donc on a

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n}-1=0<1$$

La série est donc convergente.

Corrigé d'exercice 3

On pose

$$c_n=\frac{a_n}{b_n}$$

Par hypothèse,

$$c_{n+1}=\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\leqslant\frac{a_n}{b_n}=c_n \implies c_{n+1}\leqslant c_n$$

La suite $\{c_n\}$ est donc décroissante pour $n\geqslant n_0$ Ceci implique que la suite est bornée, autrement dit, qu'il existe $C>0$ tel que

$$0\leqslant c_n\leqslant C$$

pour $n\in\mathbb{N}^*$ D'où,

$$\sum_{n\geqslant 1} a_n=\sum_{n\geqslant 1} c_n b_n\leqslant C\sum_{n\geqslant 1} b_n$$

ce qui complète la démonstration de la proposition.

Corrigé d'exercice 4

- La série

$$\sum_{n\geq 1}\frac{n^{n-2}}{e^n\ n!}$$

on utilise la formule de Stirling

$$n!\sim\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}$$

on obtient

$$\frac{n^{n-2}}{e^n\ n!}\sim\frac{n^{n-2}}{n^n\sqrt{2\pi n}}=\frac{1}{n^2\sqrt{2\pi n}}\leqslant\frac{1}{n^2}\ :$$

La série est donc convergente

** ou on utilise le critère de Raabe-Duhamel donc on a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\dfrac{(n+1)^{n-1}}{e^{(n+1)}\ (n+1)!}}{\dfrac{n^{n-2}}{e^n\ n!}} = \frac{1}{e}\frac{(n+1)^{n-2}}{n^{n-2}} = \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-2}$$

$$= \frac{1}{e}e^{(n-2)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} \sim \frac{1}{e}\exp\left[\frac{(n-2)}{n} - \frac{(n-2)}{2n^2} + O\left(\frac{(n-2)}{n^3}\right)\right]$$

$$\sim \frac{1}{e}\exp\left[1 - \frac{2}{n} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{n^2} + O\left(\frac{(n-2)}{n^3}\right)\right]$$

$$\sim 1 - \frac{5}{2n} + \frac{1}{n^2} + O\left(\frac{(n-2)}{n^3}\right)$$

La série est donc convergente.

Corrigé d'exercice 5

- La série

$$\sum_{n\geq 1}\left(1 - n\sin\frac{1}{n}\right)^{\alpha} \tag{2.1}$$

On a

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + O\left(x^4\right)$$

alors

$$\sin\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

donc

$$\left(1 - n\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\alpha} = \frac{1}{6^{\alpha}n^{2\alpha}} + O\left(\frac{1}{n^{3\alpha}}\right)$$

Les valeur de α pour que la série soit convergente est

$$2\alpha > 1 \Longrightarrow \alpha > \frac{1}{2}$$

Corrigé d'exercice 6

Remarque 2.23 (Condensation de Cauchy) *On note respectivement* S_n *et* $\widetilde{S}_n$ *les sommes partielles des séries*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} 2^n u_{2^n}$$

On a alors, pour $n \leqslant 2^k$

$$S_n \leqslant u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{2^k} + \cdots + u_{2^{k+1}-1} \leqslant u_1 + 2u_2 + \cdots + 2^k u_{2^k} = \widetilde{S}_k$$

Pour $n > 2^k$, *on a*

$$S_n \geqslant u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{2^{k+1}-1} + \cdots + u_{2^k} \geqslant u_1 + 2u_2 + \cdots + 2^{k-1} u_{2^k} = \frac{1}{2}\widetilde{S}_k$$

Les suites $\{S_n\}$ *et* $\left\{\widetilde{S}_n\right\}$ *sont donc soit toutes les deux bornées, soit toutes les deux non bornées.*

Remarque 2.24 (Théorème de Schlömilch) *(une généralisation du théorème de Cauchy).Si* $\{g_k\}$ *est une suite strictement croissante d'entiers strictement positifs telle qu'il existe* $C > 0$ *vérifiant*

$$(g_{k+1} - g_k) \leqslant C\,(g_k - g_{k-1})\,,\ \forall k \in \mathbb{N}^*$$

et si $\{v_n\}$ *est une suite positive strictement décroissante, alors*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n < +\infty \Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} (g_{n+1} - g_n)\, v_{g_n} < +\infty$$

- La série

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n\,(\ln n)^{\alpha}}$$

- On applique le test de condensation de Cauchy. La série condensée étant

$$\sum_{n\geq 1} \frac{2^n}{2^n (\ln 2^n)^\alpha} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha (\ln 2)^\alpha}$$

la série converge pour $\alpha > 1$ et diverge pour $0 < \alpha \leqslant 1$ .Si $\alpha \leqslant 0$ la divergence de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ se déduit immédiatement du test de comparaison.

- La série

$$\sum_{n\geq 3} \frac{1}{n \ \ln n \ \ln(\ln n)}$$

On applique le test de condensation de Cauchy. La série condensée étant

$$\sum_{n\geq 3} \frac{2^n}{2^n \ \ln 2^n \ \ln(\ln 2^n)} = \sum_{n\geq 3} \frac{1}{n \left[\ln 2\right] \ \ln\left[n(\ln 2)\right]}$$

$\alpha = 1$ donc la série est divergente.

Corrigé d'exercice 7

- La série

$$(a) * \sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

est convergente (Critère des séries alternées).

- La série

$$(b) * \sum_{n\geqslant 1} (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$$

on a la fonction $\sin(x)$ est croissante en $]0, \pi[$ donc

$$\sin\left(\frac{1}{n}\right) \text{ décroît vers } 0$$

alors la série est convergente (Critère des séries alternées).

- La série

$$(c) * \sum_{n\geqslant 1} (-1)^n \cos\left(\frac{1}{n}\right)$$

On a

$$(c) * \lim_{n\to+\infty} (-1)^n \cos\left(\frac{1}{n}\right) = \pm 1 \neq 0$$

donc la série est divergente.

- La série

$$(d) * \sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n \ln(n)}{\sqrt{n}}$$

on a la fonction $\dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$ est croissante en $]0, e^2[$ et decroissante en $]e^2, +\infty[$ donc

$$\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} \text{ décroît vers } 0$$

alors la série est convergente (Critère des séries alternées).

- La série

$$(e) * \sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{\ln(n)}$$

On a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{\ln(n)} = \pm\infty \neq 0$$

donc la série est divergente.

- La série

$$(f) * \sum_{n\geqslant 1} \sin\left(\frac{1}{n}\right) \cos\left(\frac{1}{n}\right)$$

On a

$$\sin\left(\frac{1}{n}\right) \cos\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{1}{2n}\right) \sim \frac{1}{2n}$$

donc la série est divergente.

- La série

$$(g) * \sum_{n\geqslant 1} \arctan\left(\frac{1}{n}\right) \sin(n)$$

On pose $a_n = \arctan\left(\frac{1}{n}\right)$ et $b_n = \sin(n)$ on a

$$a_n = \arctan\left(\frac{1}{n}\right)$$

est une suite réelle positive, qui converge en décroissant vers 0 tandis que les sommes partielles $b_n = \sin(n)$ est bornée

$$\left|\sum_{n=0}^{N} \sin(n)\right| \leqslant \left|\frac{1}{\sin(0.5)}\right|$$

Alors la série la règle d'Abel assure la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} \arctan\left(\frac{1}{n}\right)\sin(n)$

- La série
$$(h) * \sum_{n\geqslant 1}(-1)^n\left(1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$
est convergente en effet
$$\left|(-1)^n\left(1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right| = \left(1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) \sim \frac{1}{2n^2}$$

- La série
$$(j) * \sum_{n\geqslant 1}(-1)^n \tan\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
est convergente en effet
$$\left|(-1)^n \tan\left(\frac{1}{n^2}\right)\right| = \tan\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n^2}$$

Corrigé d'exercice 8

- Pour la série
$$(a) * u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^{n+1}}$$
Cette série est absolument convergente pour $\alpha > 1$ puisque :
$$|u_n| = \left|\frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^{n+1}}\right| \sim \frac{1}{n^\alpha}$$
et que la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est une série de Riemann convergente pour $\alpha > 1$. Mais cette série n'est pas absolument convergente pour $0 < \alpha \leqslant 1$ puisque :
$$|u_n| = \left|\frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^{n+1}}\right| \sim \frac{1}{n^\alpha}$$
et que la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est une série de Riemann divergente pour $0 < \alpha \leqslant 1$.

C'est une série alternée, car de la forme $\sum(-1)^n a_n$ avec $a_n = \dfrac{1}{n^\alpha + (-1)^{n+1}} > 0$ pour tout $n \geqslant 1$. On peut lui appliquer le critère des séries alternées puisque la suite (a_n) est décroissante en effet :

$$a_{2n+1} - a_{2n} = \frac{1}{(2n+1)^\alpha + 1} - \frac{1}{(2n)^\alpha - 1} = \frac{(2n)^\alpha - (2n+1)^\alpha - 2}{[(2n+1)^\alpha + 1]((2n)^\alpha - 1)} \leqslant 0$$

de plus on a :

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^\alpha + (-1)^{n+1}} = 0$$

donc la série est semi-convergente pour $0 < \alpha \leqslant 1$

- Pour la série

$$(b) * v_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}$$

Cette série est absolument convergente pour $\alpha > 1$ puisque :

$$|u_n| = \left| \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n} \right| \sim \frac{1}{n^\alpha}$$

et que la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est une série de Riemann convergente pour $\alpha > 1$. Mais cette série n'est pas absolument convergente pour $0 < \alpha \leqslant 1$ puisque :

$$|u_n| = \left| \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n} \right| \sim \frac{1}{n^\alpha}$$

et que la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est une série de Riemann divergente pour $0 < \alpha \leqslant 1$

C'est une série alternée, car de la forme $\sum(-1)^n a_n$ avec $a_n = \dfrac{1}{n^\alpha + (-1)^n} > 0$ pour tout $n \geqslant 1$ Cependant on ne peut lui appliquer le critère des séries alternées puisque la suite (a_n) n'est donc pas décroissante en effet :

$$a_{2n+1} - a_{2n} = \frac{1}{(2n+1)^\alpha - 1} - \frac{1}{(2n)^\alpha + 1} = \frac{(2n)^\alpha - (2n+1)^\alpha + 2}{[(2n+1)^\alpha + 1]((2n)^\alpha - 1)} \geqslant 0$$

Un développement asymptotique de $\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}$ est :

$$\frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n} = \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\left[\frac{1}{1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}}\right] = \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\left(1 - \frac{(-1)^n}{n^\alpha} + O\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)^2 + \right)$$

$$= \frac{(-1)^n}{n^\alpha} - \frac{1}{n^{2\alpha}} + O\left(\frac{(-1)^n}{n^{3\alpha}}\right)$$

c'est-à-dire que le terme général de la série est la somme des trois termes

$$\alpha_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha},\ \beta_n = \frac{1}{n^{2\alpha}} \ \ et\ \ \delta_n = O\left(\frac{(-1)^n}{n^{3\alpha}}\right)$$

La série $\sum \alpha_n$ est convergente par le critère des séries alternées, la série $\sum \beta_n$ est convergente par le critère de Riemann si $\frac{1}{2} < \alpha \leqslant 1$ et divergente pour $0 < \alpha \leqslant \frac{1}{2}$ et la série $\sum \delta_n$ est convergente a fortiori. Par conséquent, la série initiale est convergente pour $\frac{1}{2} < \alpha \leqslant 1$ et divergente pour $0 < \alpha \leqslant \frac{1}{2}$.

- Pour la série

$$u_n = \frac{\cos(n)}{n^\alpha + \cos(n)}$$

Cette série est absolument convergente pour $\alpha > 1$ puisque :

$$|u_n| = \left|\frac{\cos(n)}{n^\alpha + \cos(n)}\right| \leqslant \frac{1}{n^\alpha - 1} \leqslant \frac{2}{n^\alpha}$$

et que la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est une série de Riemann convergente pour $\alpha > 1$.

Un développement asymptotique de $\dfrac{\cos(n)}{n^\alpha + \cos(n)}$ est :

$$\frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n} = \frac{\cos(n)}{n^\alpha}\left[\frac{1}{1+\frac{\cos(n)}{n^\alpha}}\right] = \frac{\cos(n)}{n^\alpha}\left(1 - \frac{\cos(n)}{n^\alpha} + O\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)^2 + \right)$$

$$= \frac{\cos(n)}{n^\alpha} - \frac{\cos^2(n)}{n^{2\alpha}} + O\left(\frac{\cos^3(n)}{n^{3\alpha}}\right)$$

La suite $\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right)$ converge en décroissant vers 0. Reste à étudier les sommes partielles de $\cos(n)$ Or :

$$e^{i\theta}+e^{i2\theta}+\cdots\cdots+e^{in\theta}=e^{i\theta}\frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}=e^{i\frac{(n+1)}{2}\theta}\frac{\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

donc

$$\left|\sum_{n=0}^{N}\cos(n)\right|\leqslant\frac{1}{\left|\sin\left(\frac{1}{2}\right)\right|}$$

alors la série $\sum\frac{\cos(n)}{n^{\alpha}}$ est convergente par la Règle d'Abel pour $0<\alpha\leqslant 1$, mais la série $(A.T.P)\sum\frac{\cos^2(n)}{n^{2\alpha}}$ est convergente par le critère de Riemann si $\frac{1}{2}<\alpha\leqslant 1$ et la série $\sum O\left(\frac{\cos^3(n)}{n^{3\alpha}}\right)$ est convergente a fortiori. Par conséquent, la série initiale est convergente pour $\frac{1}{2}<\alpha\leqslant 1$

Pour $\alpha=\frac{1}{2}$ la

$$\frac{\cos(n)}{\sqrt{n}}-\frac{\cos^2(n)}{n}+O\left(\frac{\cos^3(n)}{n^{3\alpha}}\right)$$

.La série $(A.T.P)\sum\frac{\cos^2(n)}{n}$ est divergente donc la série initiale est divergente pour $\alpha=\frac{1}{2}$