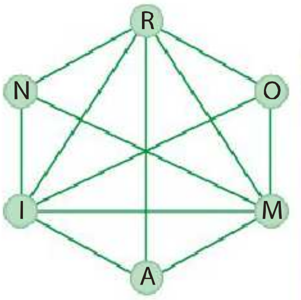
Chapitre 4

Applications de la dérivation et problèmes

Aux Émirats arabes unis, le gratte-ciel écologique Burj al-Taqa est en projet. Son architecture et son design seront conçus pour utiliser le minimum de métal sans compromettre sa rigidité et permettre d'obtenir le maximum de lumière.

Énigme ★

Romain a écrit son prénom avec six jetons portant chacun une lettre.



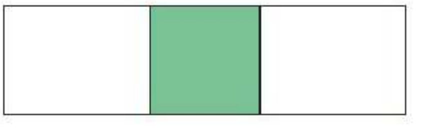
Il propose à Marion de procéder à des échanges de deux lettres reliées par un segment de façon à transformer ROMAIN en MARION.

➤ ***Quel est le nombre minimal d'échanges ?***

Source :
Championnat de Jeux Mathématiques et Logiques.

Énigme ★★

Un drapeau est constitué d'un carré vert situé entre deux rectangles blancs identiques.



➤ ***Quelle est la hauteur du drapeau sachant que l'aire des zones blanches est maximale pour une longueur totale de 4 m ?***

Source :
Stephen Barr, 2nd Miscellany of Puzzles, Macmilan.

Vérifier les acquis

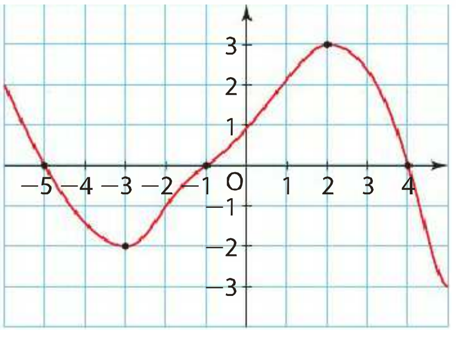
Compléments numériques

Travailler en autonomie

1 Déterminer graphiquement le sens de variation d'une fonction

Formulaire p. 249, thème 10

f est la fonction définie sur $[-6\,;5]$ représentée par la courbe ci-contre.
Dresser le tableau de variation de la fonction *f*.



2 Lire graphiquement le signe d'une fonction

Formulaire p. 245, thème 8

f est la fonction définie sur $[-6\,;5]$ représentée par la courbe ci-contre.
Donner le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

3 Comprendre un tableau de variation

Formulaire p. 249, thème 10

Voici le tableau de variation d'une fonction *f* définie sur l'intervalle $[-6\,;15]$.

x	-6	-2	4	5	15
$f(x)$	-4 ↘	-7 ↗	0 ↗	2 ↘	1

a) Donner le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.
b) Comparer $f(1)$ et $f(5)$, puis $f(-5)$ et $f(-3)$.

4 Étudier le signe d'une fonction affine

Formulaire p. 248, thème 8

Étudier le signe de chacune des fonctions affines définies sur $\mathbb{R}$ par :
a) $f(x) = 5x - 10$
b) $g(x) = -3x - 9$

5 Étudier le signe d'une fonction polynôme de degré deux

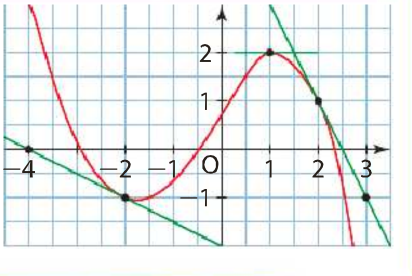
Chapitre 1, page 20

Étudier le signe de chacune des fonctions polynômes de degré deux définies sur $\mathbb{R}$ par :
a) $f(x) = 3x^2 - 2x - 1$
b) $g(x) = x^2 + x + 1$
c) $h(x) = -x^2 + 4$

6 Lire graphiquement un nombre dérivé

Chapitre 3, page 62

Voici la courbe d'une fonction *f* définie et dérivable sur $[-4\,;3]$. Ses tangentes aux points d'abscisses -2 ; 1 et 2 sont représentées en vert.
Lire les nombres dérivés :
a) $f'(-2)$
b) $f'(1)$
c) $f'(2)$



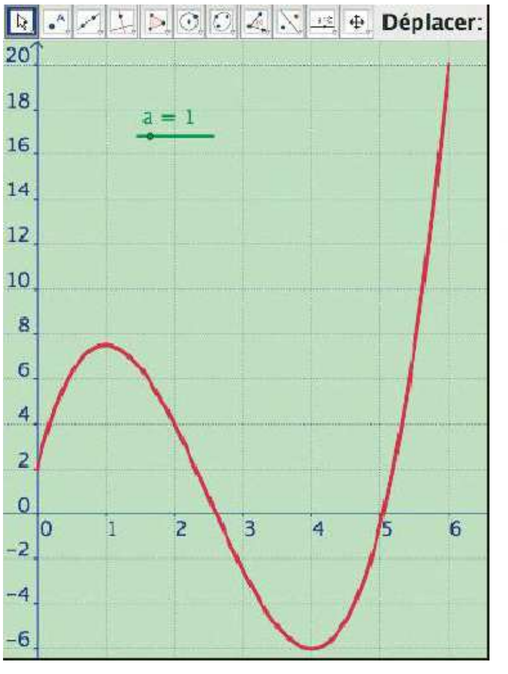
Vérifier les réponses p. 261

Objectif
Découvrir le lien entre les variations d'une fonction et le signe de sa dérivée.

1 Du sens de variation au signe de la dérivée

f est la fonction définie et dérivable sur $[0\,;6]$ par $f(x) = x^3 - 7{,}5x^2 + 12x + 2$.

On se propose de conjecturer, sur un exemple, le lien entre le sens de variation de *f* et le signe de *f*′.



1 Expérimentation

a) Tracer la représentation graphique de *f* à l'aide du logiciel GeoGebra.

b) Dresser le tableau de variation de *f*.

c) • Créer un curseur *a* allant de 0 à 6 avec un incrément de 0,1.

• Créer le nombre dérivé $f'(a)$ en saisissant pente[tangente [*a*,*f*]].

• Déplacer le curseur afin de compléter, par lecture, le tableau de signe de $f'(x)$.

x	0 6
$f'(x)$	

2 Conjecture

À l'aide des tableaux obtenus aux questions **b)** et **c)**, conjecturer un lien entre les variations de *f* et le signe de *f*′.

Objectif
Découvrir le lien entre le signe de la dérivée d'une fonction et les variations de la fonction.

2

On se propose de savoir si, connaissant le signe de la dérivée *f*′ d'une fonction *f*, on peut en déduire le sens de variation de *f*.

1 *f* est une fonction définie et dérivable sur $[-2\,;4]$, dont la dérivée est strictement positive.

a) Que sait-on alors des coefficients directeurs des tangentes à la courbe de *f* ?

b) Tracer trois allures possibles pour la courbe de *f*.

Quel est le point commun entre les fonctions représentées par ces trois courbes ?

2 *f* est une fonction définie et dérivable sur $[-2\,;4]$, dont la dérivée est strictement négative, sauf en 1 où elle s'annule.

Tracer trois allures possibles pour la courbe de *f*.

Quel est le point commun entre les fonctions représentées par ces trois courbes ?

3 *f* est la fonction définie sur $[-2\,;4]$ par :

$$f(x) = 1{,}25x^3 - 3x^2 - 3x$$

a) Calculer $f'(x)$ et étudier le signe de $f'(x)$.

b) Tracer la courbe de *f* à l'écran de la calculatrice.

c) Reproduire et compléter le tableau ci-contre.

x	-2 4
Signe de $f'(x)$	
Variations de $f(x)$	

Quel lien peut-on conjecturer entre le signe de *f*′ et les variations de *f* ?

Signe de la dérivée et variations

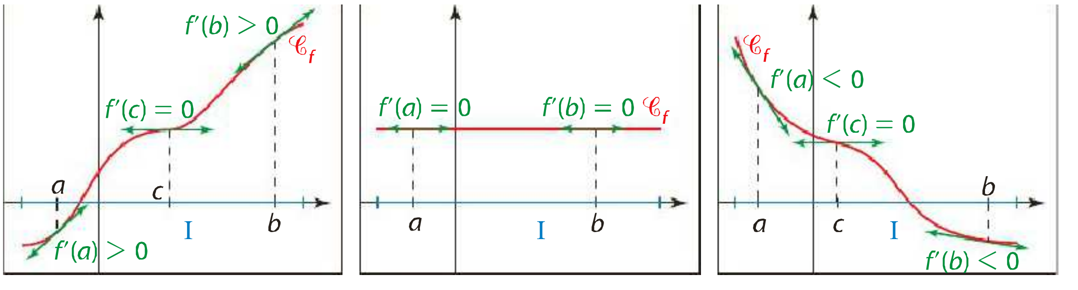
1 Du sens de variation de la fonction au signe de sa dérivée

PROPRIÉTÉS (admises) f est une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si f est **croissante** sur I, alors pour tout nombre réel x de I, $\boldsymbol{f'(x) \geqslant 0}$.
- Si f est **constante** sur I, alors pour tout nombre réel x de I, $\boldsymbol{f'(x) = 0}$.
- Si f est **décroissante** sur I, alors pour tout nombre réel x de I, $\boldsymbol{f'(x) \leqslant 0}$.

ILLUSTRATIONS

f croissante sur I. Pour tout x de I, $f'(x) \geqslant 0$	f constante sur I. Pour tout x de I, $f'(x) = 0$	f décroissante sur I. Pour tout x de I, $f'(x) \leqslant 0$



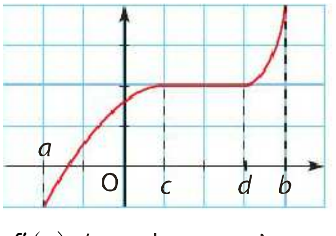
2 Du signe de la dérivée au sens de variation de la fonction

PROPRIÉTÉS (admises) f est une fonction dérivable sur un intervalle I.

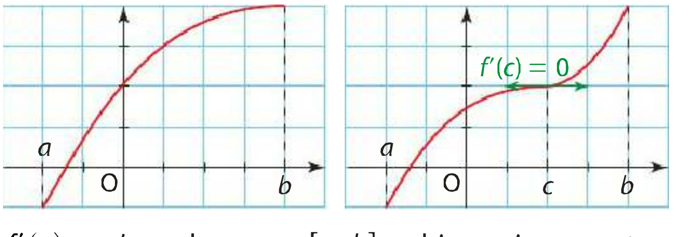
- Si pour tout nombre réel x de I, $\boldsymbol{f'(x) \geqslant 0}$, alors f est **croissante** sur I.
- Si pour tout nombre réel x de I, $\boldsymbol{f'(x) = 0}$, alors f est **constante** sur I.
- Si pour tout nombre réel x de I, $\boldsymbol{f'(x) \leqslant 0}$, alors f est **décroissante** sur I.

ILLUSTRATIONS

Voici des courbes représentant une fonction f dérivable sur un intervalle $[a\,;b]$ telle que $f'(x) \geqslant 0$ sur $[a\,;b]$.



$f'(x)$ s'annule sur un intervalle $[c\,;d]$ contenu dans $[a\,;b]$. On dit que f est **croissante** sur $[a\,;b]$.



$f'(x)$ ne s'annule pas sur $[a\,;b]$ ou bien uniquement en quelques points de $[a\,;b]$.
On dit que f est **strictement croissante** sur $[a\,;b]$.

EXEMPLE

f est la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x^3 - 7$.
Pour tout nombre réel x, $f'(x) = 6x^2$. Donc, pour tout $x \neq 0$, $f'(x) > 0$ et $f'(0) = 0$.
Par conséquent, la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

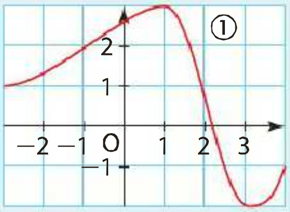
Exercice résolu 1 Déduire du sens de variation d'une fonction le signe de sa dérivée

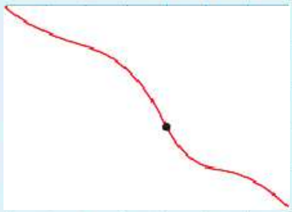
Voir aussi l'exercice 20 page 93

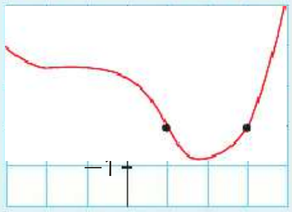
Énoncé

Voici le tableau de variation d'une fonction f définie et dérivable sur $[-3\,;4]$.
L'une des courbes ci-dessous est celle de la dérivée f' de la fonction f. Laquelle ?

x	-3		1		3		4
$f(x)$	1	↗	3	↘	-2	↗	-1







Solution

- f est croissante sur $[-3\,;1]$, donc $f'(x) \geqslant 0$ sur $[-3\,;1]$; la courbe représentative de la fonction f' doit être située au-dessus de l'axe des abscisses sur $[-3\,;1]$: c'est le cas des courbes 1, 2, 3.
- f est décroissante sur $[1\,;3]$ donc $f'(x) \leqslant 0$ sur $[1\,;3]$; la courbe représentative de la fonction f' doit être située au-dessous de l'axe des abscisses sur $[1\,;3]$: on élimine la courbe 1.
- f est croissante sur $[3\,;4]$ donc $f'(x) \geqslant 0$ sur $[3\,;4]$; la courbe représentative de la fonction f' doit être située au-dessus de l'axe des abscisses sur $[3\,;4]$: on élimine la courbe 2.

La seule courbe vérifiant ces conditions est la courbe 3.

Commentaire

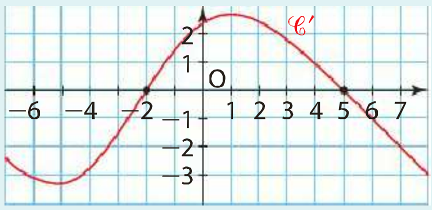
Attention, c'est le signe de f', c'est-à-dire la position des courbes rouges par rapport à l'axe des abscisses qui est utile ici et non pas les variations de f'.

Exercice résolu 2 Déduire du signe de la dérivée le sens de variation d'une fonction

Voir aussi l'exercice 21 page 93

Énoncé

Voici la courbe $\mathscr{C}'$ représentant la fonction dérivée f' d'une fonction f définie sur $[-7\,;8]$.
Donner le sens de variation de la fonction f.



Solution

- La courbe $\mathscr{C}'$ est au-dessous de l'axe des abscisses sur $[-7\,;-2]$ et sur $[5\,;8]$, donc $f'(x) \leqslant 0$ sur $[-7\,;-2]$ et sur $[5\,;8]$.
Donc la fonction f est décroissante sur $[-7\,;-2]$ et sur $[5\,;8]$.
- La courbe $\mathscr{C}'$ est au-dessus de l'axe des abscisses sur $[-2\,;5]$, donc $f'(x) \geqslant 0$ sur $[-2\,;5]$.
Donc f est croissante sur $[-2\,;5]$.

Commentaire

On peut dresser le tableau de variation de f mais on ne connaît pas les images de -7 ; -2 ; 5 et 8.

x	-7		-2		5		8
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↘		↗		↘	

Tableau de variation d'une fonction et extremum

1 Comment dresser un tableau de variation ?

EXEMPLE

f est la fonction définie sur $[-1\,;3]$ par $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 1$.

Pour étudier les variations d'une fonction donnée par son expression, on procède ainsi.

1. On calcule $f'(x)$.

Pour tout x dans $[-1\,;3]$:

$$f'(x) = x^3 - 2x^2 + x$$

2. On étudie le signe de $f'(x)$.

Pour tout x dans $[-1\,;3]$:

$$f'(x) = x(x^2 - 2x + 1) = x(x-1)^2$$

Or $(x-1)^2 \geqslant 0$, donc $f'(x)$ est du signe de x.

Donc $f'(x) \leqslant 0$ si $x \leqslant 0$ et $f'(x) \geqslant 0$ si $x \geqslant 0$.

f' s'annule en 0 et en 1.

3. On dresse le tableau de variation de f.

- Sur la ligne « x », on note l'ensemble de définition de f et les valeurs de x qui annulent f'.
- Sur la ligne « $f'(x)$ », on indique le signe de $f'(x)$.
- Sur la ligne « $f(x)$ », on indique le sens de variation de f et on note les **valeurs exactes** des images des nombres qui figurent sur la première ligne.

x	-1		0		1		3
$f'(x)$			0				
$f(x)$	$\frac{5}{12}$	↘	-1	↗	$-\frac{11}{12}$	↗	$\frac{23}{4}$

2 Extremum et tableau de variation

Dès qu'une fonction f a un tableau de variation tel que ceux ci-dessous sur un intervalle I, on peut dire que f admet un extremum en x_0.

x		x_0	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$f(x_0)$	↗

Sur I, f admet un minimum en x_0.
Ce minimum vaut $f(x_0)$.
Pour tout x de I, $f(x) \geqslant f(x_0)$.

x		x_0	
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	$f(x_0)$	↘

Sur I, f admet un maximum en x_0.
Ce maximum vaut $f(x_0)$.
Pour tout x de I, $f(x) \leqslant f(x_0)$.

EXEMPLE

f est la fonction définie sur $[-1\,;3]$ par $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 1$.

Sur le tableau de variation de la fonction f du paragraphe **1**, on lit que sur $[-1\,;3]$, f admet un minimum en 0.
Ce minimum vaut -1.
Donc, pour tout x de $[-1\,;3]$, $f(x) \geqslant -1$.

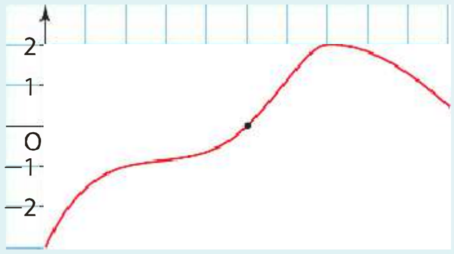
Les méthodes

Exercice résolu 1 Exploiter des variations pour obtenir une inégalité

Voir aussi l'exercice 29 page 94

Énoncé

Voici la courbe $\mathscr{C}'$ représentant la fonction dérivée f' d'une fonction f définie et dérivable sur $[0\,;10]$.



a) Comparer les nombres $f(2)$ et $f(4)$.

b) La fonction f admet-elle un extremum sur $[0\,;10]$?

Solution

a) Pour tout x de $[0\,;5]$, la courbe $\mathscr{C}'$ est située en dessous de l'axe des abscisses, donc $f'(x) \leqslant 0$.
Donc f est décroissante sur $[0\,;5]$.
Or $2 \leqslant 4$, donc $f(2) \geqslant f(4)$.

b) Pour tout x de $[0\,;5]$, $f'(x) \leqslant 0$; pour tout x de $[5\,;10]$, $f'(x) \geqslant 0$ et $f'(5) = 0$.
Donc f' s'annule en changeant de signe en $x = 5$.
La fonction f admet un extremum (ici un minimum) en $x = 5$, égal à $f(5)$.

MÉTHODE

Pour montrer qu'une fonction f admet un extremum en x_0, on peut montrer que :
- $f'(x_0) = 0$;
- $f'(x)$ change de signe autour de x_0.

Exercice résolu 2 Étudier les variations d'une fonction rationnelle

Voir aussi l'exercice 33 page 94

Énoncé

Une entreprise produit des microprocesseurs.
La fonction B définie sur $[0\,;19]$ par $\mathrm{B}(x) = \dfrac{-x^2+12x-3}{x+1}$ désigne le bénéfice, en **milliers** d'euros, obtenu en vendant x **centaines** de pièces.

a) Étudier les variations de la fonction B et dresser son tableau de variation.

b) Quelle quantité de microprocesseurs doit-elle vendre pour réaliser un bénéfice maximal ? Que vaut alors ce bénéfice maximal ?

Solution

a) • Pour tout x de $[0\,;19]$, $\mathrm{B}(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec :

$u(x) = -x^2+12x-3$, et $v(x) = x+1$

donc $u'(x) = -2x+12$ et $v'(x) = 1$.

$$\mathrm{B}'(x) = \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)} = \frac{(-2x+12)(x+1)-(-x^2+12x-3)\times 1}{(x+1)^2}$$

$$\mathrm{B}'(x) = \frac{-x^2-2x+15}{(x+1)^2}$$

• Pour tout x de $[0\,;19]$, $(x+1)^2 > 0$, donc $\mathrm{B}'(x)$ est du signe de $-x^2-2x+15$.
Pour déterminer le signe de cette expression, on calcule le discriminant $\Delta = 64$.
Donc l'équation $-x^2-2x+15 = 0$ admet deux solutions : $x_1 = -5$ et $x_2 = 3$.
D'où le tableau de variation de B ci-contre :

x	0		3		19
$\mathrm{B}'(x)$		+	0	–	
$\mathrm{B}(x)$	–3	↗	6	↘	–6,8

b) La fonction B admet donc pour maximum 6 lorsque $x = 3$. Cela signifie que l'entreprise doit vendre 300 pièces pour obtenir un bénéfice maximal de 6 000 €.

Note

On fait d'abord le tableau de signes de $-x^2-2x+15$ sur $\mathbb{R}$:

$-\infty$		-5		3		$+\infty$
	–	0	+	0	–	

puis on ne conserve que la partie sur $[0\,;19]$.

C Apprendre à rédiger correctement

f est la fonction définie sur $[-5\,;10]$ par :

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 72x$$

On demande de dresser le tableau de variation de la fonction f.

Voici la copie corrigée d'un élève.

$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 72x$, donc $f'(x) = 6x^2 - 6x - 72$

J'en déduis le tableau de variation :

x	-5		-3		4		10
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗		↘		↗	

signes à justifier

à compléter par les images

7 Rédiger une solution correcte à l'exercice de la fiche en tenant compte des remarques du professeur.

8 Dresser le tableau de variation de la fonction f définie sur $[0\,;9]$ par :

$$f(x) = 2\sqrt{x} + 3x + 1$$

9 Dina a dressé le tableau de variation de la fonction f définie sur $\left[-\frac{1}{2}\,;\,1\right]$ par :

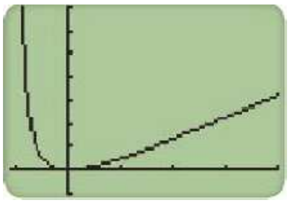
$$f(x) = \frac{x^2}{x+1}$$

Afin de vérifier ses calculs, elle a saisi cette fonction sur l'écran de sa calculatrice.

Estelle lui fait remarquer qu'il y a des incohérences.

Lesquelles ? Proposer un tableau de variation correct.

x	$-\frac{1}{2}$		0		1
$f'(x)$			‖	$-$	
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	↗		↘	$\frac{1}{2}$



Conseils

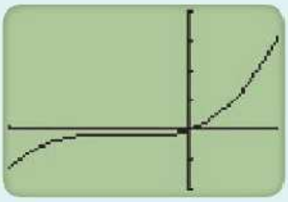
Tracer la courbe sur l'écran de la calculatrice permet de vérifier certains résultats, mais pas de les justifier.

D Utiliser correctement la calculatrice

Lors d'une discussion en classe, le professeur a demandé de conjecturer le tableau de variation de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 32x^3 + 36x^2 + 12x$$

Alice a saisi la fonction f sur sa calculatrice et a obtenu l'écran ci-contre.



Elle conjecture alors que la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.

Le professeur donne deux conseils à Alice :

1. « Représenter la fonction f avec la fenêtre graphique :

$$-1 \leqslant X \leqslant 1 \quad \text{et} \quad -2 \leqslant Y \leqslant 4 \text{ ».}$$

2. « Saisir :

$$Y_1 = \mathrm{d}/\mathrm{d}x(32x^3 + 36x^2 + 12x)$$

et tracer cette courbe ».

10 **a)** Suivre le conseil **1** donné ci-dessus.
Émettre une conjecture sur le sens de variation de f.
b) Suivre le conseil **2** donné ci-dessus.
Expliquer l'erreur d'Alice et émettre une conjecture sur le sens de variation de f.
c) Étudier le sens de variation de f par le calcul.

Conseils

Il ne faut pas toujours se fier à l'affichage de la calculatrice, un réglage de la fenêtre ou l'utilisation des fonctionnalités (G-Solv, CALC…) permettent d'éviter de donner de fausses conclusions.

Vérifier les réponses p. 266

Accompagnement personnalisé

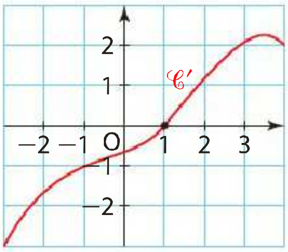
Pour comprendre

A Lire graphiquement le signe de $f'(x)$

Lorsque l'énoncé donne la courbe $\mathscr{C}'$ représentant f', on lit que :

- $f'(x) \leqslant 0$ lorsque la courbe $\mathscr{C}'$ est au-dessous de l'axe des abscisses ;
- $f'(x) \geqslant 0$ lorsque la courbe $\mathscr{C}'$ est au-dessus de l'axe des abscisses ;
- $f'(x) = 0$ lorsque la courbe $\mathscr{C}'$ coupe l'axe des abscisses.

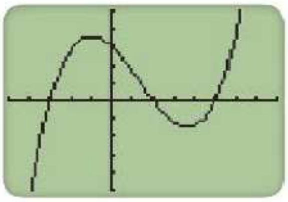
Exemple



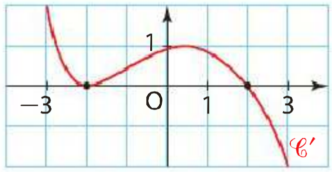
x	
Signe de $f'(x)$	

1 Reproduire et compléter le tableau de l'exemple de la fiche ci-dessus.

2 Sur l'écran de sa calculatrice, Martin a représenté la dérivée f' d'une fonction f définie sur $[-4\,;6]$.
Lire le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x.



3 Lire ci-contre le signe de $f'(x)$ sur $[-3\,;3]$.



Conseils
Ne pas confondre le signe de $f'(x)$ avec les variations de la fonction f'.

B Étudier le signe de $f'(x)$ à partir de son expression

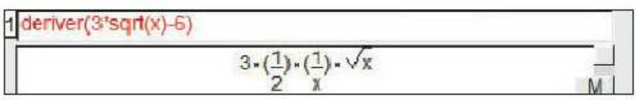
Différents cas	Exemples
1. Le signe est immédiat.	$f'(x) = x^2 + 1$ sur $\mathbb{R}$
2. L'ensemble de définition permet de conclure.	$g'(x) = x^2 - x + 5$ sur $]-\infty\,;0]$
3. Le signe peut-être étudié à l'aide d'un outil connu (signe d'un produit, d'un quotient, discriminant…).	$h'(x) = 2x^2 - 3x + 1$ sur $\mathbb{R}$
4. Le signe de la dérivée se ramène à l'étude du signe d'une expression simple.	$k'(x) = \dfrac{2x-5}{(x+1)^2}$ sur $]-1\,;+\infty[$
5. Il faut poursuivre la transformation de l'écriture de la dérivée, puis utiliser l'un des cas précédents.	$\ell'(x) = x - \dfrac{4}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$

4 Étudier les signes des dérivées des exemples de la fiche ci-dessus.

5 f est la fonction définie et dérivable sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = 3\sqrt{x} - 6$$

Amel a obtenu l'expression de la dérivée f' en utilisant un logiciel de calcul formel.



Déterminer le signe de $f'(x)$ en fonction de x.

6 Étudier le signe de la dérivée de chacune des fonctions définies par :

a) $f(x) = x^3 + 6x^2 - 15x + 3$ sur $\mathbb{R}$;

b) $g(x) = \dfrac{x-2}{x-1}$ sur $]1\,;+\infty[$;

c) $h(x) = \dfrac{x^2 + x - 1}{x+1}$ sur $]-1\,;+\infty[$;

d) $k(x) = x^2 - \dfrac{1}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$.

Conseils
Connaître différentes méthodes pour étudier un signe permet de simplifier les raisonnements et d'éviter des erreurs.

Exercices de base

Pour créer des automatismes

Signe de la dérivée et variations

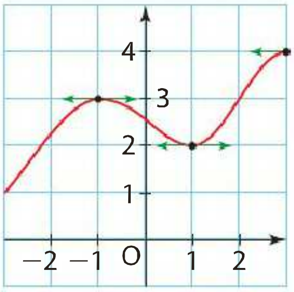
11 Voici le tableau de variation d'une fonction f dérivable sur $[-10\,;5]$. Dresser le tableau de signes de $f'(x)$ suivant les valeurs de x.

x	-10		1		3		5
$f(x)$	1	↘	-3	↗	5	↘	4

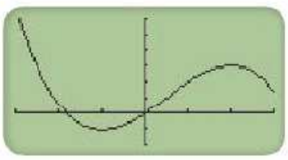
12 f est une fonction dérivable sur $[-2\,;8]$ dont le tableau de variation est donné ci-dessous.
Déterminer le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x.

x	-2		$0{,}5$		7		8
$f(x)$	10	↘	1	↗	2	↘	-8

13 Voici, dans un repère, la courbe représentative d'une fonction f définie et dérivable sur $[-3\,;3]$.
Dresser le tableau de signes de $f'(x)$ suivant les valeurs de x.



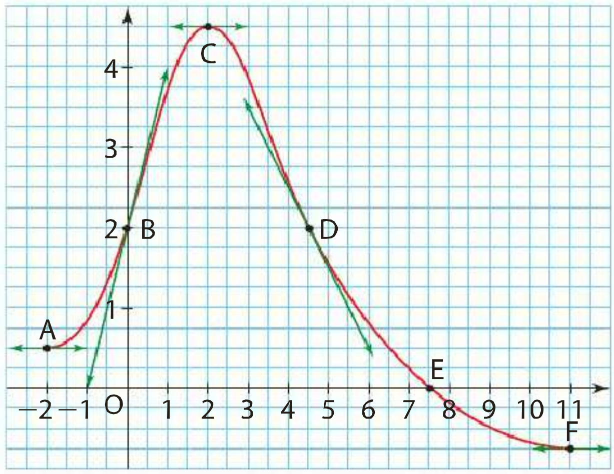
14 Une fonction f définie et dérivable sur $[-3\,;3]$ est représentée sur l'écran de calculatrice ci-dessous.



a) Conjecturer les nombres entiers solutions de l'équation $f'(x) = 0$.
b) Déterminer le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x.

15 f est une fonction définie et dérivable sur $[-10\,;10]$. f est croissante sur les intervalles $[-10\,;2]$ et $[3\,;10]$, et décroissante sur l'intervalle $[2\,;3]$.
a) Déterminer le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x.
b) Dans un repère, tracer une allure possible de la courbe représentative de f.

16 objectif Bac Voici la courbe représentative d'une fonction f dérivable sur $[-2\,;11]$.



Parmi les réponses proposées, une seule est exacte.
a) $f'(0)$ est égal à :
① $\frac{1}{2}$ ② 2 ③ 4
b) $f'(x)$ est positif sur l'intervalle :
① $]0\,;11[$ ② $]0\,;7{,}5[$ ③ $]-2\,;2[$
c) L'équation $f'(x) = 0$ admet :
① 1 solution ② 2 solutions ③ 3 solutions

17 Recopier et compléter le tableau suivant sachant que $f(0) = 5$, $f(-2) = 12$ et que la courbe représentative de la fonction f, dans un repère, admet une tangente horizontale au point d'abscisse -2 et au point d'abscisse 0.

x	-3		…		0		1
$f'(x)$		$+$	…	…	…	…	
$f(x)$	4		…	↘	…	↗	7

Pour les exercices 18 et 19, donner le sens de variation de f et tracer, dans un repère, une courbe pouvant représenter f.

18

x	-3		0		1		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

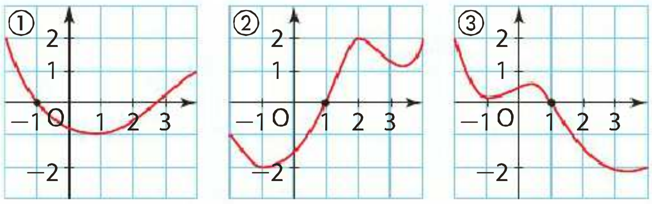
19

x	0		1		3		5
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

20 f est une fonction définie et dérivable sur $[-2\,;4]$ dont le tableau de variation est le suivant :

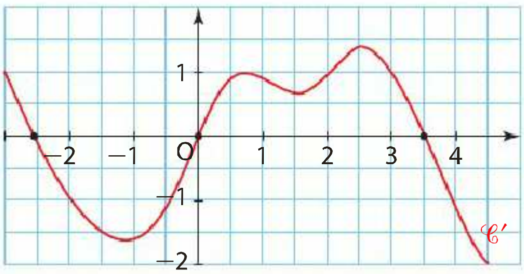
x	-2		1		4
$f(x)$	2	↘	-1	↗	1

L'une des courbes ci-dessous représente la fonction dérivée f' de f. Laquelle ?



Conseil : *se reporter à l'exercice résolu 1, page 87.*

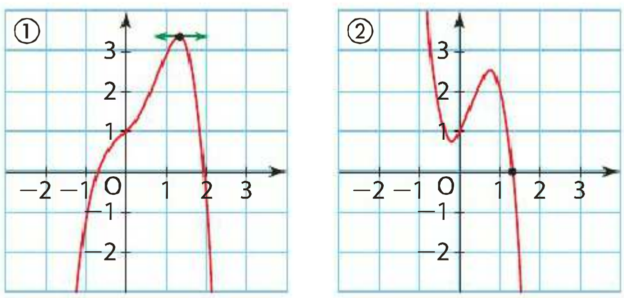
21 On donne ci-dessous la courbe $\mathscr{C}'$ représentant la dérivée f' d'une fonction f sur l'intervalle $[-3\,;4{,}5]$.



a) Déterminer le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x.
b) En déduire le sens de variation de la fonction f.

Conseil : *se reporter à l'exercice résolu 2, page 87.*

22 On a tracé ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f ainsi que celle de sa fonction dérivée f'. Associer les fonctions f et f' à leurs courbes représentatives.



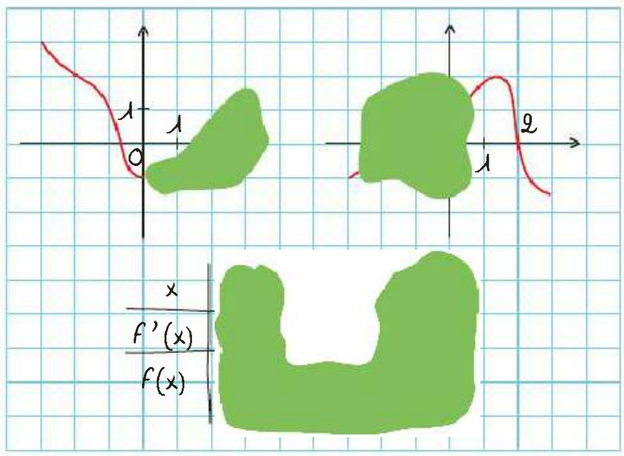
23 **a)** f est une fonction définie et dérivable sur $[0\,;10]$ telle que $f'(x) \geqslant 0$ sur $[0\,;10]$.
Peut-on affirmer que $f(0) \leqslant f(10)$?
b) g est une fonction définie et dérivable sur $[2\,;5]$ telle que $g(2) \leqslant g(5)$.
Peut-on affirmer que $g'(x) \geqslant 0$ sur $[2\,;5]$?

24 On donne le tableau de signes de la dérivée d'une fonction f définie sur $[-3\,;4]$.

x	-3		0		2		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

a) Donner le sens de variation de f.
b) L'une des trois affirmations suivantes est correcte. Préciser laquelle.
① $f(-3)=1$ $f(0)=-2$ $f(2)=-3$ $f(4)=7$
② $f(-3)=1$ $f(0)=2$ $f'(1)=1$ $f(4)=7$
③ $f(-3)=1$ $f(0)=2$ $f'(1)=-3$ $f(2)=-5$
c) Dans un repère, tracer une courbe pouvant représenter f.

25 Jeanne s'est amusée à peindre sur une page du cahier d'exercices de Claudy. Elle contenait les courbes d'une fonction f définie sur $[-3\,;3]$ et de sa dérivée f'. Retrouver les données manquantes et donner une allure possible des parties effacées des deux courbes.



26 $[0\,;10]$.

x	0		2		5		10
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	

x	0		2		5		10
$f(x)$		↘		↘		↗	

Critiquer le tableau de variation ci-dessus.

27 f est une fonction dont le tableau de variation est donné ci-dessous :

x	-5		1		4
$f(x)$	-10	↗	-4	↘	-5

a) Déterminer le signe de $f(3)$, $f'(3)$, $f(0)$, $f'(0)$.
b) Déterminer le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.
c) Déterminer le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x.

Tableau de variation d'une fonction et extremum

28 f est la fonction définie sur $[-5\,;4]$ par :

$$f(x) = 6x^3 + 4{,}5x^2 - 90x + 9$$

a) Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de la fonction f.
b) Vérifier la cohérence des résultats avec la courbe de f tracée à l'écran de la calculatrice.

29 f est la fonction définie sur $[3\,;10]$ par :

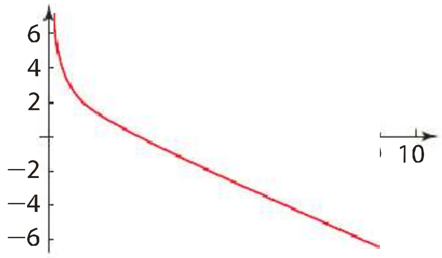
$$f(x) = \frac{-x^2}{x-2}$$

a) Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de la fonction f.
b) Comparer les nombres $f(3)$ et $f(3{,}5)$, puis $f(4{,}5)$ et $f(8)$.
c) La fonction f admet-elle un extremum sur $[3\,;10]$?

➤ *Conseil : se reporter à l'exercice résolu 1, page 89.*

30 Voici la courbe représentative de la fonction f définie sur $]0\,;9]$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x} - x + 2$$

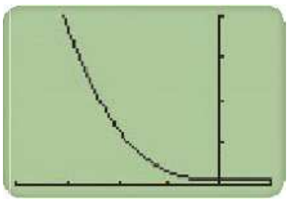


a) Conjecturer les variations de f sur $]0\,;9]$
b) Démontrer par le calcul la conjecture du **a)**.

31 f est la fonction définie sur $[-3\,;1]$ par :

$$f(x) = -x^3 + x^2 + 1$$

Rémi affiche la courbe représentative de f à l'écran de sa calculatrice.



Il affirme que cette fonction est décroissante sur l'intervalle $[-3\,;1]$. Est-ce vrai ?

32 f est la fonction définie sur $[-1\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 - x + 1$$

a) Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de la fonction f.
b) Vérifier la cohérence de vos résultats avec la courbe de f obtenue à l'écran de la calculatrice.

33 Dans une entreprise familiale, le coût total C, en milliers d'euros, pour x centaines de pièces produites, est donné par :

$$C(x) = 0{,}01x^3 - 0{,}09x^2 - 0{,}48x + 5$$

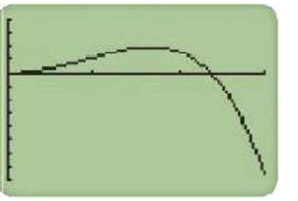
pour x compris entre 0 et 10.
a) Déterminer les coût fixes.
b) Déterminer le nombre de pièces que l'entreprise doit produire pour obtenir un coût minimal. Préciser ce coût minimal.

➤ *nseil : se reporter à l'exercice résolu 2, page 89.*

34 f est la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = -0{,}25x^4 + 1{,}4x^2$$

Marion affiche la courbe représentative de f à l'écran de sa calculatrice.
Elle affirme que le maximum de cette fonction est 2.
Est-ce vrai ?



Algorithmique

35 Lily a créé l'algorithme suivant avec AlgoBox :

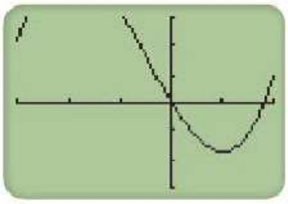
```
VARIABLES
  x EST_DU_TYPE NOMBRE
  p EST_DU_TYPE NOMBRE
  q EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE x
  q PREND_LA_VALEUR 0.5*x
  p PREND_LA_VALEUR q+3
  p PREND_LA_VALEUR pow(p,2)
  p PREND_LA_VALEUR q*p
  AFFICHER p
FIN_ALGORITHME
```

a) Que calcule cet algorithme ?
b) Lily affirme que le résultat affiché sera toujours supérieur à -4.
Est-ce vrai ?

36 Alix a tracé à l'écran de sa calculatrice la courbe représentative de la fonction f définie sur $[-3\,;2]$ par :

$$f(x) = 0{,}5x^3 + 0{,}75x^2 - 3x$$

À l'aide d'un calcul, indiquer comment Alix doit régler la fenêtre graphique pour visualiser toute la courbe.



37 **Pour rédiger**

Lire ci-dessous l'énoncé, puis la solution d'un élève. Rédiger cette solution en tenant compte des remarques du professeur.

Énoncé

Dans une entreprise spécialisée dans la construction de tablettes tactiles, le coût moyen, en milliers d'euros, de q centaines de tablettes est donnée par la fonction C_M définie sur $[1\,;10]$ par :

$$C_M(q) = q - 1 + \frac{16}{q}$$

Déterminer le coût moyen minimal.

Copie d'un élève

$C_M'(q) = 1 - \frac{16}{q^2} = \frac{q^2 - 16}{q^2}$

J'obtiens le tableau de variation de C_M :

q	1		4		10
$C_M'(q)$		$-$	0	$+$	
$C_M(q)$	16	$\searrow$	7	$\nearrow$	10,6

À justifier

Donc le coût est minimal quand l'entreprise fabrique 4 tablettes.

Attention aux unités !
Ce n'est pas la réponse attendue.

38 f et g sont les fonctions définies et dérivables sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = 3\sqrt{x} + 0{,}5 \quad \text{et} \quad g(x) = (f(x))^2$$

a) Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de la fonction f.

b) Afficher les courbes représentatives des fonctions f et g à la calculatrice, puis estimer l'abscisse de leur point d'intersection en utilisant par exemple la fonction INTERSECT.

c) Retrouver cette abscisse par le calcul.

39 B2i L3-4 f est la fonction définie sur $[-3\,;2]$ par :

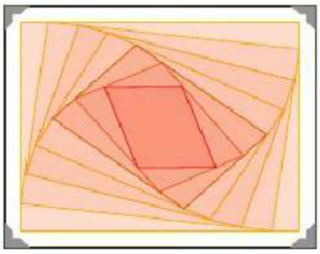
$$f(x) = x^3 + 3x^2 + cx + 2$$

où c désigne un nombre réel.

a) Dresser le tableau de variation de f pour $c = -9$.

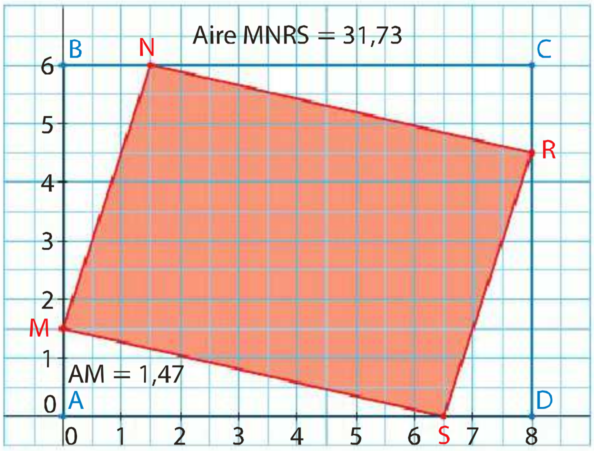
b) Pour quelles valeurs de c, f est-elle strictement croissante ? On pourra, pour se donner une idée, tracer à l'aide de la calculatrice ou de GeoGebra la courbe de la fonction f pour différentes valeurs de c.

40 Un artiste souhaite créer un tableau composé de parallélogrammes emboîtés dépendants l'un de l'autre.



1. Pour cela, il construit un rectangle ABCD de largeur 6 et de longueur 8 où il inscrit un premier parallélogramme MNRS tel que AM = BN = CR = DS.

À l'aide de la fonction COMPAS, réaliser cette figure sur GeoGebra.



Quelle semble être l'aire minimale du parallélogramme MNRS lorsque l'on fait varier le point M ?

2. On pose AM $= x$.

a) Exprimer l'aire $\mathscr{A}(x)$ du parallélogramme MNRS en fonction de x.

b) Calculer $\mathscr{A}'(x)$ et dresser le tableau de variation de la fonction $\mathscr{A}$.

c) En déduire l'aire minimale du parallélogramme MNRS.

3. **Pour aller plus loin**

Pour réaliser cette œuvre, il suffit de réitérer la construction du parallélogramme précédemment construit.

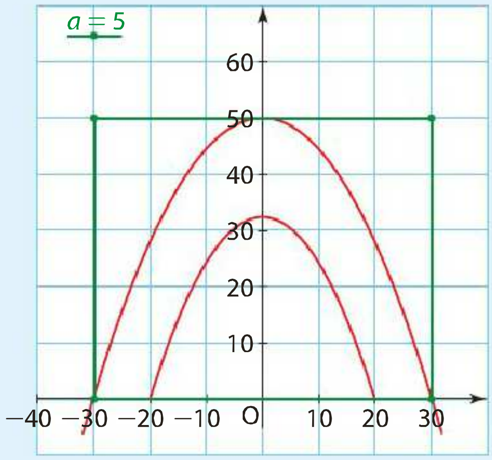
a) Construire ainsi cinq autres parallélogrammes.

b) L'artiste trouve que l'œuvre est parfaite lorsque le quotient de l'aire de son premier parallélogramme par l'aire minimale de celui-ci vaut le nombre d'or $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Placer le point M pour qu'il en soit ainsi et réaliser son œuvre.

Pour préserver l'esthétique du lieu, la parabole extérieure doit être tracée de telle sorte que la surface du rectangle l'encadrant soit maximale.

1. Réalisation de la figure et conjecture



À l'aide d'un logiciel de type GeoGebra :

a) créer le curseur a, puis tracer les courbes représentatives de f et g ;

b) délimiter le rectangle vert ;

c) conjecturer la valeur de a pour laquelle l'aire du rectangle est maximale.

2. Démonstration

a) Exprimer les dimensions du rectangle en fonction de a et démontrer que l'aire de celui-ci est :

$$-3{,}456a^2 + 69{,}12a + 2\,764{,}8$$

b) On note donc $\mathscr{A}$ la fonction définie sur $[\,0\,;15\,]$ par :

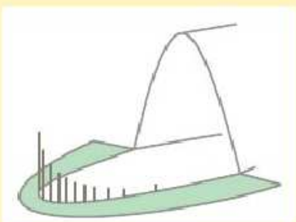
$$\mathscr{A}(x) = -3{,}456x^2 + 69{,}12x + 2\,764{,}8.$$

Étudier les variations de la fonction $\mathscr{A}$ et répondre au problème posé.

Info

Le hangar à dirigeables d'Écausseville est le dernier de France. Dans le cadre de réalisations d'installations artistiques, l'artiste Francis Delacour a pour projet de symboliser un rapport « profane/sacré » par un rapport « Terre/Ciel ».

Pour cela, il décide de projeter la parabole directrice du hangar (Ciel) sur le sol (Terre) et d'y répartir des éléments verticaux de différentes hauteurs.



44 Toujours le même ?

OBJECTIF Démontrer le résultat d'un algorithme.

Voici ci-dessous un programme écrit à l'aide du logiciel AlgoBox.

```
VARIABLES
  x EST_DU_TYPE NOMBRE
  p EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE x
  p PREND_LA_VALEUR x-5
  p PREND_LA_VALEUR pow(p,2)
  p PREND_LA_VALEUR p*x
  p PREND_LA_VALEUR p*0.054
  p PREND_LA_VALEUR floor(p)
  AFFICHER p
FIN_ALGORITHME
```

La fonction **floor** permet d'obtenir la partie entière d'un nombre. Par exemple, floor(1,45) = 1.

1. a) Tester l'algorithme à la main pour un réel compris entre 1 et 6.

b) Entrer ce programme sur ordinateur ou sur votre calculatrice, puis le tester pour plusieurs réels compris entre 1 et 6.

c) Quelle conjecture peut-on émettre ?

2. f est la fonction définie sur $[\,1\,;6\,]$ par :

$$f(x) = 0{,}054\,x(x-5)^2$$

a) Montrer que la fonction f admet un minimum et un maximum sur $[\,1\,;6\,]$. Quels sont-ils ?

b) La conjecture émise au **1. c)** est-elle correcte ? Justifier.

45 Bactéries

OBJECTIF Modéliser une situation concrète afin de résoudre un problème.

Un laboratoire a mis au point un procédé permettant de régler l'évolution d'une population de bactéries en modifiant la température du lieu.

Cette évolution est modélisée par la fonction f définie sur $]0\,;24]$ par :

$$f(t) = k\sqrt{t} + t^3,$$

où k est une constante réelle liée à la température du lieu et t le temps écoulé en heures.

a) Les chercheurs souhaitent que l'évolution se fasse de telle sorte que $f'(1) = 303$.

Déterminer k pour qu'il en soit ainsi.

b) La population de bactéries va-t-elle diminuer au bout d'un certain temps ?

Travaux pratiques

Pour expérimenter et modéliser

41 B2i L3-5 Décoration d'un musée

OBJECTIF Modéliser pour répondre à des contraintes d'esthétique.

Le musée du Louvre-Lens ouvrira ses portes en 2012. Un artiste-décorateur propose de disposer dans le hall d'entrée des panneaux d'affichage à forme ondulée. Il modélise cette ondulation en utilisant les courbes des fonctions f et g définies par :

$f(x) = 0{,}5x + 5 + \dfrac{6}{x}$ pour x compris entre -7 et -2

et $g(x) = 0{,}25x^2$ pour x compris entre -2 et 2,5.

1. Utiliser un logiciel grapheur ou la calculatrice pour afficher les courbes représentatives de f et g.

2. Par souci d'esthétique, l'artiste a souhaité que la liaison entre ces deux courbes soit parfaite.
Vérifier que ces courbes se rencontrent et ont la même tangente au point d'abscisse -2.

3. La structure est maintenue par deux poteaux de même hauteur. Elle est attachée au sommet du poteau droit. Par souci d'espace, la hauteur de l'ondulation ne doit pas dépasser la hauteur commune aux deux poteaux.

a) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

b) Vérifier que la contrainte d'ondulation est respectée.

42 Les fonctions de coût

OBJECTIF Conjecturer et vérifier un résultat graphique.

Compte tenu des conditions de production à un moment donné dans une chocolaterie, on modélise les variations des coûts de production (hors coûts fixes) du chocolat de la façon suivante.

Pour une production de x tonnes de chocolat, pour x compris entre 100 et 1 000, on estime que le coût total, en euros, est modélisé par la fonction C définie et dérivable sur $[100\,;1\,000]$ par :

$$C(x) = 0{,}001x^3 - 1{,}5x^2 + 900x$$

1. La fonction coût moyen

On note $C_M(x)$ le coût moyen, en euros, d'une tonne de chocolat pour une production de x tonnes de chocolat.

a) Vérifier que, pour tout x compris entre 100 et 1 000 :

$$C_M(x) = 0{,}001x^2 - 1{,}5x + 900$$

b) Dresser le tableau de variation de la fonction C_M.

c) Grâce au tableau précédent, régler la fenêtre graphique de la calculatrice, puis afficher la courbe représentative de la fonction C_M.

2. La fonction coût marginal

On note $C_m(x)$ le coût marginal, en euros, pour une production de x tonnes de chocolat.
On assimile la fonction coût marginal C_m à la dérivée de la fonction coût total C :

$$C_m(x) = C'(x)$$

pour x compris entre 100 et 1 000.

a) Déterminer $C_m(x)$ pour x compris entre 100 et 1 000.

b) Dresser le tableau de variation de la fonction C_m.

c) Afficher la courbe représentative de la fonction C_m dans la même fenêtre que précédemment.

3. Conjecture et vérification

Conjecturer une égalité en observant l'intersection des courbes précédentes, puis la vérifier.

43 B2i L3-5 Hangar d'Écausseville

OBJECTIF Modéliser une situation concrète afin de résoudre un problème.

À proximité d'un édifice classé monument historique, un sentier pour les promeneurs délimité par deux paraboles doit être réalisé.

- La **première parabole** représente la fonction f définie sur $[-20\,;20]$ par :

$$f(x) = -0{,}08x^2 + 32$$

- La **seconde parabole** représente la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \frac{a-40}{(a+20)^2}x^2 - 1{,}44(a-40)$$

où **a peut varier de 0 à 15.**

Dans les deux cas, x est exprimé en mètres.

Exercices d'entraînement

Pour développer des compétences

Critiquer, argumenter

46 Insuffisant

f est la fonction définie sur $[-4\,;4]$ par :

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 1$$

On souhaite étudier les variations de la fonction *f*.
Voici la copie de Maëlle.

Grâce à la calculatrice je trouve :
$f(-4) = -4{,}33$
$f(0) = 1$
$f(4) = 6{,}33$
Donc f est croissante sur $[-4\,;4]$.

Critiquer son raisonnement et proposer une correction.

47 Des erreurs

Trouver toutes les incohérences de ce tableau.

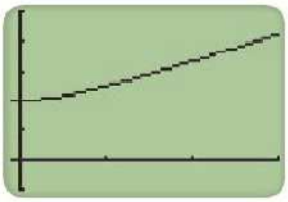
x	-5		-2		-3		4
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	2	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	10

48 Prendre du recul

f est la fonction définie sur $]-1\,;+\infty[$ par :

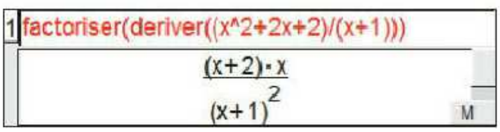
$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$$

Voici la courbe de *f* obtenue par un élève. Il en déduit que *f* est croissante.



a) Afficher la courbe à la calculatrice en élargissant la fenêtre graphique choisie par l'élève.
Qu'observe-t-on ?

b) Étudier les variations de la fonction *f* en vous aidant de l'écran ci-dessous.



Mener des raisonnements

49 La bonne affirmation

Dany affirme : « La somme d'un nombre réel strictement positif et de son inverse est supérieure à 2. »
Christine répond : « Non ! cela dépend du nombre réel choisi … » Qui a raison ?

50 La calculatrice mise en défaut

On souhaite comparer les nombres suivants :

$$1\,234\,567\,891\,011 + \frac{1}{1\,234\,567\,891\,011}$$

$$\text{et}\quad 1\,234\,567\,891\,012 + \frac{1}{1\,234\,567\,891\,012}$$

a) La calculatrice permet-elle de conclure ? Donner une explication au problème rencontré.

b) Les deux nombres en question sont les images par une même fonction, notée *f*. Déterminer l'expression de la fonction *f*.

c) Calculer $f'(x)$ puis déterminer le sens de variation de la fonction *f*.

d) Répondre au problème.

51 Contrôle à la calculatrice

Une entreprise fabrique x tonnes d'acier par mois. Le bénéfice, en euros, réalisé sur la vente de cet acier est donné, pour tout x de $[0\,;60]$ par :

$$B(x) = -x^3 - 10x^2 + 4\,000x - 40\,000$$

a) Calculer la dérivée B ′ et en déduire les variations de B.

b) Combien faut-il fabriquer et vendre de tonnes d'acier pour que le gain soit maximal ? Arrondir à l'unité.

c) Représenter à l'écran de la calculatrice la courbe du bénéfice sur $[0\,;60]$. À l'aide de la fonction G-Solv (Casio) ou CALC (TI) contrôler la réponse du **b)**.

52 Élasticité

La demande $f(x)$ d'un produit proposé à un prix x en euros est donnée par $f(x) = 0{,}1x^2 - 1{,}6x + 6{,}4$ pour x entre 0 et 7.

L'**élasticité de la demande** par rapport au prix x, notée $E(x)$, est le rapport entre le pourcentage d'évolution de la demande du produit et le pourcentage d'évolution du prix de ce produit.

1. Le produit passe de 1 € à 1,1 €. Donner l'élasticité de la demande par rapport au prix de 1 €.

2. Quel sera le signe de l'élasticité de la demande par rapport à tout prix compris entre 0 et 7 ? Expliquer.

3. En Économie, on considère qu'une bonne approximation de $E(x)$ est donnée par $G(x) = x \times \dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

a) Vérifier cette affirmation sur l'exemple précédent.

b) Afficher à la calculatrice la courbe de la fonction G et conjecturer son signe.

c) Calculer $G'(x)$ puis dresser le tableau de variation de la fonction G.

d) En déduire le signe de $G(x)$ suivant les valeurs de x.

Un métier **Chef de produit marketing**

Sa mission est triple : susciter l'envoi en création de nouveaux produits, prévoir la demande et revoir éventuellement la stratégie en fonction des ventes du produit (par réajustement des prix, campagne de publicité).

53 objectif Bac **Vrai-faux**

f est la fonction définie sur $]-2\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = 3 + \frac{1}{x+2}$$

On note f' sa fonction dérivée et $\mathscr{C}$ la représentation graphique de f dans le plan rapporté à un repère.

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Justifier.

a) $f(x) = \dfrac{3x+6}{x+2}$ ☐ Vrai ☐ Faux

b) La courbe $\mathscr{C}$ coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 3,5 ☐ Vrai ☐ Faux

c) $f(x) > 3$ pour tout x de $]-2\,;+\infty[$ ☐ Vrai ☐ Faux

d) $f'(-1) = -1$ ☐ Vrai ☐ Faux

Communiquer à l'écrit, à l'oral

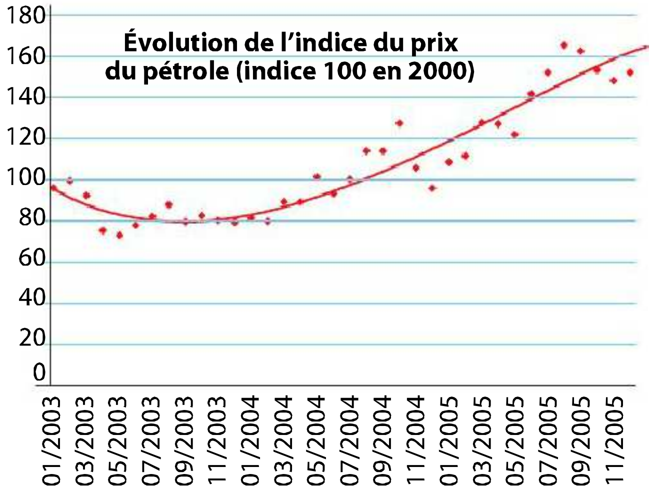
54 B2i L3-5 **Prix du baril de pétrole**

En 2006, des statisticiens souhaitaient donner une prévision de l'indice du prix du pétrole dans les mois à venir. Ils avaient choisi d'ajuster par une fonction les données relevées de janvier 2003 à janvier 2006.

Cette fonction d'ajustement est définie par :

$$f(x) = -0{,}004x^3 + 0{,}33x^2 - 4{,}856\,25x + 98$$

Ainsi, l'indice du prix du pétrole x mois après janvier 2003 était estimé à $f(x)$.



a) Selon cet ajustement, les statisticiens avaient prévu que l'indice du prix du pétrole atteindrait un maximum dans les mois à venir ? Retrouver ce maximum et la date à laquelle il était prévu.

b) Cette prévision a-t-elle été correcte ? (On pourra pour cette question visiter le site de l'Insee : http://www.bdm.insee.fr/bdm2/index.action, puis chercher à « Prix et indices de prix ».)

c) Cet ajustement est-il encore adapté de nos jours ?

55 **En anglais**

An open cardboard box in the shape of a cuboid is made with a square base of side length x cm. The volume of the box fixed at 500 cm^3.

a) Find an expression for the height of the box in terms of x.

b) Show that total area of cardboard used in the box is given by $\mathscr{A}(x)$ where $\mathscr{A}(x) = x^2 + \dfrac{2\,000}{x}$.

c) Find the minimum value of the area.

S'initier à la logique

56 **Négation**

a) Donner la négation de l'expression : « f est croissante sur $[4\,;5]$ ».

b) Donner la négation de l'expression : « Pour tout x de l'intervalle $[-8\,;7]$, $f'(x) \leqslant 0$ ».

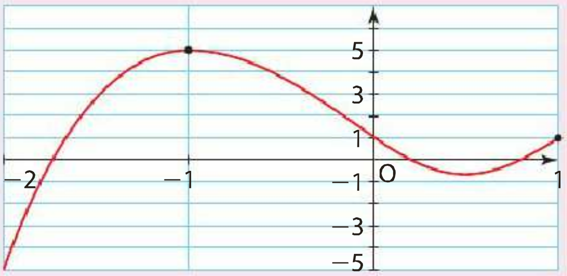
57 **Réciproque**

f est une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I contenant a. On peut démontrer que si f admet un extremum en a, alors $f'(a) = 0$. À l'aide d'un contre-exemple graphique, expliquer pourquoi la réciproque de cette propriété n'est pas vraie.

Se préparer au contrôle

62 **Retrouver par le calcul un résultat graphique**

Voici la courbe représentative d'une fonction f définie sur $[-2\,;1]$.



1. a) Déterminer graphiquement $f(1)$ et $f'(-1)$.

b) Déterminer une valeur approchée du minimum de f sur $[0\,;1]$.

c) Déterminer une valeur approchée du nombre x_0 de $[0\,;1]$ en lequel f atteint son minimum.

2. f est définie par $f(x) = 3x^3 + 2x^2 - 5x + 1$.
Retrouver par le calcul les résultats précédents.

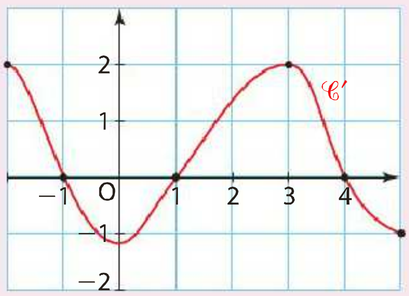
Conseils
2. Voir le cours page 88.

63 **De f' à f**

f est une fonction dérivable sur $[-2\,;5]$.
La courbe $\mathscr{C}$ représentant f dans un repère passe par les points :

$A(-2\,;1), B(-1\,;2), C(1\,;-2), D(3\,;1), E(4\,;3)$.

Voici la courbe $\mathscr{C}'$ représentant sa fonction dérivée f'.



a) Dresser le tableau de variation de f.

b) Préciser $f'(-2)$, $f'(-1)$, $f'(1)$, $f'(3)$, $f'(4)$ et $f'(5)$.

c) Comparer :
- $f(-1{,}5)$ et $f(-1{,}6)$
- $f(0{,}4)$ et $f(0{,}95)$
- $f(2{,}76)$ et $f(3{,}9)$
- $f(4{,}05)$ et $f(4{,}9)$.

d) Tracer une courbe pouvant représenter f.

Conseils
a) Voir l'exercice résolu 2 page 87.

64 **Recherche du bénéfice maximal**

Le bénéfice, en centaines d'euros, réalisé par une société pour un nombre x d'articles vendus est donné par la relation :

$$B(x) = -0{,}04x^2 + 10{,}8x - 104$$

a) Étudier les variations de la fonction bénéfice B sur l'intervalle $[0\,;300]$.

b) En déduire le nombre d'articles correspondant à un bénéfice maximal. Quel est ce bénéfice ?

c) Déterminer pour quelles quantités d'articles la société est bénéficiaire.

Conseils
c) Quel doit être le signe de la fonction bénéfice pour que l'entreprise soit bénéficiaire ?

65 **Coût, recette et bénéfice**

Pour un produit donné, le coût C, en milliers d'euros, en fonction du nombre x de pièces produites, est donné par :

$$C(x) = 0{,}01x^3 - 0{,}135x^2 + 0{,}6x + 15$$

pour x compris entre 0 et 30.
Chaque pièce est vendue 2,7 milliers d'euros.

1. Pour 10 pièces produites et vendues, calculer le coût de fabrication, le prix de vente et le bénéfice réalisé.

2. a) Exprimer, en milliers d'euros, le prix de vente $P(x)$ pour x pièces vendues.

b) Représenter sur la calculatrice les courbes des fonctions C et P.

c) Conjecturer graphiquement la quantité x de pièces à produire et à vendre pour que le bénéfice soit maximal.

3. a) Déterminer l'expression du bénéfice $B(x)$.

b) Étudier les variations de B sur $[0\,;30]$.

c) Quelle production assure un bénéfice maximal ? Quel est ce bénéfice ?

Conseils
2. a) Quel est le prix de vente pour 1, 2, 3 pièces ? et pour x pièces ?
2. c) Comment doit être l'écart entre la recette et le coût ?
3. a) Quelle formule donne le bénéfice en fonction du prix de vente et du coût de fabrication ?

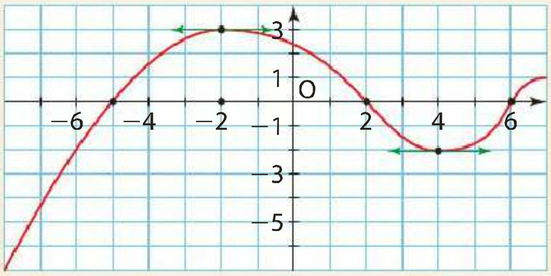
Vérifier les réponses p. 274

AUTO ÉVALUATION
POUR SE TESTER

Travailler en autonomie

QCM

58 Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Laquelle ?
f est une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[-8\,;7]$. Sa courbe représentative est donnée ci-dessous.

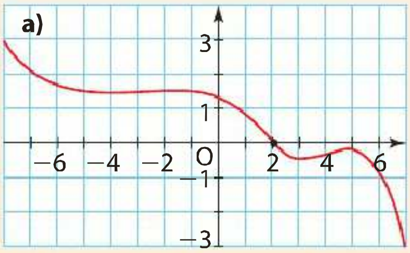


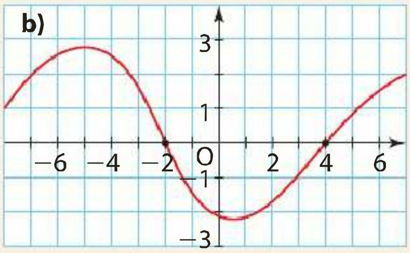
1 $f(x) \leqslant 0$ sur :
a) $[-2\,;4]$ **b)** $[-8\,;-5] \cup [2\,;6]$
c) $[-8\,;-4{,}5] \cup [2\,;6]$

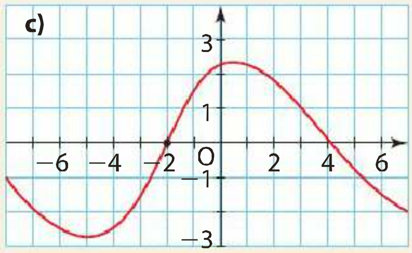
2 $f(-2)$ est égal à :
a) 0 **b)** 3 **c)** -5

3 $f'(-2)$ est égal à :
a) 0 **b)** 3 **c)** -5

4 Une de ces trois courbes est celle de la dérivée f' de la fonction f :







59 Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Laquelle ? Justifier.

1 f est la fonction définie sur $]-\infty\,;0[$ par $f(x) = x^2 - \dfrac{1}{x}$.
a) f est croissante sur $]-\infty\,;0[$
b) Dans un repère, la courbe représentative de la fonction f admet une seule tangente horizontale
c) f' est positive sur $]-\infty\,;0[$.

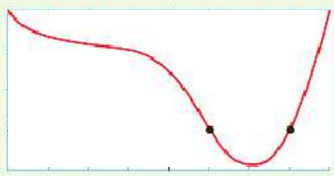
2 f est la fonction définie sur $[-0{,}5\,;3]$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$. Sur $[-0{,}5\,;3]$, le minimum de f est :
a) 2 **b)** $-0{,}5$ **c)** -2

Exercices interactifs

Vrai-Faux

60 Dire pour chaque affirmation si elle est vraie ou fausse.
a) f est une fonction positive sur $[-2\,;3]$.
Alors $f'(x) > 0$ sur $[-2\,;3]$.
b) Une fonction qui n'est pas croissante sur un intervalle I est décroissante sur I.
c) Si f est une fonction vérifiant $f'(-2) = 0$, alors f admet un extremum en -2.
d) La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 3x^2 + \sqrt{3}$ est décroissante sur $[-1\,;0]$.
e) f est une fonction définie et dérivable sur $[0\,;3]$ telle que $f(1) < f(2)$.
Donc, pour tout x de $[0\,;3]$, $f'(x) \geqslant 0$.

61 Dire pour chaque affirmation si elle est vraie ou fausse. Justifier.
On donne $f(-4) = -5$ et $f(3) = -8$. Voici la courbe $\mathscr{C}'$ représentant la dérivée f' d'une fonction f.



a) f est croissante sur $[2\,;4]$.
b) $f'(x) \geqslant 0$ sur $[-4\,;1]$.
c) $f(-2) < f(-1)$.
d) f admet un minimum en 3 sur $[1\,;4]$.

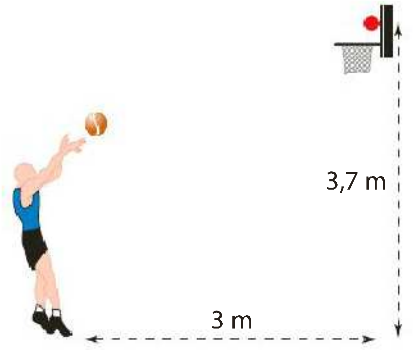
Exercices interactifs

Exercices d'approfondissement

Pour aller plus loin

66 Avec un guide

Un joueur de basket se trouve dans la situation décrite dans le schéma ci-dessous.



Pour mettre le panier, il souhaite atteindre le panneau à l'endroit indiqué. La trajectoire parabolique de sa balle est la courbe représentative de la fonction f définie sur $[0\,;3]$ par $f(x) = -0{,}5x^2 + bx + c$.

a) Le ballon quitte ses mains à une hauteur de 2,20 mètres et la direction au départ de son lancer a pour coefficient directeur 2.

Le joueur va-t-il marquer le panier ?

b) Si oui, quelle doit être la hauteur minimale du plafond de la salle ?

Guide de résolution

a) Traduire l'énoncé en deux équations : l'une utilisant f, l'autre utilisant f'. Puis résoudre le système obtenu.

67 Fabrication du pain

Un boulanger achète pour 5 000 € une machine à pétrir la pâte. Il peut la revendre après t années au prix $p(t)$, exprimé en centaines d'euros, où :

$$p(t) = \frac{50}{0{,}5t + 1}$$

pour $0 \leqslant t \leqslant 8$.

1. a) Au bout de combien d'années la machine aura-t-elle perdu 50 % de sa valeur ?

b) On suppose que le boulanger vend sa machine au bout de t années. La différence entre le prix d'achat et le prix de revente est noté $\text{D}(t)$.

Exprimer $\text{D}(t)$ en fonction de t et étudier les variations de la fonction D. Que dire de la valeur de la machine en fonction du temps ?

2. Le coût total d'entretien, en centaines d'euros, pour une durée de t années est donné par $\text{E}(t) = 0{,}9t^2$.

Que dire du coût d'entretien en fonction du temps ?

3. Le coût total d'utilisation de la machine pour une durée t est donc $\text{C}(t) = \text{D}(t) + \text{E}(t)$.

Quel est le sens de variation de la fonction C ?

4. Le coût moyen d'utilisation de la machine pour une durée de t années est $\text{C}_\text{M}(t) = \dfrac{\text{C}(t)}{t}$ pour $1 \leqslant t \leqslant 8$.

a) Afficher à l'écran de la calculatrice la courbe représentative de la fonction C_M.

b) Conjecturer le coût moyen minimum et le nombre d'années pour y parvenir.

c) Donner les valeurs exactes de ces nombres par le calcul.

68 Travailler en groupe — L'offre et la demande

Partie A

d est la fonction définie sur $[0\,;7]$ par :

$$d(x) = 0{,}1x^3 + 0{,}2x^2 + 2{,}2x - 6{,}4$$

a) Étudier les variations de d.

b) Conjecturer le nombre de solutions de l'équation $d(x) = 0$ dans l'intervalle $[0\,;7]$.

c) À l'aide de la calculatrice, donner une valeur arrondie à 0,01 près de la (ou des) solution(s) du **b)**.

Partie B

f est la fonction définie sur $[0\,;7]$ par :

$$f(x) = 0{,}1x^3 + 0{,}3x^2 + 0{,}6x$$

g est la fonction définie sur $[0\,;7]$ par :

$$g(x) = 0{,}1x^2 - 1{,}6x + 6{,}4$$

Pour un prix de vente unitaire x, $f(x)$ est le nombre, en milliers, d'objets proposés sur le marché et $g(x)$ est le nombre, en milliers, d'objets que les consommateurs sont prêts à acheter.

Les prix sont exprimés en centaines d'euros.

La fonction f est appelée fonction d'offre et la fonction g, fonction de demande.

1. a) Étudier les variations des fonctions f et g.

b) Construire leur courbe représentative dans un repère.

2. a) On appelle prix d'équilibre le prix pour lequel l'offre est égale à la demande. Déterminer une valeur arrondie à l'euro de ce prix grâce à la **partie A**. On note x_0 cette valeur.

b) Quel est alors le nombre d'objets proposés ? On note y_0 ce nombre.

c) La rente R du producteur peut être approchée par l'aire du triangle de sommets $\text{A}(0\,;0)$, $\text{B}(x_0\,;y_0)$ et $\text{C}(0\,;y_0)$. Calculer une approximation arrondie à la centaine d'euros de R. Représenter cette valeur sur le graphique.

69 **Fonction dont on connaît la dérivée**

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 + 3x - 6$.

1. Étudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

2. F est une fonction dont la dérivée est la fonction *f*.

a) Déterminer le sens de variation de F.

b) Trouver une expression possible de la fonction F.

c) Vérifier à l'aide de la calculatrice que la fonction F possède les variations trouvées à la question **2. a)**.

d) Représenter trois allures possibles de la courbe de F. Comment passe-t-on d'une courbe à une autre ?

70 **Proie et prédateur**

Partie A : l'attaque

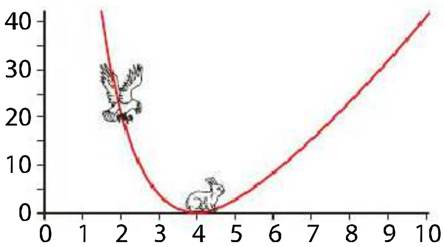
Un aigle plane au-dessus du sol à la recherche d'une proie. Soudain, il aperçoit un lapin et fond sur lui.

La trajectoire de l'aigle est modélisée par la fonction *f* définie sur [1 ; 10] par :

$$f(x) = \frac{100}{9}\left(x - 8 + \frac{16}{x}\right)$$

où x et $f(x)$ sont exprimés en mètres.

1. À quelle hauteur planait l'aigle juste avant d'apercevoir le lapin ?



2. a) Déterminer deux conditions pour que l'aigle attrappe sa proie :

- l'une sur $f(x)$;
- l'autre sur $f'(x)$.

b) L'aigle a-t-il attrappé sa proie ?

Partie B : l'abandon

L'aigle est jeune et le lapin pèse lourd. Le prédateur manque de forces et doit modifier sa trajectoire.

Son vol est alors modélisé par la fonction *g* définie sur [10 ; 50] par :

$$g(x) = -\frac{7}{30}(x - 30)^2 + \frac{4\,000}{30}$$

1. a) Saisir les représentations graphiques de *f* et *g* sur la calculatrice.

b) Déterminer deux conditions :

- l'une sur $f(x)$ et $g(x)$;
- l'autre sur $f'(x)$ et $g'(x)$,

pour que les deux trajectoires de l'aigle se rejoignent parfaitement.

c) Vérifier ces conditions.

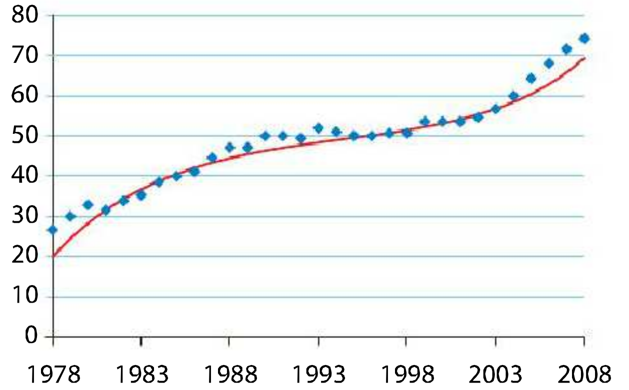
2. L'aigle pourra-t-il s'envoler aussi haut qu'il veut avec le lapin dans les serres ?

Expliquer le raisonnement par un calcul.

71 **Statisticiens**

Le graphique bleu ci-dessous (*source* : Insee) décrit la situation du taux d'endettement des ménages en France de 1978 à 2008. La courbe rouge, proposée par une équipe de statisticiens, donne un ajustement de ces données.

Taux d'endettement bancaire des ménages, en % du Revenu Disponible Brut



La fonction d'ajustement proposée par les statisticiens est définie par :

$$f(x) = 0{,}004\,9x^3 - 0{,}233\,7x^2 + 4{,}254\,7x + 20{,}168.$$

Ainsi, le taux d'endettement bancaire des ménages en % en 1978 + x est estimé à $f(x)$.

a) Selon cet ajustement, les statisticiens prévoient-ils une baisse du taux d'endettement des ménages dans les années à venir ?

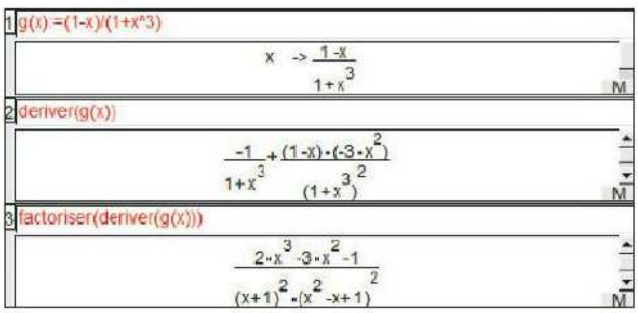
b) Cet ajustement est-il encore adapté en 2015 ?

72 **Fonction auxiliaire**

g est la fonction définie sur]– 1 ; 0] par :

$$g(x) = \frac{1 - x}{1 + x^3}$$

Voici la fenêtre d'un logiciel de calcul formel qui donne l'expression de $g'(x)$.



1. Donner $g'(x)$, puis vérifier que $g'(x)$ est du signe d'une fonction polynôme que l'on notera *f*.

2. a) Calculer $f'(x)$ pour x dans]– 1 ; 0] et dresser le tableau de variation de *f* sur]– 1 ; 0].

b) En déduire le signe de $f(x)$ sur]– 1 ; 0].

3. En déduire le sens de variation de la fonction *g* sur]– 1 ; 0].