

Fractions et décimaux à l'école.

Constructions des fractions et des décimaux

Ces nouveaux nombres vont demander aux élèves de :

- Renoncer à la notion de suivant, d'accepter l'intercalation sans fin.
- D'accepter que l'écriture d'un nombre n'est pas unique.
- D'accepter qu'un nombre ne s'exprime pas forcément par une succession de chiffres.
- D'accepter d'adapter certaines techniques opératoires
- De renoncer à certaines règles :
 - ✓ Plus un nombre a de chiffres plus il est grand
 - ✓ Pour multiplier un nombre par 10 on écrit un zéro à sa droite.
 - ✓ Multiplier augmente, diviser diminue.

1. Fractions

3 conceptions des fractions :

Fraction partage : $3/5$ c'est 3 fois un cinquième, on a partagé l'unité en 5 parts égales et on a pris 3 parts.

Fraction nombre : $3/5$ c'est le nombre qui multiplié par 5 donne 3

Fraction proportion : prendre les $3/5$ d'une quantité.

Il est important de varier les considérations graphiques des fractions, de préciser graphiquement ce qui correspond à l'unité, de rencontrer des fractions supérieures à l'unité.

La conception « fraction partage » permet d'introduire toutes les compétences du programme.

► Codage : on partage une bande de longueur U en trois parties égales. Chacune de ces parties représente un tiers de U et se code $\frac{1}{3}U$. En juxtaposant cinq bandes mesurant chacune $\frac{1}{3}$ de U , on obtient une bande mesurant $\frac{1}{3}U + \frac{1}{3}U + \frac{1}{3}U + \frac{1}{3}U + \frac{1}{3}U$ que l'on codera $\frac{5}{3}U$. Ainsi, $\frac{5}{3}U$ est introduit comme « 5 fois un tiers de U » et non « 5 divisé par 3 ».

► Calcul : on calcule par exemple $\frac{4}{3} + \frac{7}{3}$ en utilisant une procédure de décodage-recodage que l'on verbalise : « j'ai 4 fois $\frac{1}{3}$ et 7 fois $\frac{1}{3}$, donc en tout, j'ai 11 fois $\frac{1}{3}$ qui se code $\frac{11}{3}$ ».

REMARQUE

Il est capital, pour la suite des apprentissages, que les élèves comprennent bien la signification du tiers comme une partie de l'unité que l'on a partagée en trois et donc que l'unité se reconstitue avec 3 tiers.

► Ainsi dans $\frac{11}{3}$, il y a 9 tiers et 2 tiers, soit 3 fois 3 tiers et 2 tiers, soit encore 3 et 2 tiers. On a donc $\frac{11}{3} = 3 + \frac{2}{3}$.

2. Nombres décimaux

On introduit dans l'ordre :

- Fractions simples
- Fractions décimales
- Sommes d'entiers et de fractions décimales
- L'écriture des décimaux avec virgule sera introduite juste après.

À l'école les fractions dont le dénominateur est une puissance de 2 seront introduites en premier = le pliage en 2 parties égales permet d'obtenir la fraction $\frac{1}{2}$ et le pliage en 2 de chacune des sous parties permet d'obtenir le pliage en 4.

Les élèves rencontrent les fractions en cm1, les décimaux jusqu'au $\frac{1}{100}$ en cm1 et jusqu'au $\frac{1}{10\ 000}$ en cm2.

Types de tâches :

- Connaître
- Comparer
- Ranger
- Encadrer
- Repérer et placer sur une droite graduée.
- Écrire une fraction sous forme de somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1.

Pour les décimaux :

- On compare les parties entières, si les nombres ont la même partie entière on compare les chiffres de même rang après la virgule.
- On écrit chaque nombre sous le même format et on utilise la comparaison de deux nombres entiers.
- On écrit les 2 nombres à comparer les uns en dessous des autres en alignant les chiffres des unités, il suffit alors de comparer les chiffres de même rang.

3. Les outils et le matériel.

- La droite graduée permet de donner du sens à la densité des nombres décimaux.
- Le matériel de numération peut être adapté.
- Des feuilles quadrillées si l'unité est bien choisie.

4. Le vocabulaire.

- Partie entière
- Partie décimale
- Nommer les fractions simples et décimales en utilisant le vocabulaire : demi, tiers, quart, dixième, centième.
- Utiliser ces fractions dans des cas simple de partage ou de codage de mesure de grandeurs.

Bannir l'expression « nombre à virgule ».

3,15 est lu de plusieurs manières différentes :

- ▶ « trois virgule quinze » (lecture du langage courant) ;
- ▶ « trois unités et quinze centièmes » ;
- ▶ « trois unités, un dixième et cinq centièmes »...

5. Variables didactiques

- Nombres de chiffres de chaque décimal
- Parties entières identiques ou non
- Même nombre de chiffres après la virgule ou non de chacun des décimaux à comparer.
- Désignations des nombres.
- Matériel à disposition.

6. Difficultés, erreurs.

Voici quelques conceptions erronées :

- Un nb décimal est un nb à virgule.
- Un nb décimal est un entier avec une virgule
- Un nb décimal est constituée de 2 entiers séparés par une virgule.
- Confusion entre les termes dixièmes et dizaines.
- Confusion entre la désignation de la position des chiffres.
- Confusion fraction/décimaux ; barre de fraction.
- Persistance de la notion de successeur = difficulté pour intercaler un nombre.
- Erreurs sur la représentation graphique.

Des situations de références.

Fractions simples.

Afin d'éviter une perception des décimaux comme des entiers avec quelque chose en plus, la situation-problème initiale va devoir montrer la nécessité de nouveaux nombres, par exemple pour mesurer des longueurs. Ainsi, l'équipe ERMEL propose¹ de demander aux élèves d'indiquer, par un message à un autre élève ou groupe d'élèves, quel segment (parmi plusieurs) ils ont choisi, le seul outil disponible étant une bande-unité. Les longueurs des segments sont choisies par le maître pour être des fractions de l'unité (du type $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{2}$...). On construira progressivement avec les élèves lors de cette situation et des suivantes les connaissances sur les fractions, puis sur les décimaux.

Dans cette progression, les fractions sont ensuite travaillées dans d'autres contextes que les longueurs.

Fractions décimales.

Le travail entrepris sur les fractions simples est poursuivi avec des fractions décimales (de dénominateur 10, puis 100). On s'attachera à montrer qu'il faut 10 dixièmes pour obtenir une unité, 10 centièmes pour obtenir 1 dixième. On utilisera l'écrit et l'oral en variant les formes verbales :

- il faut 10 centièmes pour faire 1 dixième ;
- j'ai déjà 7 dixièmes, il faut 3 dixièmes de plus pour avoir une unité, etc.

On s'entraînera à produire diverses écritures du même nombre :

Exemple

$$\frac{742}{100} = \frac{74}{10} + \frac{2}{100} = 7 + \frac{42}{100}$$

L'objectif est d'arriver à une décomposition en somme de fractions, « privilégiées », c'est-à-dire où les numérateurs des fractions décimales sont des entiers inférieurs ou égaux à 9.

Exemple

$\frac{742}{100} = 7 + \frac{4}{10} + \frac{2}{100}$ qui est la décomposition canonique (unique) de $\frac{742}{100}$. Pour cela on pourra utiliser une adaptation du jeu du banquier (voir chapitre « Les nombres à l'école », § 5.3) : les jetons sont des jetons de $\frac{1}{100}$, de $\frac{1}{10}$, de 1, de 10 ; on n'a pas le droit d'avoir plus de neuf jetons de chaque sorte ; l'élève tire un carton, par exemple $\frac{742}{100}$ et doit demander les jetons correspondants, etc.

Écriture décimale.

L'objectif est de trouver une écriture chiffrée qui utiliserait les mêmes règles d'écriture que les entiers (échanges dix contre un ; un chiffre par colonne...)

On s'appuie sur les résultats établis : $\frac{10}{10} = 1$ et $\frac{10}{100} = \frac{1}{10}$. On repart du tableau de numération des entiers et on le prolonge à droite de la colonne des unités en utilisant la règle des échanges 10 contre 1, plus précisément, 10 unités de la colonne de droite valent une unité de la colonne immédiatement à sa gauche.

Exemple

En repartant de la décomposition canonique de l'exemple ci-dessus, on écrit 7 puis 4 et 2, respectivement dans la colonne des unités, dixièmes et centièmes. Il reste à introduire la virgule.

c	d	u	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$
		7	4	2