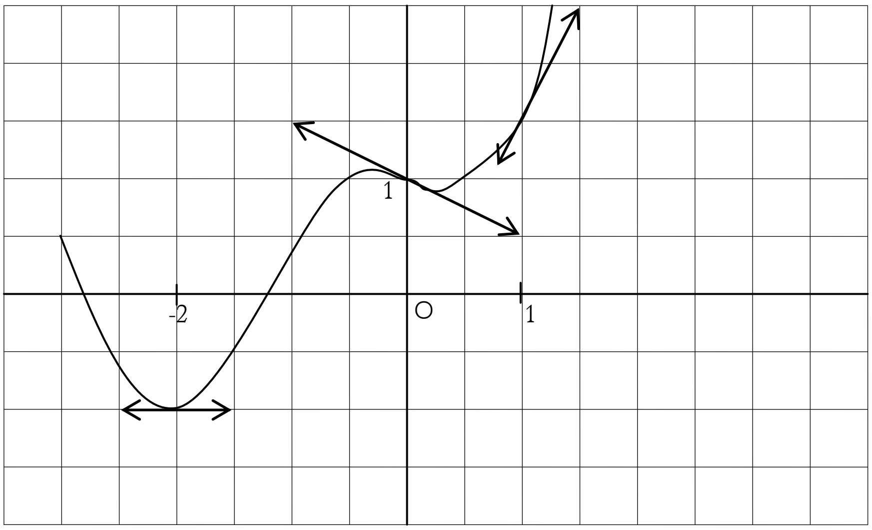
1. Généralités

1-1 : Comme une interro…

1. La courbe représentative d'une fonction f est donnée ci-après. En chacun des points indiqués, la courbe admet une tangente qui est tracée. En vous servant du quadrillage, compléter les égalités suivantes :



$f(0)=$ $f(-2)=$ $f(1)=$

$f'(0)=$ $f'(-2)=$ $f'(1)=$

2. Soit la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=x\sqrt{x}$. En revenant à la définition du nombre dérivé, montrer que f est dérivable en 0. Préciser $f'(0)$.

A l'aide des formules de dérivation, vérifier que f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et exprimer $f'(x)$ pour $x>0$. Préciser alors l'ensemble des réels x pour lesquels f est dérivable.

3. f est la fonction $x \to x^3$. Montrer que l'approximation affine locale de $(2+h)^3$ au voisinage de 0 est égale à $8+12h$.

En déduire des approximations des nombres suivants : $(1,997)^3$ et $(2,001)^3$.

4. Soit f la fonction trinôme telle que $f(x)=ax^2+bx+c$. Déterminer les réels a,b,c tels que sa courbe C_f admette au point $A(1;3)$ une tangente de coefficient directeur égal à 1 ainsi qu'une tangente horizontale au point d'abscisse $\frac{1}{2}$.

5. Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes et déterminer leur sens de variation.

$f(x)=\sqrt{3}x^2+2x+3$, $f(x)=\left(2x^2+x\right)\sqrt{x}$, $f(x)=\dfrac{3}{x^2-1}$, $f(x)=\dfrac{x^3-1}{3x^2+1}$, $f(x)=\cos(3x)$, $f(x)=(4x+5)^6$.

6. Etudier les variations de la fonction $f: x \to 2x^4-3x^3+\dfrac{x^2}{2}+3$ sur $\mathbb{R}$ (calcul de la dérivée, étude de son signe, variations de *f*). On donnera l'équation de la tangente à C_f au point d'abscisse -1.

Correction

1. Il faut lire les coefficients directeurs sur la figure pour $f'(0)$, $f'(-2)$ et $f'(1)$:

$f(0)=1$ $\quad f(-2)=-1$ $\quad f(1)=\dfrac{3}{2}$

$f'(0)=-\dfrac{1}{2}$ $\quad f'(-2)=0$ $\quad f'(1)=2$

2. On calcule $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sqrt{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x}=0=f'(0)$.

On peut calculer avec la formule du produit, mais c'est plus élégant de passer par $f(x)=x\sqrt{x}=x^1x^{1/2}=x^{3/2}$ d'où $f'(x)=\dfrac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1}=\dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}=\dfrac{3}{2}\sqrt{x}$. La dérivée n'existe que lorsque $x\geq 0$.

3. L'approximation locale de *f* est $f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0)+h^2\varepsilon(h)$, avec ici $f'(x_0)=3x_0^2$.

On applique avec $x_0=2$: $f(2+h)=2^3+h\left(3.2^2\right)+h^2\varepsilon(h)=8+12h+h^2\varepsilon(h)$.

$(1,997)^3=(2-0,003)^3\approx 8-12.0,003=7,964$ et $(2,001)^3=(2+0,001)^3\approx 8+12.0,001=8,012$.

4. On doit avoir $f(1)=3, f'(1)=1, f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$ d'où le système

$$\begin{cases} a+b+c=3 \\ 2a+b=1 \\ a+b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=3-a-b=3-1+1=3 \\ b=-1 \\ a=-b=1 \end{cases} \Rightarrow f(x)=x^2-x+3.$$

5. $f(x)=\sqrt{3}x^2+2x+3 \Rightarrow f'(x)=2\sqrt{3}x+2$, $2\sqrt{3}x+2>0 \Leftrightarrow x>\dfrac{-1}{\sqrt{3}}$.

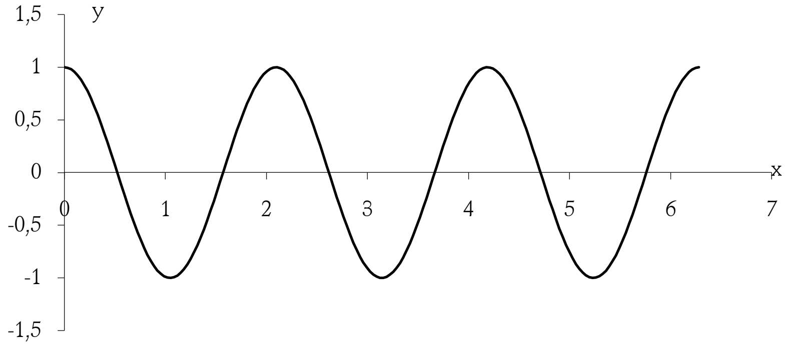
$$f(x)=\left(2x^2+x\right)\sqrt{x} \Rightarrow f'(x)=(4x+1)\sqrt{x}+\left(2x^2+x\right)\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{(4x+1)2x+\left(2x^2+x\right)}{2\sqrt{x}}=\frac{x(10x+3)}{2\sqrt{x}},$$

le dénominateur est positif, $x(10x+3)$ est positif à l'extérieur des racines $-\dfrac{3}{10}$ et 0 (pour 0 *f'* n'existe pas).

$f(x)=\dfrac{3}{x^2-1}\Rightarrow f'(x)=3\dfrac{-2x}{(x^2-1)^2}$, est positif lorsque $x<0$ (attention, f et f' pas définies en -1 et1).

$f(x)=\dfrac{x^3-1}{3x^2+1}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{3x^2(3x^2+1)-(x^3-1)(6x)}{(3x^2+1)^2}=3x\dfrac{3x^3+x-2x^3+2}{(3x^2+1)^2}=3x\dfrac{3x^3+x+2}{(3x^2+1)^2}$, on ne peut pas donner le sens de variation directement car on ne sait pas résoudre $3x^3+x+2>0$.

$f(x)=\cos(3x)\Rightarrow f'(x)=-3\sin(3x)$; plaçons nous sur $[0;2\pi]$, alors $\sin 3x$ s'annule pour $x=0, \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}, \pi, \dfrac{4\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}, 2\pi$ et change de signe à chaque fois.



$f(x)=(4x+5)^6\Rightarrow f'(x)=6\times4\times(4x+5)^5$. f' est du signe de $4x+5$, soit positive lorsque $x>-\dfrac{4}{5}$.

6. $f(x)=2x^4-3x^3+\dfrac{x^2}{2}+3\Rightarrow f'(x)=8x^3-9x^2+x=x(8x^2-9x+1)=x(x-1)(8x-1)$.

Un tableau de signes donne f' positive sur $\left[0;\dfrac{1}{8}\right]\cup[1;+\infty[$.

Tangente à C_f au point d'abscisse -1 : $y=f'(-1)(x+1)+f(-1)=18(x+1)+\dfrac{17}{2}=18x+\dfrac{53}{2}$.

1-2 : *Lecture graphique et interprétation*

La courbe (C) ci-dessous est celle d'une fonction f définie sur $I=]1;+\infty[$

1. a. Lire les valeurs de $f(2)$, $f(3)$ et $f(9)$.

b. Par lecture graphique, donner une valeur approchée des solutions de l'équation $f(x)=0$.

c. Déterminer le signe de f sur I.

2. a. Que vaut $f'(5)$? (Justifier)

b. Donner une équation de la droite (T). Quel nombre dérivé peut-on en déduire ?

c. Dresser le tableau de variations de f sur I.

3. f est de la forme $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-1}$.

a. Calculer $f'(x)$ en fonction de a et de c.

b. Exprimer que A et B sont des points de C et qu'en S la tangente est horizontale.

c. En déduire un système d'inconnues a, b et c puis le résoudre pour trouver l'expression de $f(x)$.

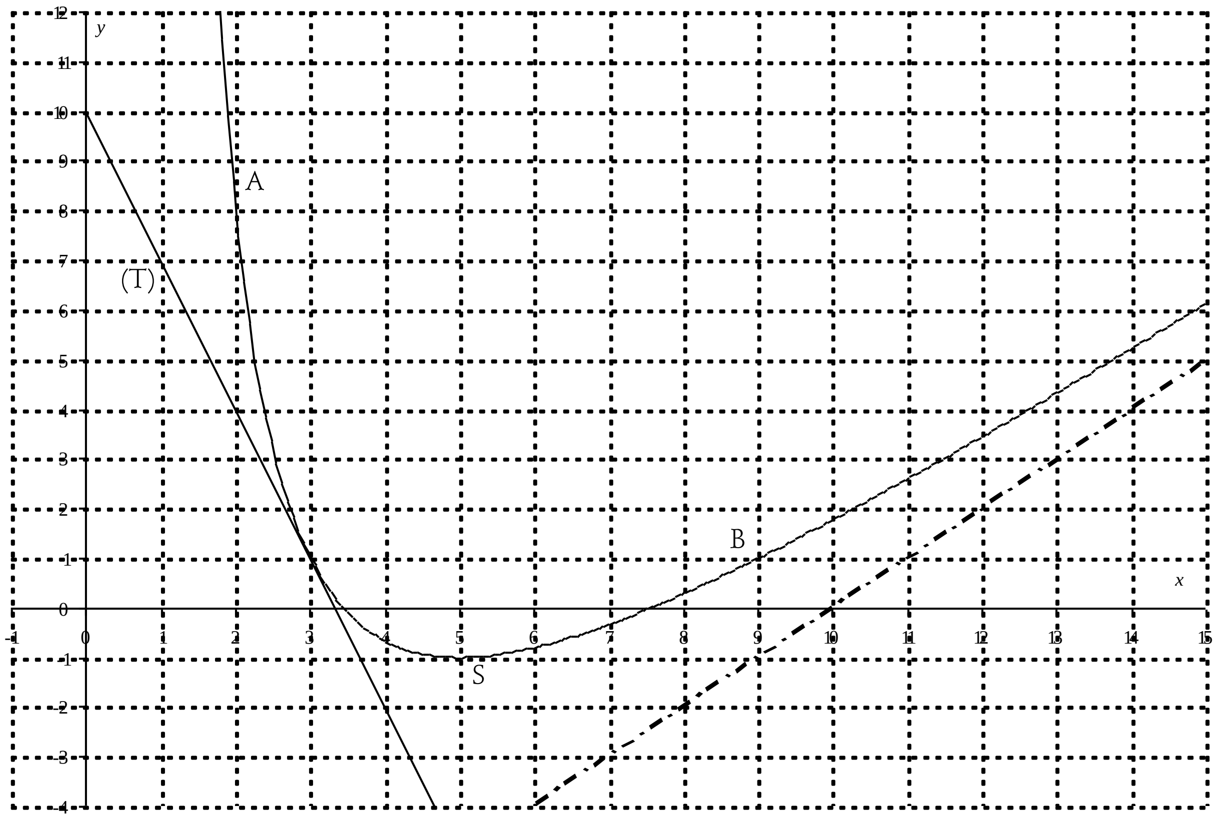
4. On admet que $f(x)=x-10+\dfrac{16}{x-1}$.

a. Montrer que la droite (D) d'équation $y=x-10$ est asymptote à la courbe (C) en $+\infty$.

b. Etudier la position de (D) par rapport à (C).

c. Déterminer l'équation de la tangente à (C) au point d'abscisse 2.

d. Résoudre par le calcul l'équation $f(x) = 0$ et retrouver le résultat de la question 1. b.



Correction

1. a. $f(2) = 8$, $f(3) = 1$, $f(9) = 1$.

b. $f(x) = 0$ lorsque $x = 3,5$ ou $x = 7,5$ environ.

c. f est positive sur $[1\,;3,5]\cup[7,5\,;+\infty[$ f est positive, sur $[3,5\,;7,5]$ f est négative.

2. a. $f'(5)$ vaut 0 car la tangente à la courbe de f en 5 est horizontale.

b. (T) passe par (1 ; 7) et par (3 ; 1) d'où $\begin{vmatrix} x-3 & 1-3 \\ y-1 & 7-1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 6x-18+2y-2=0 \Leftrightarrow y=-3x+10$. Comme (T) est tangente à la courbe au point (3 ; 1), on a $f'(3)=-3$, coefficient directeur de (T).

c.

x	1		5		$+\infty$
f'	‖	$-$	0	$+$	
f	‖	$+\infty$ ↘	-1	↗	$+\infty$

3. a. $f'(x) = a - \dfrac{c}{(x-1)^2}$.

b. et c. $f(2)=8$ donc $2a+b+c=8$, $f(9)$ = 1 donc $9a+b+\frac{c}{8}=1$, $f'(5)=0$ donc $a-\frac{c}{16}=0$.

c. $\begin{cases}2a+b+c=8\\72a+8b+c=8\\16a-c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}18a+b=8\\88a+8b=8\\16a=c\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}18a+b=8\\11a+b=1\\16a=c\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=-10\\c=16\end{cases}$.

4. $f(x)=x-10+\frac{16}{x-1}$.

a. $y = x - 10$ est asymptote si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(x-10)=0$ or $f(x)-(x-10)=\frac{16}{x-10}$ qui tend bien vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$.

b. Comme x > 1, $\frac{16}{x-1}>0$ donc C est au-dessus de D.

c. $f'(x)=1-\frac{16}{(x-1)^2}\Rightarrow f'(2)=1-\frac{16}{1}=-15$ et $f(2)=-8+16=8$: la tangente a pour équation $y=-15(x-2)+8=-15x+38$.

d. $f(x)=\frac{(x-10)(x-1)+16}{x-1}=\frac{x^2-11x+26}{x-1}$; $\Delta=121-104=17$, $x_1=\frac{11-\sqrt{17}}{2}\approx 3,5$ et $x_1=\frac{11+\sqrt{17}}{2}\approx 7,5$.

1-3 : Construction géométrique parabole

Avec Chamois

1. Construire une droite horizontale passant par deux points *A* et *B* ainsi que la médiatrice (d) de [*AB*] passant par *O*, milieu de [*AB*]. On place un point *F* sur (*d*).

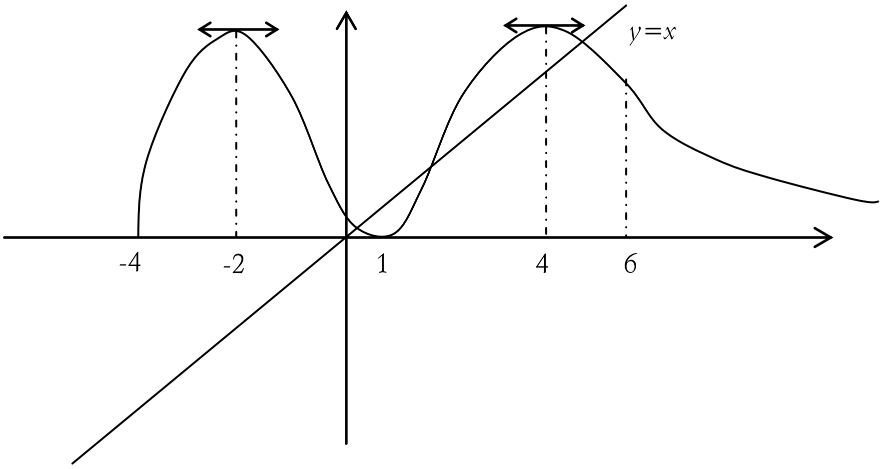
2. On prend *H* un point de (*AB*) et la perpendiculaire (*D*) à (*AB*) passant par *H*. Construire la droite (*FH*) ainsi que la médiatrice (d') de [*FH*]. Construire le point *M* d'intersection de (d') et (D).

3. Avec l'outil *lieu de points* construire le lieu (P) des points *M* quand *H* parcourt (*AB*). Que pouvez-vous dire de (d') par rapport à (P) ?

4. Soit *N* le symétrique de *H* par rapport à *M*, *K* le milieu de [*FH*] et *K'* le symétrique de *K* par rapport à *M*. Mesurer les angles $\widehat{HMK}$, $\widehat{FMK}$ et $\widehat{NMK'}$. Déplacez le point *H*. Que constatez-vous ?

5. On considère que (P) est constitué d'une infinité de tout petits miroirs qui se confondent en chaque point *M* de (P) avec (d') et qu'un rayon lumineux provenant de *N* aboutit en *M*. Dans quelle direction ce rayon lumineux est-il réfléchi ? Connaissez-vous une application concrète de ce phénomène ?

Correction



On précise que pour tout $x \in [-4\,;\,+\infty[$, $f(x) \geq 0$ et que la droite $y = 0$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$.

a. L'équation $f(x) = 0$ admet au moins trois solutions sur $[-4\,;\,+\infty[$.

b. f' change de signe en $x = 1$.

c. La dérivée seconde de f est positive entre -4 et -2.

d. Pour tout $a \in [0\,;\,+\infty[$, l'équation $f(x) = a$ admet au moins une solution dans $[-4\,;\,6]$.

e. Il existe deux réels a et b tels que a est différent de b et $f(a) = f(b)$.

Question 2

Soit $f(x) = x^3(1-x)$, définie sur $\mathbb{R}$. Alors :

a. $f'(x) = -4x^3 + 3x$.

b. 0 est un extrémum de f sur $\mathbb{R}$.

c. Pour tout réel x, $f(x) \leq f\left(\frac{3}{4}\right)$.

d. La courbe de f a une unique tangente horizontale.

e. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Question 3

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R} - \{1\}$ dont le tableau de variation est :

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	1

a. L'équation $f(x) = 2$ admet exactement deux solutions.

b. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'équation $f(x) = a$ admet au moins deux solutions.

c. La courbe de f admet deux asymptotes horizontales.

d. L'équation $f'(x) = 0$ admet au moins une solution.

e. $f(-50) = 0$.

Question 4

Soit $h(x) = x - \dfrac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R} - \{0\}$ et (H) sa courbe représentative.

a. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{h(x)}{x-1}=2$.

b. La courbe (H) est toujours en dessous de la droite ($y = x$).

c. La courbe (H) ne coupe jamais la droite ($x = 0$).

d. La dérivée seconde de f (la dérivée de la dérivée) s'annule au moins une fois.

e. La courbe (H) est en dessous de ($y = 1$) lorsque $x\in\left]-\infty\,;-\frac{1}{2}\right]\cup\left]0\,;\frac{3}{2}\right]$.

Question 5

Soit $f(x)=\frac{x^2-2x}{x^2-1}$ et (C) sa courbe représentative.

a. Le signe de f' est celui de x^2-x+1.

b. (C) coupe la droite ($y = 1$) en au moins un point.

c. f est toujours décroissante.

d. Il existe deux points de (C) où la tangente à (C) est parallèle à ($y = -x$).

e. (C) a un seul point d'ordonnée $2-2\sqrt{2}$.

Question 6

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal. (C) admet la droite d'équation $y = x - 1$ comme asymptote en $+\infty$.

Soit (T) la tangente à (C) au point d'abscisse 1. Son équation est $y = x + 2$.

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

b. $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]=0$.

c. $f'(1) = 1$.

d. $f(1) = 1$.

e. f admet une asymptote horizontale en $+\infty$.

<u>Correction</u>

Question 1

a. **Faux** : L'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions sur $[-4\,;+\infty[$: -4 et 1 à vue de nez. Après 3 la fonction est strictement positive, donc elle ne s'annule pas.

b. **Vrai** : f' change de signe en $x = 1$ puisque f est décroissante avant 1 puis croissante après 1.

c. **Faux** : Sur $[-4\,;6]$, $f(x) > x$ lorsque $x \in [-4\,,0]$ puis $x \in [2\,,4]$ ce n'est donc pas un intervalle.

d. **Faux** : Si a est supérieur au plus grand des deux maximums de f, l'équation $f(x) = a$ n'a pas de solution dans $[-4\,;6]$.

e. **Vrai :** Toutes les valeurs de x qui ont même image satisfont à la question. Il y en a plein.

Question 2

Soit $f(x)=x^3(1-x)$, définie sur $\mathbb{R}$. Alors :

a. **Faux** : $f(x)=x^3(1-x)=-x^4+x^3 \Rightarrow f'(x)=-4x^3+3x^2$

b. **Faux** : $f'(x)=-4x^3+3x^2=x^2(-4x+3)$, la dérivée s'annule bien mais elle ne change pas de signe. 0 n'est donc pas un extrémum de f sur $\mathbb{R}$.

c. **Vrai** : Lorsque $x<\frac{3}{4}$, f' est positive et f est croissante, lorsque $x>\frac{3}{4}$ f est décroissante donc on a un maximum en 3/4 et $f(x)\le f\left(\frac{3}{4}\right)$.

d. **Faux** : La courbe de f a deux tangentes horizontales, en 0 et en 3/4.

e. **Faux** : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} -x^4=-\infty$.

Question 3

a. **Faux** : L'équation $f(x) = 2$ a une solution entre $-\infty$ et 1 puis en a deux entre 1 et $+\infty$, donc 3 solutions.
b. **Faux** : Lorsque $a > 1$, on a 3 solutions, pour $0<a<1$ on en a deux et pour $a<0$ on en a 1.

c. **Vrai** : La courbe de f a deux asymptotes horizontales : $y = 0$ et $y = 1$.

d. **Vrai** : $f'(x) = 0$ admet au moins une solution, mais on ne peuut pas dire si c'est 1 ou plus…

e. **Faux** : $f(-50)$ = n'importe quoi de positif.

Question 4

a. **Faux** : $\lim\limits_{x\to0}\frac{h(x)}{x-1}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2-1}{x(x-1)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x+1}{x}=+\infty$.

b. **Faux** : La courbe (H) est en dessous de la droite ($y = x$) lorsque $-\frac{1}{x}<0\Leftrightarrow x>0$.

c. **Vrai** : La droite ($x = 0$) est asymptote de (H).

d. **Faux** : La dérivée seconde de f est $\frac{2}{x^3}$ et ne s'annule jamais.

e. **Faux** : $h(x)-1=x-\frac{1}{x}-1=\frac{x^2-x-1}{x}=\frac{(x-\frac{1-\sqrt{5}}{2})(x-\frac{1+\sqrt{5}}{2})}{x}$ qui est négatif pour

$$x\in\left]-\infty\,;\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]\cup\left]0\,;\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right].$$

Question 5 $f(x)=\frac{x^2-2x}{x^2-1}$ et (C) sa courbe représentative.

a. **Vrai** : $f'(x)=\frac{(2x-2)(x^2-1)-(x^2-2x)(2x)}{(x^2-1)^2}=\frac{2x^3-2x-2x^2+2-2x^3+4x^2}{(x^2-1)^2}=\frac{2x^2-2x+2}{(x^2-1)^2}=2\frac{x^2-x+1}{(x^2-1)^2}$.

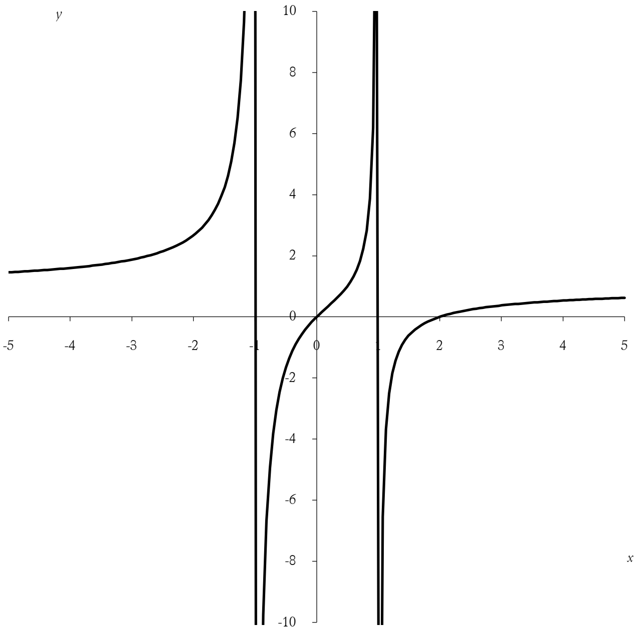
b. **Vrai** :

$$f(x)=\frac{x^2-2x}{x^2-1}=1\Leftrightarrow x^2-2x=x^2-1\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}.$$

c. **Faux** : on a $x^2-x+1>0$ puisque son discriminant est positif.

d. **Faux** : la dérivée est toujours positive, elle ne peut valoir -1.

e. **Faux** : $2-2\sqrt{2}\approx -0,8$; la courbe montre bien qu'il y a deux points possibles.



Question 6

a. **Vrai** : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x-1=+\infty$.

b. **Faux** : $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]=-1$.

c. **Vrai** : La tangente en 1 est $y = x + 2$ donc $f'(1) = 1$.

d. **Faux** : La tangente en 1 est $y = x + 2$ donc $f(1) = 3$.

e. **Faux** : il ne peut y avoir deux asymptotes au même endroit…

1-5 : Vrai/Faux sur les dérivées

Répondre par Vrai ou Faux et **justifier la réponse.**

1. La dérivée sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f:x\mapsto(3x-7)^3$ est $3(3x-7)^2$.

2. La dérivée de $f:x\mapsto 2\sqrt{x}(x+1)$ est $f'(x)=\dfrac{3x+1}{\sqrt{x}}$.

3. La fonction $f(x)=\sqrt{2x+1}$ est dérivable sur $\left[-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$.

4. La dérivée sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f:x\mapsto\cos 2x$ est $f'(x)=-2\sin 2x$.

5. La courbe représentant la fonction f, définie sur $\left[0;\dfrac{5\pi}{3}\right]$, par $f(x)=2+\cos\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ admet au point d'abscisse $\dfrac{4\pi}{3}$ une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

__**Correction**__

1. **Faux** : La dérivée de $f:x\mapsto(3x-7)^3$ est $3\times3\times(3x-7)^2$ (utiliser la dérivée de u^n).

2. **Vrai** :La dérivée de $f:x\mapsto 2\sqrt{x}(x+1)$ est $f'(x)=2\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}(x+1)+\sqrt{x}\times1\right)=2\left(\dfrac{x+1+2x}{2\sqrt{x}}\right)=\dfrac{3x+1}{\sqrt{x}}$.

3. **Faux** : La dérivée de $f(x)=\sqrt{2x+1}$ est $f'(x)=\dfrac{2}{2\sqrt{2x+1}}$ qui n'existe pas en $-\dfrac{1}{2}$, par contre elle est dérivable sur $\left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$.

4. **Vrai** : vous savez bien votre cours.

5. **Vrai** : la dérivée de f est $f'(x)=-\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ et $f'\left(\frac{4\pi}{3}\right)=-\sin\left(\frac{4\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\pi=0$.

1-6 : Dérivées et variations

6 points

Déterminer l'ensemble de définition, calculer les fonctions dérivées, préciser le sens de variation des fonctions suivantes :

a. $f(x)=-2x^3+3x^2-1$ b. $g(x)=\sqrt{1-x^2}$ c. $h(x)=\frac{-2x+1}{4x}$

Correction

a. $f'(x)=-6x^2+6x=6x(-x+1)$; $E_f=\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$		$-$	
$f(x)$		$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	

b. $E_g=[-1;+1]$; $g'(x)=\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$.

x	-1		0		1
$g'(x)$	$\|$	$+$		$-$	$\|$
$g(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

c. $E_h=\mathbb{R}-\{0\}$; $h'(x)=\frac{-2(4x)-4(-2x+1)}{16x^2}=\frac{-4}{16x^2}$.

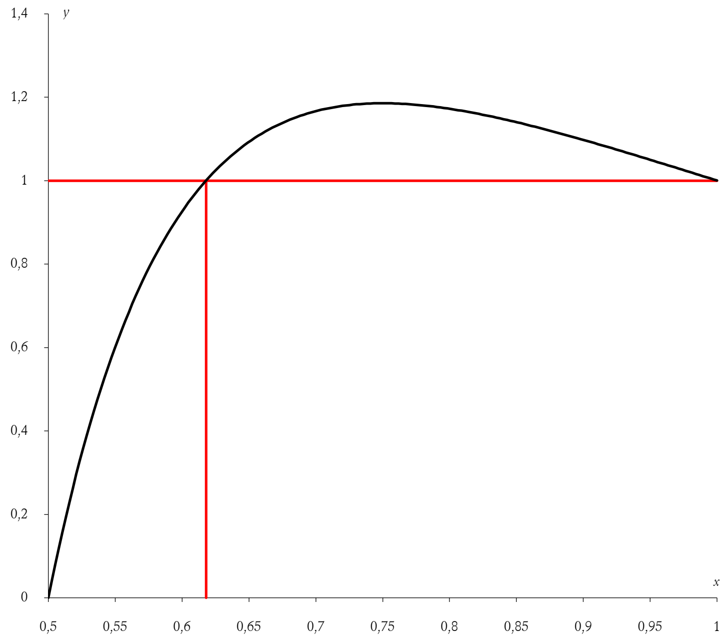
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	$\|$	$-$	
$h(x)$		$\searrow$	$\|$	$\searrow$	

1-7 : Lecture graphique

Montrez à l'aide de votre calculatrice que l'équation $\frac{2x-1}{x^3}=1$ admet une solution unique α sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2};1\right[$. Donner une valeur approchée de α à 10^{-3} près. Toute explication valable sera acceptée même si la rédaction est moche.

Correction

Traçons la courbe de la fonction $f(x)=\dfrac{2x-1}{x^3}$ sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2};1\right[$.



Comme on le voit la fonction prend la valeur 1 aux environs de 0,618 ; plus précisément on a

$f(0{,}618031)= 0{,}99999068$ et $f(0{,}618034) = 1{,}00000963$.

On a donc $\alpha \approx 0{,}618$.

1-8 : Tangente

1. Déterminer la tangente à la courbe (C) d'équation $y = f(x) = -x^4 + 2x^2 + x$ au point A(–1, 0).
2. Montrer que cette droite est aussi tangente à (C) en un autre point que l'on précisera.

Toute explication valable sera acceptée même si la rédaction est vilaine.

Correction

1. On a $f'(x)=-4x^3+4x+1$ d'où $f'(-1)=1$ et $f(-1)=-1+2-1=0$; la tangente est donc $y-0=1(x+1)\Leftrightarrow y=x+1$.

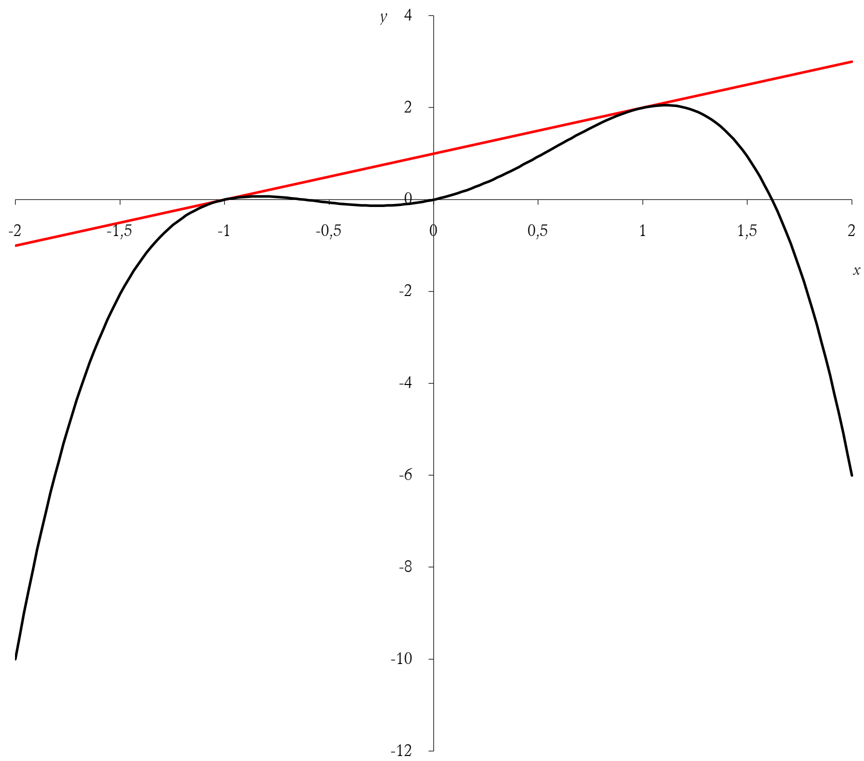
2. Traçons la fonction f ainsi que la tangente en -1 ; nous voyons alors qu'en 1 elle est tangente à f de nouveau.

On vérifie par le calcul : $f'(1)=-4+4+1=1$ et $f(1)=-1+2+1=2$ d'où la tangente en 1 a pour équation : $y-2=1(x-1)\Leftrightarrow y=x+1$. C'est bien la même.

On pouvait également cherche les points de la courbe où la tangente a pour coefficient directeur 1 :

$f'(x)=-4x^3+4x+1=1\Leftrightarrow -4x^3+4x=0\Leftrightarrow 4x\left(-x^2+1\right)=0\Leftrightarrow x=0,1,-1$.

Mais la tangente en 0 a pour équation $y=x$ et ne convient donc pas.



2. Polynômes

2-9 : Second degré 1 (c)

Soit les fonctions f et g définies sur R par : $f(x) = x^2 - 2x - 3$ et $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 3$.

1. Montrer que la courbe C_f représentative de f est l'image de la parabole P d'équation $y = x^2$ par une translation dont on indiquera le vecteur.

2. Montrer que la courbe Γ représentative de g est l'image de la parabole P' d'équation $y = -\frac{1}{2}x^2$ par une translation dont on indiquera le vecteur.

3. Tracer les courbes C_f et Γ dans un même repère (*unité graphique : 2 cm*).

4. Déterminer algébriquement les coordonnées des points d'intersection de C_f et Γ, puis vérifier les résultats graphiquement.

5. Déterminer algébriquement le signe de la différence $f(x) - g(x)$. Donner une interprétation graphique de ce signe.

Correction

1. $f(x) = x^2 - 2x - 3 = (x-1)^2 - 4$. La courbe C_f représentative de f est donc l'image de la parabole P d'équation $y = x^2$ par la translation de vecteur $\vec{u} = \vec{i} - 4\vec{j}$.

2. $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 3 = -\frac{1}{2}(x+2)^2 + 5$. La courbe Γ représentative de g est l'image de la parabole P' d'équation $y = -\frac{1}{2}x^2$ par la translation de vecteur $\vec{v} = -2\vec{i} + 5\vec{j}$.

3. Tracé des deux paraboles C_f et Γ.

4. Les coordonnées $(x;y)$ des points d'intersection de C_f et Γ vérifient : $\begin{cases} y = x^2 - 2x - 3 \\ y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 3 \end{cases}$.

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x - 3 \\ y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 - 2x - 3 \\ x^2 - 2x - 3 = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 - 2x - 3 \\ \frac{3}{2}x^2 - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 - 2x - 3 \\ x = \pm 2 \end{cases}.$$

Les coordonnées des points d'intersection de C_f et Γ sont donc $(2;-3)$ et $(-2;5)$.

5. $f(x) - g(x) = \left(x^2 - 2x - 3\right) - \left(-\frac{1}{2}x^2 - 2x + 3\right) = \frac{3}{2}x^2 - 6$.

$\frac{3}{2}x^2 - 6$ est un trinôme du 2° positif à l'extérieur de ses racines –2 et 2.

Sur $]-\infty;-2[$ et sur $]2;+\infty[$, $f(x) > g(x)$ et la courbe C_f est donc au-dessus de la courbe Γ.

Sur $]-2;2[$, $f(x) < g(x)$ et la courbe Γ est donc au-dessus de la courbe C_f.

2-10 : Second degré 2 (c)

Pour Noël, les jumeaux Sophie et Robin ont reçu des jouets : Sophie, un bonhomme au bout d'un parachute et Robin un arc avec des flèches. Sophie se hâte de lancer son parachute du haut de leur immeuble. Au même moment, Robin, qui s'est installé au pied de l'immeuble, lance une flèche verticalement.

La hauteur du parachute à l'instant t (t en s) durant la descente est donnée par la fonction p définie par $p(t) = -5t + 5,2$.

La hauteur de la flèche à l'instant *t* est donnée par la fonction *f* définie par $f(t) = -5t^2 + 10t$.

1. a. Etudier les variations de *f* sur $\mathbb{R}$.

b. Construire la courbe P représentative de la fonction *f*. Vous ferez le tracé sur l'intervalle [–1 ; 3] en prenant les unités suivantes : 4 cm sur l'axe des abscisses, 2 cm sur l'axe des ordonnées.

2. a. A quels instants la flèche est-elle à une hauteur de 3,75 m ?

b. A quel instant la flèche retombe-t-elle sur le sol ?

3. Le drame : on suppose dans cette question que la flèche rencontre le parachute.

a. Représenter dans le même repère la fonction *p*.

b. Déterminer à quel instant et à quelle hauteur la flèche transperce le parachute.

<u>Correction</u>

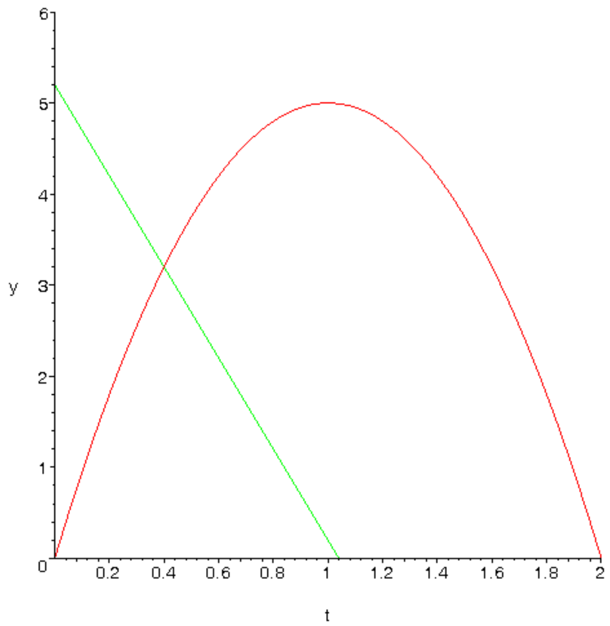
1. a. $f'(t) = -10t + 10 \geq 0 \Leftrightarrow t \leq 1$. Les limites sont celle de $-5t^2$, soit $-\infty$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
f	$-\infty \nearrow$	5	$\searrow -\infty$

2. a. $f(t) = -5t^2 + 10t = 3,75 \Leftrightarrow t^2 - 2t + 0,75 = 0$, $t = 0,5$ ou $t = 1,5$.

b. Lorsque $f(t) = 0$, soit à $t = 2$.

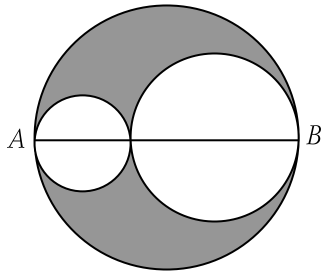
3. a.



b. $f(t)=-5t^2+10t=-5t+5,2 \Leftrightarrow -5t^2+15t-5,2=0$, soit t = 0,4 (lorsqu'elle monte) ou t = 2,6 (lorsqu'elle descend).

2-11 : Second degré 3 (c)

On considère un point M sur le diamètre $[AB]$ d'un cercle. Il détermine deux cercles de diamètre $[AM]$ et $[MB]$. On pose $AB=4$ et $AM=x$.



1. Montrer que l'aire $A(x)$ de la surface colorée est définie par : $A(x)=\frac{\pi}{2}\left(-x^2+4x\right)$.

2. Déterminer la position de M pour laquelle $A(x)$ est maximale.

3. Existe-t-il une position de M pour laquelle $A(x)$ soit strictement supérieure à la somme des aires des deux disques de diamètre $[AM]$ et $[MB]$?

4. Déterminer les positions de M pour lesquelles $A(x)$ soit inférieure à la moitié de l'aire des deux disques de diamètre $[AM]$ et $[MB]$.

Correction

1. L'aire $A(x)$ de la surface colorée est définie sur $[0;4]$ par :

$$A(x)=\pi\times\left(\frac{AB}{2}\right)^2-\pi\times\left(\frac{AM}{2}\right)^2-\pi\times\left(\frac{MB}{2}\right)^2=\pi\times(2)^2-\pi\times\left(\frac{x}{2}\right)^2-\pi\times\left(\frac{4-x}{2}\right)^2=\ldots=\frac{\pi}{2}\left(-x^2+4x\right).$$

2. $A: x\to\frac{\pi}{2}\left(-x^2+4x\right)=-\frac{\pi}{2}(x-2)^2+2\pi$ est une fonction du 2° qui est croissante sur $[0;2]$ et décroissante sur $[2;4]$ car le coefficient du x^2 est négatif. A admet donc un maximum en x = 2 égal à 2π. La position de M pour laquelle $A(x)$ est maximale est donc le milieu du diamètre $[AB]$.

3. $A(x)$ est strictement supérieure à la somme des aires des deux disques de diamètre $[AM]$ et $[MB]$ signifie que : $\frac{\pi}{2}\left(-x^2+4x\right)>\pi\times\left(\frac{x}{2}\right)^2+\pi\times\left(\frac{4-x}{2}\right)^2$; soit après calculs, $x^2-4x+4<0$.

Or $x^2-4x+4=(x-2)^2\geq 0$. Il est donc impossible de trouver une position de M vérifiant le problème.

4. $A(x)$ est inférieure à la moitié de l'aire des deux disques de diamètre $[AM]$ et $[MB]$ signifie que :

$\frac{\pi}{2}\left(-x^2+4x\right)\le\frac{1}{2}\left[\pi\times\left(\frac{x}{2}\right)^2+\pi\times\left(\frac{4-x}{2}\right)^2\right]$; soit après calculs, $3x^2-12x+8\ge 0$.

Or $3x^2-12x+8$ est un trinôme du 2° positif à l'extérieur de ses racines $2-\frac{2}{3}\sqrt{3}$ et $2+\frac{2}{3}\sqrt{3}$.

Les positions de M vérifiant le problème sont donc telles que $x\in\left[0;2-\frac{2}{3}\sqrt{3}\right]\cup\left[2+\frac{2}{3}\sqrt{3};4\right]$.

2-12 : 3ème degré 3 (c)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^3-3x-1$.

1. Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ (sens de variation et limites).

2. Déterminer une équation de la tangente T_0 à la courbe C_f de f au point d'abscisse 0 et préciser sa position relative à C_f.

3. Soit la parabole P d'équation : $y=x^2-2x+1$.

a. Préciser les éléments caractéristiques de P.

b. Vérifier que le point $A(2;\ 1)$ est un point qui appartient aux deux courbes C_f et P.

c. Etudier la position de C_f par rapport à P.

4. Tracer les courbes C_f et P dans un même repère.

Correction

1. $f:x\to x^3-3x-1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée : $f'(x)=3x^2-3=3\left(x^2-1\right)$.

a. Sur $\mathbb{R}$, $f'(x)$ a le signe de x^2-1.

b. x^2-1 est positif (coefficient de x^2 positif) à l'extérieur de ses deux racines –1 et 1.

c. f est donc croissante sur $]-\infty;-1]$ et sur $[1;+\infty[$, et f est décroissante sur $[-1;1]$.

d. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3-3x-1=\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3-3x-1=\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$.

2. Une équation de la tangente T_0 à la courbe C_f au point d'abscisse 0 est : $y=-3(x-0)-1$; soit $y=-3x-1$.

$f(x)-(-3x-1)=x^3$. Or $x^3\le 0$ sur $]-\infty;0]$ et $x^3\ge 0$ sur $[0;+\infty[$.

C_f est donc au-dessus de T_0 sur $[0;+\infty[$ et C_f est donc au-dessous de T_0 sur $]-\infty;0]$.

3. Soit la parabole $P:y=x^2-2x+1=(x-1)^2+0$.

a. P est une parabole de sommet $S(1;0)$, d'axe la droite $\Delta:x=1$ et verticale.

b. $f(2)=2^3-3\times2-1=1$ et $2^2-2\times2+1=1$. Le point $A(2;1)$ est un point des deux courbes C_f et P.

c. $f(x)-\left(x^2-2x+1\right)=x^3-x^2-x-2$. On vérifie que 2 est racine de x^3-x^2-x-2.

Après division, $x^3-x^2-x-2=(x-2)\left(x^2+x+1\right)$. Or x^2+x+1 est toujours positif car son discriminant est négatif et le coefficient de x^2 est positif. x^3-x^2-x-2 est donc du signe de $x-2$. C_f est donc au-dessus de P sur $[2;+\infty[$ et C_f est donc au-dessous de P sur $]-\infty;2]$.

4. Courbes C_f et P.

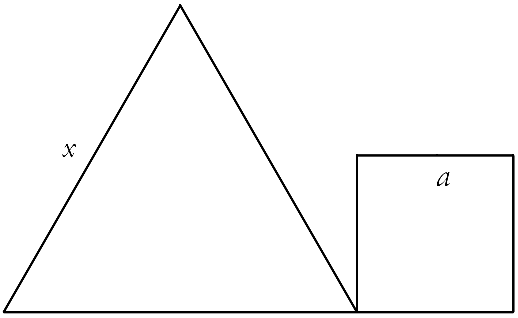
2-13 : *Ficelle (c)*

Avec une même ficelle de longueur 1 m, on forme un triangle équilatéral de côté x et un carré de côté a. On note s la somme des aires du triangle et du carré.

1. Montrez que $s(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2+\frac{1}{16}(1-3x)^2$.

2. Pour quelle valeur de x, s est-elle minimale ?

3. Pour la valeur de x trouvée, quelle est la valeur de $\frac{x}{a}$?



Correction

1. Aire du triangle équilatéral : $\frac{base\times hauteur}{2}=\frac{1}{2}x\frac{\sqrt{3}}{2}x=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$; pour l'aire du carré il faut le côté ; comme on a déjà consommé $3x$ de ficelle avec le triangle, il reste $l-3x$ pour faire 4 côtés, soit $a=\frac{l-3x}{4}$.

L'aire totale est donc $s(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2+\left[\frac{1}{4}(l-3x)\right]^2=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2+\frac{1}{16}(1-3x)^2$.

2. On calcule $s'(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}2x+\frac{1}{16}2(-3)(1-3x)=\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{3}{8}+\frac{9}{8}x=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{9}{8}\right)x-\frac{3}{8}$. s' s'annule en $x=\frac{3}{4\sqrt{3}+9}$ qui est la valeur pour laquelle s est minimale.

3. $a=1-3x=1-\frac{9}{4\sqrt{3}+9}=\frac{4\sqrt{3}}{4\sqrt{3}+9}\Rightarrow\frac{x}{a}=\frac{4x}{1-3x}=\frac{12}{4\sqrt{3}+9}\frac{4\sqrt{3}+9}{4\sqrt{3}}=\sqrt{3}.$

3. *Fonctions rationnelles*

3-14 : *Hyperbole 1 (c)*

1. Déterminer les réels a, b, c pour que la fonction $f(x)=ax+b+\frac{c}{x-1}$ passe par $A(2\,;4)$, admette en ce point une tangente horizontale et aie au point d'abcisse 3 une tangente parallèle à la droite d'équation $y=x+4$.

2. Soit $g(x)=\frac{4}{3}x-1+\frac{4}{3x-3}$.

a. Etudier les variations de g ; correspond-t-elle à la fonction f du 1° ?

b. Déterminer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition. Quelles conclusions graphiques en tirez-vous ?

c. Montrez que la courbe (C) de g a une asymptote oblique (D) et précisez la position de (D) par raport à (C).

d. Déterminez la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 3. Déterminez la position de (T) par rapport à (C).

e. Tracez soigneusement (T), (D) et (C) dans un repère orthonormé : unités : 2 cm (ou 3 carreaux).

Correction

1. $f(x)=ax+b+\frac{c}{x-1}$ passe par $A(2\,;4)$ si $f(2)=2a+b+c=4$; on calcule $f'(x)=a-\frac{c}{(x-1)^2}$

elle a en ce point une tangente horizontale si $f'(2)=0\Leftrightarrow a-\frac{c}{(2-1)^2}=0\Leftrightarrow a=c$

elle a au point d'abcisse 3 une tangente parallèle à la droite d'équation $y = x + 4$, soit $f'(3)=1$, le coefficient directuer de la droite. On a donc $a-\frac{c}{4}=1 \Rightarrow a-\frac{a}{4}=1 \Leftrightarrow a=\frac{4}{3}=c$.

On termine avec $2a+b+c=4 \Leftrightarrow 4+b=4 \Leftrightarrow b=0$, soit $f(x)=\frac{4}{3}x+\frac{4}{3(x-1)}$

2. Soit $g(x)=\frac{4}{3}x-1+\frac{4}{3x-3}$.

a. g n'a pas la même écriture que f… mais c'est la même décalée de 1 ves le bas. $g'(x)=\frac{4}{3}-\frac{4}{3(x-1)^2}=\frac{4}{3}\left(\frac{(x-1)^2-1}{(x-1)^2}\right)=\frac{4}{3}\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$.

Tableau de variation :

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
g'		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
g	$-\infty$	$\nearrow$	$-7/3$	$\searrow$	$-\infty$ $\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	$7/3$	$\nearrow$	$+\infty$

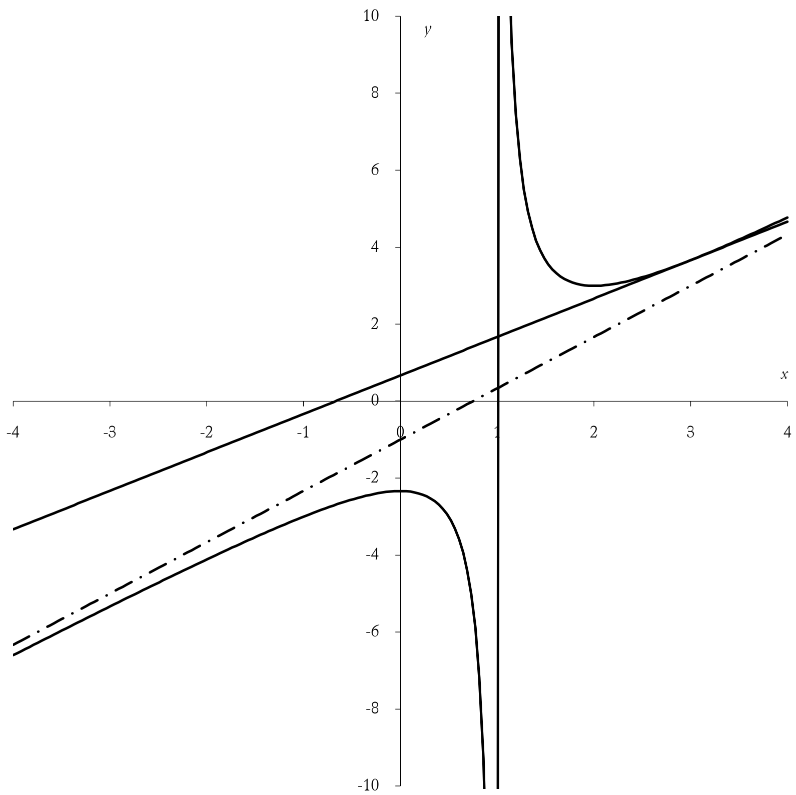
b & c. En $+\infty$ et $-\infty$ le terme $\frac{4}{3x-3}$ tend vers 0, la fonction g se comporte comme D : $y=\frac{4}{3}x-1$ qui est donc son asymptote : $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)-\left(\frac{4}{3}x-1\right)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$.

A gauche de 1 on a : $g(0{,}99)=-133$, donc limite = $-\infty$;
à droite de 1 on a $g(1{,}01)=133$, donc limite = $+\infty$.
La droite $x = 1$ est asymptote verticale.

Lorsque $x > 1$, $\frac{4}{3x-3}$ est positif, C est au dessus de D, lorsque $x < 1$, $\frac{4}{3x-3}$ est positif, C est en dessous de D.

d. (T) : $y=g'(3)(x-3)+g(3)=1(x-3)+\frac{11}{3}=x+\frac{2}{3}$.

$g(x)-\left(x+\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{3}x-1+\frac{4}{3(x-1)}-x-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}x-\frac{5}{3}+\frac{4}{3(x-1)}=\frac{x^2-6x+9}{3(x-1)}=\frac{(x-3)^2}{3(x-1)}$. Y-a-plus qu'à faire le signe… qui est très facile.



3-15 : Tangente (c)

Soit la fonction $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$.

1. Quel est l'ensemble de définition de f ? Calculer la dérivée f' de f.
2. Trouver une équation de la tangente (T) à la courbe (C) de f au point d'abcisse 1.
3. Etudier la position de (C) par rapport à (T) .
4. Que peut-on dire de la tangente (T') à (C) au point d'abcisse – 1 ?
5. Déterminer à l'aide de (T) une valeur approchée de $f(1{,}02)$ puis de $f(0{,}96)$.

Correction

1. $1+x^2$ ne s'annule jamais donc ensemble de définition = $\mathbb{R}$. $f'(x)=\dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$.

2. $y=f'(1)(x-1)+f(1)=-\dfrac{1}{2}(x-1)+\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{2}x+1$.

3. $f(x)-\left(-\dfrac{1}{2}x+1\right)=\dfrac{1}{1+x^2}+\dfrac{1}{2}x-1=\dfrac{x^3-2x^2+x}{2(1+x^2)}=\dfrac{x(x^2-2x+1)}{2(1+x^2)}=\dfrac{x(x-1)^2}{2(1+x^2)}$ qui est du signe de x.

Donc lorsque x est positif C est au-dessus de T, lorsque x est négatif, C est en dessous de T.

4. La fonction f est paire, il y a symétrie de C par rapport à l'axe vertical donc…

5. Au voisinage de 1, $f(x)\approx-\dfrac{1}{2}x+1$ donc $f(1{,}02)\approx-0{,}51+1=0{,}49$ et $f(0{,}96)\approx-0{,}48+1=0{,}52$. On peut comparer avec des valeurs plus exactes : 0,4901 et 0,5204.

3-16 : Rationnelle 1 (c)

a. Soit $P(x)=x^4+6x^2-16x+9$.

Déterminez une racine évidente de P , factorisez P et déterminez son signe.

b. Soit $f(x)=\frac{x^3-x^2+3x+5}{x^2+3}$, soit C sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'unité 2 cm. Déterminez son ensemble de définition, calculez sa dérivée et dressez son tableau de variations.

c. Trouvez a, b, c tels que $f(x)=ax+b+\frac{c}{x^2+3}$. Montrez que C a une asymptote D et étudiez la position de C par rapport à D. Tracez D et C.

Correction

a. Soit $P(x)=x^4+6x^2-16x+9$.

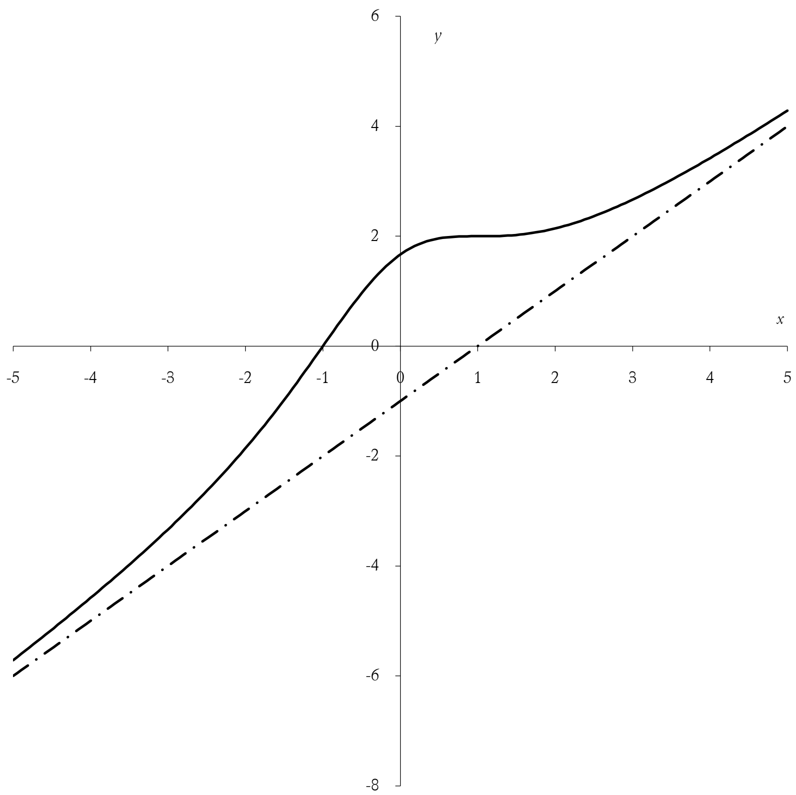
Quand on dit évident c'est que c'est −2, 1, 0, 2, −2, etc. Ici 1 marche très bien : $P(1)=1+6-16+9=0$. On peut alors mettre (x − 1) en facteur : $P(x)=(x-1)(x^3+ax^2+bx-9)$ où il reste à trouver a et b. Si on développe et que l'on identifie les coefficients, on a alors : $P(x)=(x-1)(x^3+x^2+7x-9)$. Il nous faut recommencer, or on a 1 de nouveau racine évidente de x^3+x^2+7x-9, ce qui donne $x^3+x^2+7x-9=(x-1)(x^2+2x+9)$. Le discriminant du dernier terme est négatif, donc signe de +1, positif. Conclusion $P(x)=(x-1)^2(x^2+2x+9)$ est toujours positif.

b. $f(x)=\frac{x^3-x^2+3x+5}{x^2+3}$ est définie sur $\mathbb{R}$ puisque $x^2+3>0$.

$$f'(x)=\frac{(3x^2-2x+3)(x^2+3)-(x^3-x^2+3x+5)(2x)}{(x^2+3)^2}=\frac{x^4+6x^2-16x+9}{(x^2+3)^2}\geq 0.$$

c. $f(x)=ax+b+\frac{c}{x^2+3}=\frac{ax^4+bx^2+3ax+3b+c}{x^2+3}$, on doit donc avoir a = 1, b = −1, c = 5 − 3b = 8. f s'écrit donc $f(x)=x-1+\frac{8}{x^2+3}$.

On en déduit les limites à l'infini : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x-1+\frac{8}{x^2+3}=+\infty-1+0=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f=-\infty$ ainsi que l'asymptote y = x − 1 : $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)-(x-1)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8}{x^2+3}=0$; comme cette différence est positive, on a C au-dessus de D tout le temps.



3-17 : Rationnelle 2 (c)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}-\{-1\}$ par $f(x)=\dfrac{x}{(x+1)^2}$.

1. Calculer $f'(x)$, déterminer son signe et et étudier les variations de f sur $\mathbb{R}-\{-1\}$.
2. Déterminer l'équation de la tangente D à la courbe au point d'abscisse 0.
3. a. Résoudre l'équation $(x+1)^2=1$.

b. Résoudre l'inéquation $\dfrac{x}{(x+1)^2}\geq x$. Quelle est la position de la courbe C_f de f par rapport à la droite D ?

c. Justifier que la tangente D ne recoupe pas la courbe C_f dans $]-1\,;\,+\infty[$.

4. Résoudre les équations : $f(x) = 0,5$; $f(x) = 0,2$.

Correction

1.

$$f'(x)=\frac{1(x+1)^2-x[2(x+1)]}{(x+1)^4}=\frac{(x+1)(x+1-2x)}{(x+1)^4}$$
$$=\frac{(x+1)(1-x)}{(x+1)^4}$$

positive à l'intérieur de $[-1\,;1]$, négative à l'extérieur.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f'		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
f		$\searrow$	$\Vert$	$\nearrow$	$1/4$	$\searrow$	

2. $f'(0)=1$, $f(0)=0$, la tangente a pour équation $y = x$.

3. a. $(x+1)^2=1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=1 \\ x+1=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-2 \end{cases}$.

b. $\dfrac{x}{(x+1)^2} \ge x \Leftrightarrow \dfrac{x}{(x+1)^2} - x \ge 0 \Leftrightarrow x\left[\dfrac{1-(x+1)^2}{(x+1)^2}\right] \ge 0$

$$\Leftrightarrow x\left[1-(x+1)\right]\left[1+(x+1)\right] \ge 0 \Leftrightarrow -x^2\left[x+2\right] \ge 0 \Rightarrow x \le -2.$$

Lorsque x est inférieur à -2, C_f est au-dessus de D, lorsque x est supérieur à -2, C_f est en dessous de D.

c. Les seuls endroits où la courbe coupe D c'est lorsque la différence $f(x)-x$ change de signe, soit pour $x = -2$ uniquement.

4. C'est du second degré bête et méchant : $f(x) = 0{,}5$ n'a pas de solutions ; $f(x) = 0{,}2$ a pour solutions $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.

3-18 : Rationnelle 3 (c)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par : $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x-1}$.

1. Etudier le sens de variation et les limites de f.

2. Dresser le tableau de variations de f.

3. Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout $x \ne 1$, $f(x) = ax+b+\dfrac{c}{x-1}$.

4. Démontrer que la courbe C_f de f admet une asymptote oblique D en $-\infty$ et en $+\infty$. La courbe C_f admet-elle une autre asymptote ?

5. Montrer que le point $A(1;2)$ est un centre de symétrie de la courbe C_f.

Correction

1. $f : x \to \dfrac{x^2+3}{x-1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, de dérivée : $f'(x) = \dfrac{2x(x-1)-(x^2+3)}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$.

Sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, $f'(x)$ a le signe de x^2-2x-3 car $(x-1)^2>0$. x^2-2x-3 est positif (coefficient de x^2 positif) à l'extérieur de ses deux racines -1 et 3.

f est donc croissante sur $\left]-\infty;-1\right]$ et sur $\left[3;+\infty\right[$, et f est décroissante sur $\left[-1;1\right[$ et sur $]1;3]$.

* $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2+3}{x-1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+3}{x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$.

* $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to1}(x^2+3)=4 \\ \lim\limits_{x\to1^-}(x-1)=0^- \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{x^2+3}{x-1} = -\infty$ et $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to1}(x^2+3)=4 \\ \lim\limits_{x\to1^+}(x-1)=0^+ \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{x^2+3}{x-1} = +\infty$.

2. $f(-1) = \dfrac{4}{-2} = -2$ et $f(3) = \dfrac{12}{2} = 6$.

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	‖	−	0	+	
f	$-\infty$	↗	-2	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	6	↗	$+\infty$

3. Après division, $x^2+3 = (x+1)(x-1)+4$. Pour tout $x \ne 1$, $f(x) = \dfrac{(x+1)(x-1)+4}{x-1} = x+1+\dfrac{4}{x-1}$.

4. La courbe C_f admet une asymptote verticale d'équation $x=1$ car $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x^2+3}{x-1}=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x^2+3}{x-1}=+\infty$.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x+1+\dfrac{4}{x-1} \\ \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{4}{x-1}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{4}{x}=0 \end{array}\right\}\Rightarrow$$ La courbe C_f de f admet pour asymptote oblique la droite $D: y=x+1$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

5. $A(1;2)$ est un centre de symétrie de C_f car :

$f(1-x)+f(1+x)=1-x+1+\frac{4}{1-x-1}+1+x+1+\frac{4}{1+x-1}=4=2\times 2$ et $D_f=\mathbb{R}\backslash\{1\}$ est centré en 1.

3-19 : Rationnelle 4 (c)

1. On considère le polynôme $P(x)=x^3-3x^2+2$.

   a. Vérifier que $P(x)=(x-1)(x^2-2x-2)$.

   b. Etudier le signe de $P(x)$.

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}-\{2\}$ par $f(x)=\frac{x^3-3x+2}{x-2}$ et C sa courbe représentative dans un repère orthogonal (en abscisse 1 cm pour 1 unité, en ordonnée 1 cm pour 2 unités).

   a. Déterminer les limites de f en $+\infty$, en $-\infty$ et en 2. Préciser les asymptotes verticales et horizontales éventuelles.

   b. Montrer que $f'(x)=\frac{2P(x)}{(x-2)^2}$.

   c. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

   d. Tracer C dans le repère précisé ci-dessus.

3. a. Pour quelle abscisse a la tangente au point d'abscisse a est-elle horizontale ? Justifier.

   b. Déterminer l'équation de la tangente T à C en $x = 3$ et la tracer dans le même repère que C.

4. Trouver a, b, c et d tels que $f(x)=ax^2+bx+c+\frac{d}{x-2}$.

5. On admet que $f(x)=x^2+2x+1+\frac{4}{x-2}$. On appelle g la fonction définie par $g(x)=x^2+2x+1$ et P sa courbe représentative.

   a. Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de $f(x)-g(x)$. Que peut-on en déduire sur les courbes C et P ?

   b. Etudier la position relative de C et P.

   c. Tracer P dans le même repère que C et T en utilisant les résultats des questions a. et b.

Correction

1. $P(x)=x^3-3x^2+2$.

   a. $P(x)=(x-1)(x^2-2x-2)=x^3-2x^2-2x-x^2+2x+2=x^3-3x^2+2$.

   b. Pour le trinôme, on a $\Delta=12=(2\sqrt{3})^2$ d'où les racines $x_1=1-\sqrt{3}, x_2=1+\sqrt{3}$. Un petit tableau de signes nous donne $P(x)\geq 0 \Leftrightarrow x\in\left[1-\sqrt{3}\,;1\right]\cup\left[1+\sqrt{3}\,;+\infty\right[$.

2. $f(x)=\frac{x^3-3x+2}{x-2}$

a. En $+\infty$ et en $-\infty$ f se comporte comme $\dfrac{x^3}{x}=x^2$ et tend vers $+\infty$; en 2, on a $f(1,99)\approx -391$ et $f(2,01)\approx 409$ d'où $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x)=-\infty$. Il n'y a pas d'asymptote horizontale, mais il y en a une verticale en $x = 2$.

b. $f'(x)=\dfrac{(3x^2-3)(x-2)-(x^3-3x+2)}{(x-2)^2}=\dfrac{3x^3-3x-6x^2+6-x^3+3x-2}{(x-2)^2}=\dfrac{2x^3-6x^2+4}{(x-2)^2}=\dfrac{2P(x)}{(x-2)^2}$.

c. Le sens de variation de f dépend uniquement du signe de P. On a donc le tableau de variations suivant.

d. En fin de devoir.

x	$-\infty$		$1-\sqrt{3}$		1		2		$1+\sqrt{3}$		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	↘	$-1,4$	↗	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$19,4$	↗	$+\infty$

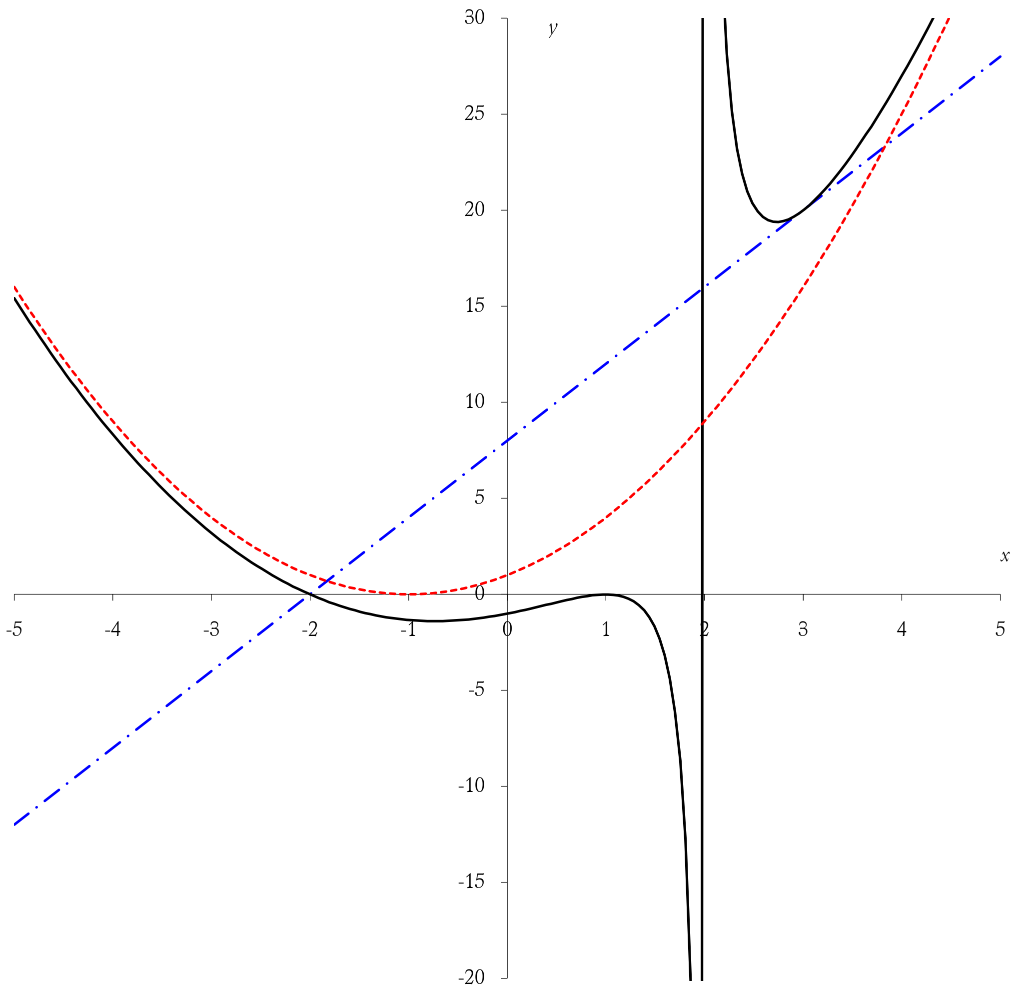
3. a. La tangente est horizontale lorsque la dérivée s'annule, soit pour $1, 1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3}$.

b. $y=f'(3)(x-3)+f(3)\Leftrightarrow y=4(x-3)+20=4x+8$.

4. $f(x)=ax^2+bx+c+\dfrac{d}{x-2}=\dfrac{ax^3-2ax^2+bx^2-2bx+cx-2c+d}{x-2}=\dfrac{ax^3+(b-2a)x^2+(c-2b)x-2c+d}{x-2}$ d'où

par identification des coefficients : $\begin{cases} a=1\\ b-2a=0\\ c-2b=-3\\ d-2c=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a=1\\ b=2a=2\\ c=2b-3=1\\ d=2c+2=4\end{cases}$.

5. $f(x)-g(x)=\dfrac{4}{x-2}$ donc tend vers 0 à l'infini ; lorsque $x > 2$, $f(x)-g(x)$ est positif et C est au-dessus de P ; lorsque $x < 2$, $f(x)-g(x)$ est négatif et C est en dessous de P. Les deux courbes sont asymptotes.



3-20 : Rationnelle 5 (c)

On considère la fonction $f(x)=\dfrac{x^4-6x^2+1}{x^3-x}$ et sa courbe C dans un repère orthonormé.

a. Trouver a, b et c tels que $f(x)=x+\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x-1}+\dfrac{c}{x+1}$.

b. Ensemble de définition, parité, variations de f.

c. Limites de f, asymptotes à (C).

d. Position de (C) par rapport à D ($y = x$). Tracer D et C.

e. Résoudre $f(x) = 0$.

<u>Correction</u>

a. $f(x)=x+\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x-1}+\dfrac{c}{x+1}=\dfrac{x^2(x^2-1)+a(x^2-1)+bx(x+1)+cx(x-1)}{x^3-x}=\dfrac{x^4+(-1+a+b+c)x^2+(b-c)x-a}{x^3-x}$,

soit $a=-1, b-c=0, a+b+c-1=-6 \Rightarrow a=-1, b=c=-2$. On a donc $f(x)=x-\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{2}{x+1}$.

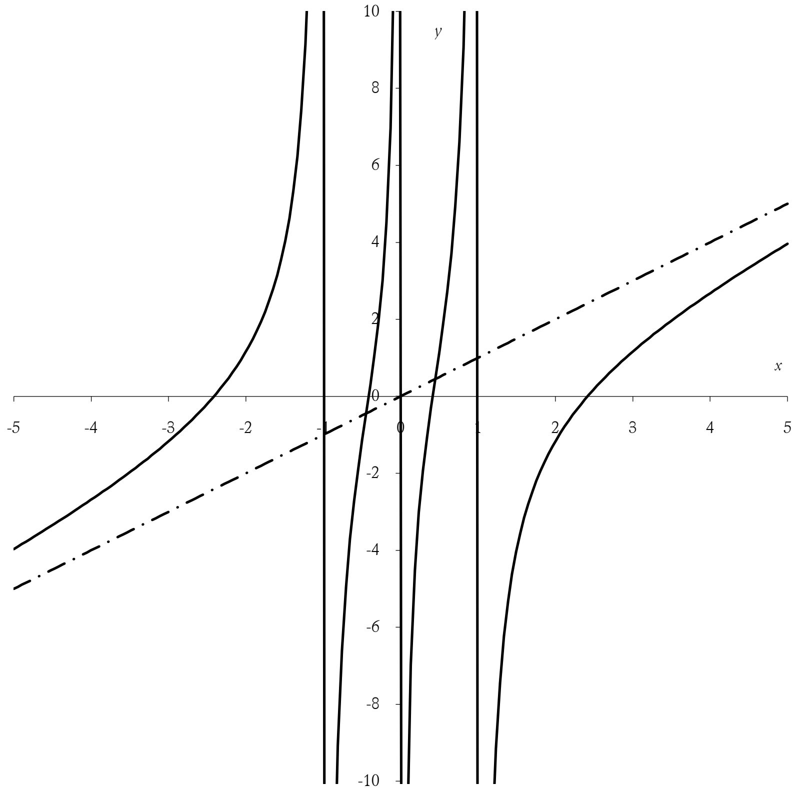
b. $E_f=\mathbb{R}-\{-1, 0, 1\}$, f est impaire, $f'(x)=1+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{(x-1)^2}+\dfrac{2}{(x+1)^2}>0$ donc f croissante.

c. A l'infini $f(x)$ est comme x donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f=-\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)-x=0$, la droite D($y = x$) est asymptote de C.

Pour les autres limites vérifiez les signes des infinis : asymptotes en -1, 0 et 1.

d. $f(x)-x=-\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{2}{x+1}=\dfrac{-(x^2-1)-2(x^2+x)-2(x^2-x)}{x(x-1)(x+1)}=\dfrac{-5x^2+1}{x(x-1)(x+1)}$. C et D se coupent pour $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}$, pour la position, tableau de signes.

e. On reprend $f(x)=\dfrac{x^4-6x^2+1}{x^3-x}=0$, soit $x^4-6x^2+1=0 \Leftrightarrow \begin{cases} X=x^2 \\ X^2-6X+1=0 \end{cases}$; les racines sont alors $X_1=3+2\sqrt{2}$, $X_2=3-2\sqrt{2}$. Or on peut remarquer que $(1\pm\sqrt{2})^2=1\pm2\sqrt{2}+2=3\pm2\sqrt{2}$ d'où les quatre solutions : $x_1=1+\sqrt{2}, x_1'=-1-\sqrt{2}, x_2=1-\sqrt{2}, x_1'=-1+\sqrt{2}$.



3-21 : Rationnelle 6 (c)

Partie A

Soit φ la fonction numérique de la variable réelle x telle que : $\varphi(x)=\dfrac{3x^2+ax+b}{x^2+1}$.

Déterminer les réels a et b pour que la courbe représentative de φ soit tangente au point I de coordonnées (0 ; 3) à la droite (T) d'équation $y = 4x + 3$.

Partie B

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x telle que : $f(x)=\dfrac{3x^2+4x+3}{x^2+1}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm.

1. Montrer que pour tout x réel, on a $f(x)=\alpha+\dfrac{\beta x}{x^2+1}$; α *et* β étant deux réels que l'on déterminera.

2. Etudier les variations de f. Préciser ses limites en l'infini et en donner une interprétation graphique. Dresser le tableau de variations de f.

3. Déterminer l'équation de la droite (T) tangente à la courbe (C) au point I d'abscisse 0. Etudier la position de (C) par rapport à (T).

4. Démontrer que I est centre de symétrie de (C).

5. Construire la courbe (C) et la tangente (T) dans le repère proposé.

<u>Correction</u>

Partie A

$\varphi(x)=\dfrac{3x^2+ax+b}{x^2+1}$ est tangente en I si $\varphi(0)=3$ et $\varphi'(0)=4$ (même coefficient directeur que la droite T).

$\varphi(0)=b=3$ et $\varphi'(x)=\dfrac{(6x+a)(x^2+1)-2x(3x^2+ax+3)}{(x^2+1)^2}\Rightarrow\varphi'(0)=a=4$.

Partie B

1. Ensemble de définition $\mathbb{R}$. $f(x)=\alpha+\dfrac{\beta x}{x^2+1}=\dfrac{\alpha(x^2+1)+\beta x}{x^2+1}=\dfrac{\alpha x^2+\beta x+\alpha}{x^2+1}\Rightarrow\alpha=3,\ \beta=4$.

2. $f'(x)=\dfrac{4(x^2+1)-4x(2x)}{(x^2+1)^2}=\dfrac{-4(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$ d'où les racines -1 et 1. Négatif à l'extérieur, positif à l'intérieur.

A l'infini $\dfrac{4x}{x^2+1}\approx\dfrac{4x}{x^2}=\dfrac{4}{x}$ qui tend vers 0 donc f tend vers 3, asymptote horizontale $y = 3$.

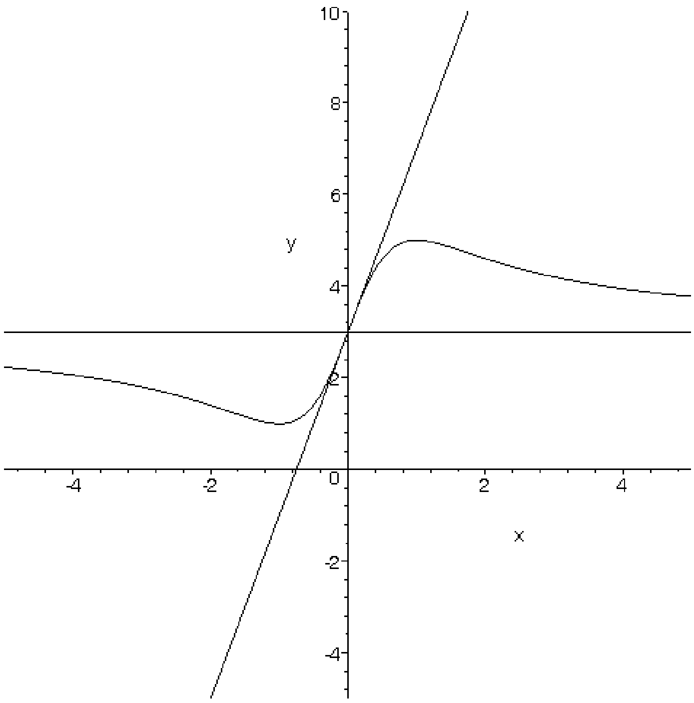
3. La tangente a évidemment pour équation $y = 4x + 3$. On fait le signe de

$$f(x)-(4x+3)=3+\frac{4x}{x^2+1}-4x-3=\frac{4x-4x(x^2+1)}{x^2+1}=\frac{-4x^3}{x^2+1}$$

qui est du signe de $-x$, soit (C) est au dessus de (T) pour $x\le 0$ et en-dessous pour $x\ge 0$.

4. Pour que le point $\Omega(u,v)$ soit centre de symétrie de (C) il faut que $f(u+x)+f(u-x)=2v$; ici ça donne :

$f(x)+f(-x)=3+\dfrac{4x}{x^2+1}+3-\dfrac{4x}{x^2+1}=6=2.3$, ok !



3-22 : Rationnelle 7 (c)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}-\{1\}$ par $f(x)=\dfrac{-2x^2+3x}{x-1}$.

1. Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

En déduire que la courbe C représentative de la fonction f admet une asymptote verticale dont on donnera une équation.

2. a. Vérifier que, pour x différent de 1, $f(x)=-3x+\frac{x^2}{x-1}$.

Peut-on en déduire que la droite d'équation $y = 3x$ est asymptote oblique à la courbe C ? Justifier.

b. Trouver les réels a, b et c tels que, pour x différent de 1, $f(x)=ax+b+\frac{c}{x-1}$.

En déduire que C admet, au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$, une asymptote D dont on donnera une équation.

c. Etudier suivant les valeurs de x la position de C par rapport à D.

3. Etudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variation .

4. Construire la courbe C et ses asymptotes.

<u>Correction</u>

1. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2+3x}{x-1}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}-2x=\mp\infty$;

$\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\frac{1}{0^-}=-\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\frac{1}{0^+}=+\infty$: asymptote verticale $x = 1$.

2. a. $-3x+\frac{x^2}{x-1}=\frac{-3x(x-1)+x^2}{x-1}=\frac{-2x^2+3x}{x-1}=f(x)$; on ne tire aucune information de cette écriture car $\frac{x^2}{x-1}$ tend vers l'infini à l'infini.

b. $ax+b+\frac{c}{x-1}=\frac{(ax+b)(x-1)+c}{x-1}=\frac{ax^2+(b-a)x-b+c}{x-1}=\frac{-2x^2+3x}{x-1}\Rightarrow\begin{cases}a=-2\\b-a=3\\c-b=0\end{cases}$ d'où

$$f(x)=-2x+1+\frac{1}{x-1}.$$

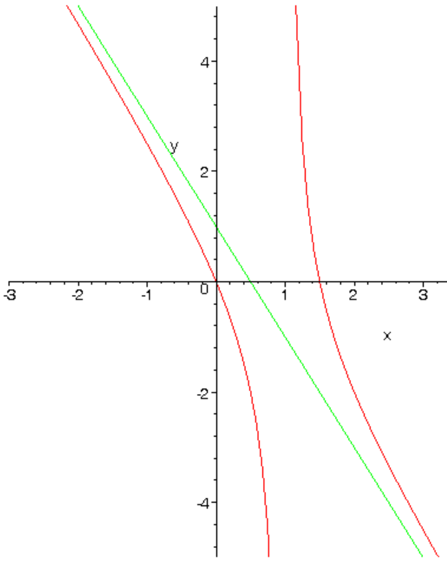
En $+\infty$ et en $-\infty$, $\frac{1}{x-1}$ tend vers 0, on a une asymptote D d'équation $y=-2x+1$.

c. Lorsque $x > 1$, $\frac{1}{x-1}>0$ donc C est au-dessus de D, lorsque $x < 1$, $\frac{1}{x-1}<0$ donc C est en dessous de D.

3. $f'(x)=\frac{(-4x+3)(x-1)-(-2x^2+3x)(1)}{(x-1)^2}=\frac{-4x^2+7x-3+2x^2-3x}{(x-1)^2}=\frac{-2x^2+4x-3}{(x-1)^2}$. Le discriminant est négatif, f' est du signe de -2, soit négative.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	||	$-$
f	$+\infty \searrow -\infty$	||	$+\infty \searrow -\infty$

4.



3-23 : Rationnelles 8

1. Etudier les variations de la fonction $f(x)=\frac{x^3}{(x-1)^2}$.

2. Montrer que $f(x)=x+2+\frac{3x-2}{(x-1)^2}$. Etudier la position de la courbe (C) de f par rapport à la droite (D) d'équation $y=x+2$.

3. En quel(s) point(s) la tangente à (C) est elle parallèle à (D) ?

4. Tracer cette (ces ?) tangente(s), (D) puis (C).

5. Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation $f(x)=x+p$ où $p\in\mathbb{R}$.

6. Résoudre la question précédente par le calcul.

7. Lorsqu'il y a deux solutions, il y a deux points d'intersection entre la droite $y=x+p$ et (C). Déterminer l'abscisse du point P, milieu de ces deux points d'intersection.

Correction

1. La fonction f est dérivable sur son domaine de définition comme fonction rationnelle.

$$f'(x)=\frac{3x^2\times(x-1)^2-x^3\times2\times1\times(x-1)^1}{(x-1)^4}=\frac{3x^2(x-1)-2x^3}{(x-1)^3}=\frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$$

La dérivée dépend du signe de (x-3) / (x-1), les autres facteurs étant positifs.

x	$-\infty$		1	‖		3		$+\infty$
$f'(x)$		+		‖	−		+	
$f(x)$		↗		‖	↘	$\frac{27}{4}$	↗	

2. On peut par exemple effectuer la division des polynômes :