Contrôle Continu

Mathématiques pour la Physique

15 Mars 2018, 10h00 - 11h00, année universitaire 2017-2018.

Durée : 1 heure.

Remarques générales : Aucun document écrit ni calculatrice ne sont admis. L'usage des téléphones portables est interdit et ces téléphones doivent être éteints et ne doivent pas être posés sur la table.

Toutes les réponses doivent être clairement justifiées et, lors de la correction, une attention particulière sera prêtée à la qualité de la rédaction.

Le sujet comporte deux pages et les exercices sont indépendants.

* * *

1. Questions de cours

- a) Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ de dimension finie. Soit $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F . Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$. Montrez que l'image par φ d'une famille génératrice de E est une famille génératrice de $\text{Im}\varphi$.
- b) Donnez l'expression du déterminant d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si vous développez par rapport à la i -ème ligne. On prendra soin de préciser toutes les notations.

* * *

2. Applications linéaires et matrices

On considère l'application φ telle que:

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}_2[X] &\longrightarrow \mathbb{R}_2[X] \\ P &\longmapsto P + (1 - X)P' \end{aligned}$$

où P' désigne le polynôme dérivé de P .

- a) Montrez que φ est une application linéaire.
- b) Ecrivez la matrice A qui représente l'application linéaire φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ (qui est la base de départ et d'arrivée).
- c) Quel est le rang de la matrice A ? En déduire le rang de φ puis la dimension de $\text{Ker}(\varphi)$. Justifiez la réponse.
- d) Déterminez une base de $\text{Ker}(\varphi)$.
- e) Soit $Q \in \text{Im}(\varphi)$. On pose $Q = \varphi(P)$ avec $P(X) = aX^2 + bX + c$ où a, b, c sont 3 nombres réels. Calculez Q en fonction de a, b et c .
- f) Déduisez-en que $\text{Im}(\varphi) \oplus \text{Ker}(\varphi) = \mathbb{R}_2[X]$.

* * *

3. Produit scalaire

Soit $\langle . | . \rangle$ l'application de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définie par:

$$\text{Si } u = (x, y, z) \text{ et } v = (x', y', z') , \langle u | v \rangle = (x + y + z)(x' + y' + z') + (y + z)(y' + z') + zz'$$

- a) On admet que $\langle . | . \rangle$ est bilinéaire. Vérifiez les autres propriétés pour justifier que $\langle . | . \rangle$ est un produit scalaire.
- b) Montrez que la base canonique de $\mathbb{R}^3$ n'est pas orthonormée pour ce produit scalaire.
- c) Déterminez par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ relativement au produit scalaire $\langle . | . \rangle$, en prenant la base canonique comme base de départ.