Courigée des exercices de TD N1

La série TD1

Nombres réels et complexes

Exercise 1 *Soit $A, B \subset \mathbb{R}$ deux ensembles non vides. On pose*

$$-A = \{-x \quad x \in A\} \qquad A + B = \{z = x + y \quad x \in A \ y \in B\}$$

$$A - B = \{z = x - y \quad x \in A \ y \in B\}$$

$$AB = \{z = xy \quad x \in A \ y \in B\} \qquad 1/A = \{z = 1/x \in A \text{ tel que } x \neq 0\}$$

Prouver que

$$\begin{aligned}
&\sup(-A) = -\inf(A), \quad \inf(-A) = -\sup(A) \\
&\sup(A+B) = \sup A + \sup B, \inf(A+B) = \inf A + \inf B \\
&\sup(AB) = \sup A \sup B \quad \text{pour } A \subset \mathbb{R}_+, B \subset \mathbb{R}_+ \\
&\sup\left(\frac{1}{A}\right) = \frac{1}{\inf(A)} \ \text{pour } A \subset \mathbb{R}_+
\end{aligned}$$

Exercise 2 *Trouver la borne supérieure et la borne inférieure des ensembles suivants lorsque'il existent*

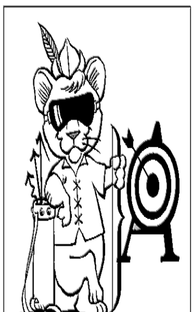
$$A = \{x \in \mathbb{R}; x^2 + x + 1 > 0\}, \quad B = \left\{2^x + 2^{(1/x)}, x > 0\right\}$$

$$C = \left\{2(-1)^{n+1} + (-1)^{n(n+1)/2}\left(2 + \frac{3}{n}\right), n \in \mathbb{N}\right\}, D = \left\{\frac{n-1}{n+1}\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) \ n \in \mathbb{N}\right\}$$

$$E = \left\{x = \frac{2p^2 - 3q}{p^2 + q}, p, q \in \mathbb{Z} \quad 0 < p < q\right\}$$

Montrer que

$$\sup\left\{x \in \mathbb{Q}; x > 0, x^2 < 2\right\} = \sqrt{2} \ \text{dans } \mathbb{R}$$



Exercise 3 *1. Résoudre l'équation suivante*

$$\left[\sqrt{3x^2+1}\right]=4$$

2. Démontrer qu'il existe un entier k avec $0 \leq k \leq p-1$ tel que

$$[px]=p\,[x]+k$$

3. Soit q un entier tel que $0 \leq q \leq p-1$. Comparer

$$\left[x+\frac{q}{p}\right] \;\; et \;\; [x]$$

4. En déduire que

$$\sum_{q=0}^{p-1}\left[x+\frac{q}{p}\right]=[px]$$

Exercise 4 *Soient $a_1\ a_2\ a_3 \ldots a_n \in \mathbb{R}, b_1\ b_2\ b_3 \ldots b_n \in \mathbb{R}^*$vérifier chacune des inegalités suivantes*

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n}|a_k|\,; \quad \max_{k=1,n}|a_k| \leq \left[\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2\right]^{1/2} \leq \sum_{k=1}^{n}|a_k| \leq n\max_{k=1,n}|a_k|$$

Soit

$$S\left(x\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(a_k+b_kx\right)^2$$

Montrer que le discriminant de cette équation du second degré est négatif ou nul. En déduire que

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_kb_k\right| \leq \left[\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right]^{1/2}\left[\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right]^{1/2} \; (l'\text{inégalité de Cauchy})$$

et

$$\left[\sum_{k=1}^{n}\left(a_k+b_k\right)^2\right]^{1/2} \leq \left[\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right]^{1/2}+\left[\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right]^{1/2}$$

Exercise 5 *Montrer par récurrence que*

$$\left(x+y\right)^n=\sum_{k=0}^{n} C_n^k\; x^{n-k}y^k,$$

Calculons les deux sommes suivantes :

$$S = \sum_{k=0}^{n} k C_n^k \qquad T = \sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k$$

Résoudre dans $\mathbb{C}$ *les équations suivantes*

$$z^2 + (1-2i)\,z + 5i + 1 = 0, \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^3 + \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 = 0$$

Expliciter la formule du binôme pour $n = 3$ *A l'aide de la formule d'Euler et de la formule précédente, exprimer* $\cos^3(\theta)$ *et* $\sin^3(\theta)$ *en fonction de*

$$\sin(k\theta) \;\; et \;\; \cos(k\theta) \;\; k = 1; 3$$

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ *on pose*

$$Z_n = \sum_{k=0}^{n} e^{k\theta i}$$

Simplfiér l'expression de Z_n. *En déduire des expressions simples de :*

$$\begin{aligned} C_n &= \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) \;\; et \;\; S_n = \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta) \\ D_n(\alpha) &= \sum_{k=0}^{n} \cos(\alpha + k\theta) \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 1

Définition 6 (Borne supérieure et inférieure) *M est la borne supérieure de A si et seulement si*

1. $\forall x \in A, \; x \leq M$
2. $\forall \lambda, \lambda < M$, *alors* $\exists x \in A, \; \lambda < x$

m est la borne inférieure de A si et seulement si

1. $\forall x \in A, \; m \leq x$
2. $\forall \lambda, m < \lambda$, *alors* $\exists x \in A, \; x < \lambda$

Proposition 7 (Caractérisation de la borne supérieure) *La borne supérieure M d'une partie A de $\mathbb{R}$ est caractérisée par :*

$$\forall x \in A, x \leq M \;\; et \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists x \in A \;, M - \varepsilon \leq x_\varepsilon \leq M$$

La première relation exprime que M est un majorant de A. La deuxième signifie qu'un nombre strictement plus petit que M n'est pas majorant de A. Cela équivaut à dire que tout majorant de A est supérieur ou égal à M.

Proposition 8 (Caractérisation de la borne inférieure) *La borne inférieure m d'une partie A de $\mathbb{R}$ est caractérisée par :*

$$\forall x \in A, x \geq m \ \textit{et} \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists x_\varepsilon \in A \ , \ m \leq x_\varepsilon \leq m + \varepsilon$$

<u>Méthode 1</u>

Soit $A \subset \mathbb{R}$ tel que

$$-A = \{-x \quad x \in A \ \}$$

Montrons que

$$\sup(-A) = -\inf(A) \, , \quad \inf(-A) = -\sup(A)$$

On suppose que A est minoré et on pose $a = \inf(A)$. On a

$$x \geq a \ \text{ pour } \ \text{tout} \ \ x \in A \tag{1}$$

pour tout

$$\varepsilon > 0, \ \text{il existe} \quad x^* \in A \quad \text{tel que } x^* < a + \varepsilon \tag{2}$$

En multipliant les inégalités données en (1) et (2) par -1, on obtient

$$-x \leq -a \ \text{ pour } \ \text{tout} \ \ x \in A$$

$$\varepsilon > 0, \ \textit{il existe } x^* \in -A \quad \text{tel que } x^* < -a - \varepsilon$$

Donc

$$\sup(-A) = -a = -\inf(A)$$

Donc,$\sup(-A) = -a$. Si A n'est pas minoré, alors$-A$ n'est pas majoré et

$$\sup(-A) = -\inf(A)$$

$\sup(-A) = -\inf(A) = +\infty$. L'autre égalité $\inf(-A) = -\sup(A)$ s'obtient de la même façon. On pose $\beta = \sup(A)$. On a

$$x \leq \beta \ \text{ pour } \ \text{tout} \ \ x \in A \tag{1}$$

pour tout

$$\varepsilon > 0,\ \text{il existe} \quad x^* \in A \quad \text{tel que } x^* > a - \varepsilon \tag{2}$$

En multipliant les inégalités données en (1) et (2) par -1, on obtient

$$-x \geq -\beta \ \text{ pour } \ \text{tout } \ x \in A$$

$$\varepsilon > 0,\ \textit{il existe } x^* \in -A \quad \text{tel que } x^* > -a + \varepsilon$$

Donc

$$\inf(-A) = -\sup(A)$$

<u>2^{em}**Méthode**</u>

$$\sup(-A) = -\inf(A)$$

on a

$$-A = \{-x |\, x \in A\}$$

Pour tout $x \in A$ on a

$$\inf(A) \leq x$$

danc

$$-x \leq -\inf(A)$$

alors

$$\sup(-A) \leq -\inf(A)$$

De même pour tout $x \in A$

$$-x \leq \sup(-A)$$

donc

$$-\sup(-A) \leq x$$

d'où

$$\sup(-A) \geq -\inf(A)$$

On a donc finalement

$$\sup(-A) = -\inf(A)$$

Pour

$$\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$$

On a

$$A + B = \{x + y |\, x \in A, y \in B\}$$

Pour tout $(x, y) \in A \times B$

$$x \leq \sup(A) \quad , \; y \leq \sup(B) \Rightarrow x + y \leq \sup(A) + \sup(B)$$

donc $\sup(A) + \sup(B)$ est un majoron de l'ensemble $A + B$ et par définition de la borne supérieure est le plus petit des majorns d'ou

$$\sup(A + B) \leq \sup(A) + \sup(B) \tag{I}$$

De même pour tout $(x, y) \in A \times B$

$$x + y \leq \sup(A + B) \Rightarrow x \leq \sup(A + B) - y$$

donc $\sup(A) + \sup(B) - y$ est un majoron de l'ensemble A et par définition de la borne supérieure est le plus petit des majorns d'ou

$$\sup(A) \leq \sup(A + B) - y \Rightarrow y \leq \sup(A + B) - \sup(A)$$

de même pour

$$\sup(B) \leq \sup(A + B) - \sup(A)$$

alors

$$\sup(B) + \sup(A) \leq \sup(A + B) \tag{II}$$

de (I) et (II) on déduit que

$$\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$$

De même on a pour tout $(x, y) \in A \times B$

$$x + y \geq \inf(A) + \inf(B)$$

d'ou

$$\inf(A + B) \geq \inf(A) + \inf(B) \tag{A}$$

De plus pour tout $(x, y) \in A \times B$

$$x + y \geq \inf(A + B) \Rightarrow x \geq \inf(A + B) - y$$

alors

$$\inf(A) \geq \inf(A + B) - y \Rightarrow y \geq \inf(A + B) - \inf(A)$$

donc

$$\inf(B) \leq \inf(A + B) - \inf(A)$$

alors

$$\inf(B) + \inf(A) \leq \inf(A+B) \tag{AA}$$

de (A) et (AA) on déduit que

$$\inf(A+B) = \inf(A) + \inf(B)$$

2^{em}**Méthode**

On suppose que A et B sont majorés et on pose $a = \sup(A)$, $b = \sup(B)$; a est alors un majorant de A, b un majorant de B et $a+b$ est un majorant de $A+B$. De plus, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x^* \in A$ et $y^* \in B$ tels que $x^* > a - \varepsilon$ et $y^* > b - \varepsilon$. Donc,

$$x^* + y^* > a + b - 2\varepsilon$$

Puisque

$$z^* = x^* + y^* \in A + B,$$

l'égalité

$$a + b = \sup(A+B)$$

est donc prouvée. Si A ou B n'est pas majoré, alors $A+B$ est aussi non-majoré et, par définition de la borne supérieure,

$$\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B) = +\infty.$$

Pour tout $(x, y) \in A \times B$ tel que $A \subset \mathbb{R}_+,\ B \subset \mathbb{R}_+$

$$\sup(AB) = \sup(A)\sup(B)$$

On a

$$AB = \{xy |\, x \in A, y \in B\}$$

Pour tout $(x, y) \in A \times B$

$$xy \leq \sup(A)\sup(B)$$

donc

$$\sup(AB) \leq \sup(A)\sup(B) \tag{b}$$

De plus, pour $(x, y) \in A \times B$

$$xy \leq \sup(AB)$$

Soit $y \in B$,$y \neq 0$ on a pour $x \in A$

$$x \leq \frac{\sup(AB)}{y} \Rightarrow \sup(A) \leq \frac{\sup(AB)}{y} \Rightarrow y \leq \frac{\sup(AB)}{\sup(A)}$$

Cette inégalité étant également vraie si $y = 0$, on a

$$\sup(B)\sup(A) \leq \sup(AB) \tag{bb}$$

de (b) et (b) on déduit que

$$\sup(B)\sup(A) = \sup(AB)$$

De meme pour

$$\inf(AB) = \inf(A)\inf(B)$$

Dans le cas général, on n'a pas

$$\sup(B)\sup(A) = \sup(AB)$$

prendre $B = A = [-1, 0]$ alors que $\sup(B) = \sup(A) = 0$ et $\sup(AB) = 1$ en effet

$$0 \leq xy \leq 1$$

Pour

$$\sup\left(\frac{1}{A}\right) = \frac{1}{\inf(A)}$$

Si $a' = \inf(A) > 0$. Pour tout $x \in A$, l'inégalité $x \geq a'$ est équivalente à

$$\frac{1}{x} \leq \frac{1}{a'}$$

Donc $\frac{1}{a'}$ est un majorant de $\frac{1}{A}$. De plus, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x* \in A$ tel que $x^* < a' + \varepsilon$. D'où,

$$\frac{1}{x^*} > \frac{1}{a'+\varepsilon} = \frac{1}{a'}\left(1 - \frac{\varepsilon}{a'+\varepsilon}\right) = \frac{1}{a'} - \frac{\varepsilon}{a'(a'+\varepsilon)}$$

Puisque l'on peut rendre $\frac{\varepsilon}{a'(a'+\varepsilon)}$ arbitrairement petit, $\frac{1}{a'}$ est la borne supérieure de $\frac{1}{A}$. On considère maintenant le cas où $a' = 0$ L'ensemble $\frac{1}{A}$ est alors non-borné (en en effet, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x^* \in \frac{1}{A}$ tel que A tel que $x^* > \frac{1}{\varepsilon}$ et $\sup\left(\frac{1}{A}\right) = +\infty$

Corrigé de l'exercice 2

Pour

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R}; x^2 + x + 1 > 0 \right\}$$

on a A n'est pas majoré en effet la fonction

$$f(x) = x^2 + x + 1$$

est toujours positive donc

$$A = \mathbb{R} \Rightarrow \sup(A) = +\infty \ et \ \inf(A) = -\infty$$

si on pose

$$A' = \left\{ x \in \mathbb{R}; x^2 + x + 1 \right\}$$

Alors pour calcule les deux bornes inf *et* sup il faut étudie les variation de la fonction f.On a

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$$

Pour calcle $\inf(A)$ on a

$$f'(x) = 2x + 1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

alors

$$\inf(A) = \min(A) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} \quad et \quad \sup A = +\infty$$

Pour

$$B = \left\{ 2^x + 2^{(1/x)}, x > 0 \right\}$$

Montron que inf existe on remarque que pour tout $a, b > 0$

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}$$

donc si on pose $a = 2^x, b = 2^{(1/x)}$ on obtien

$$2^x + 2^{(1/x)} \geq 2\sqrt{2^{x+1/x}}$$

on peut néglige x devant $1/x$ dans l'intervalle $]0, 1[$ et $1/x$ devant x dans l'intervalle $[1, +\infty[$. On cherche à minoré

$$\sqrt{2^{x+1/x}}$$

on a la fonction

$$g\left(x\right)=x+1/x\Rightarrow g'\left(x\right)=1-1/x^{2}$$

est dicroissente dans $]0,1[$ est croissente dans $[1,+\infty[$ alors la fonction

$$\sqrt{2^{x+1/x}}$$

est dicroissente dans $]0,1[$ est croissente dans $[1,+\infty[$ d'où

$$\min_{x\in\mathbb{R}_{+}^{*}}\left(\sqrt{2^{x+1/x}}\right)=\left(\sqrt{2^{1+1/1}}\right)=2$$

donc

$$2^{x}+2^{(1/x)}\geq 4$$

alors l'ensemble B est minoré donc la borne inférieur existe et

$$\inf\left(B\right)=4$$

en effet soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_{+}^{*}$

$$f\left(x\right)=2^{x}+2^{(1/x)}$$

alors

$$f'\left(x\right)=\ln\left(2\right)\left[2^{x}-\frac{1}{x^{2}}2^{(1/x)}\right]$$

la résolution de l'équation

$$f'\left(x\right)=\ln\left(2\right)\left[2^{x}-\frac{1}{x^{2}}2^{(1/x)}\right]=0$$

donne $x=1$ alors le point $x=1$ est un point critique donc si

$$\begin{cases} f''\left(1\right)>0\Rightarrow f\left(1\right)\text{ est le minimum}\\ \\ f''\left(1\right)<0\Rightarrow f\left(1\right)\text{ est le maximum}\end{cases}$$

On a

$$\begin{aligned} f''\left(x\right) &= \ln\left(2\right)\left[\ln\left(2\right)2^{x}-\left[-\frac{2}{x^{3}}2^{(1/x)}-\frac{1}{x^{4}}2^{(1/x)}\right]\right]\\ &= \ln\left(2\right)\left[\ln\left(2\right)2^{x}+\left(\frac{2}{x^{3}}+\frac{1}{x^{4}}\right)2^{(1/x)}\right]\end{aligned}$$

On a $f''(1) > 0 \Rightarrow f(1) = 4$ est le minimum donc

$$\inf(B) = \min(B) = 4$$

pour la borne supérieur l'ensemble B n'est pas majoré $\sup B = +\infty$

Pour

$$C = \left\{ 2(-1)^{n+1} + (-1)^{n(n+1)/2}\left(2 + \frac{3}{n}\right), n \in \mathbb{N} \right\}$$

On pose

$$v_n = 2(-1)^{n+1} + (-1)^{n(n+1)/2}\left(2 + \frac{3}{n}\right)$$

on a

$$-1 \leq (-1)^{n+1} \leq 1 \Rightarrow -2 \leq 2(-1)^{n+1} \leq 2$$

de même pour

$$-1 \leq (-1)^{n(n+1)/2} \leq 1$$

alors

$$-\left(2 + \frac{3}{n}\right) \leq (-1)^{n(n+1)/2}\left(2 + \frac{3}{n}\right) \leq \left(2 + \frac{3}{n}\right)$$

donc

$$\inf_{n\in\mathbb{N}^*}\left[-\left(2 + \frac{3}{n}\right)\right] \leq -\left(2 + \frac{3}{n}\right) \leq (-1)^{n(n+1)/2}\left(2 + \frac{3}{n}\right) \leq \left(2 + \frac{3}{n}\right) \leq \sup_{n\in\mathbb{N}^*}\left(2 + \frac{3}{n}\right)$$

d'ou

$$\inf_{n\in\mathbb{N}^*}\left[-\left(2 + \frac{3}{n}\right)\right] \leq -\left(2 + \frac{3}{n}\right) \leq (-1)^{n(n+1)/2}\left(2 + \frac{3}{n}\right) \leq \left(2 + \frac{3}{n}\right) \leq \sup_{n\in\mathbb{N}^*}\left(2 + \frac{3}{n}\right)$$

on la suite $-\left(2 + \frac{3}{n}\right)$ est croissente donc

$$\inf_{n\in\mathbb{N}^*}\left[-\left(2 + \frac{3}{n}\right)\right] = -\left(2 + \frac{3}{1}\right) = -5$$

et la suite $\left(2 + \frac{3}{n}\right)$ est décroissante alors

$$\sup_{n\in\mathbb{N}^*}\left(2 + \frac{3}{n}\right) = \left(2 + \frac{3}{1}\right) = 5$$

ansi

$$-5 \leq (-1)^{n(n+1)/2}\left(2 + \frac{3}{n}\right) \leq 5$$

et

$$-2 \leq 2(-1)^{n+1} \leq 2$$

d'ou

$$-7 < v_n \leq 7$$

Alors les bornes sup et inf existent. Pour les calcules on pose

$$D_n = 2(-1)^{n+1}, s_n = \left(2 + \frac{3}{n}\right), T_n = (-1)^{n(n+1)/2}$$

et on cherche le maximum des trois suites on a

$$\max_{n\in\mathbb{N}} D_n = \max_{n\in\mathbb{N}} \left[2(-1)^{n+1}\right] \Rightarrow n = 2k+1, \qquad k \in \mathbb{N}$$

donc

$$S_{2k+1} = \left(2 + \frac{3}{2k+1}\right) \ \ et \ \ T_{2k+1} = (-1)^{(2k+1)(k+1)}$$

on remarque que la suite s_{2k+1} et décroissent donc

$$k = 0 \ \ ou \ k = 1$$

mais on a pour

$$k = 0 \Rightarrow \ T_{2k+1} = -1$$

donc

$$\max_{k\in\mathbb{N}} [T_{2k+1} \ S_{2k+1}] = 3$$

alors

$$\max_{n\in\mathbb{N}} [v_n] = 5$$

Pours la borns inferieur on a

$$\min_{n\in\mathbb{N}} D_n = \min_{n\in\mathbb{N}} \left[2(-1)^{n+1}\right] = -1 \Rightarrow n = 2k, \qquad k \in \mathbb{N}^*$$

donc

$$S_{2k} = \left(2 + \frac{3}{2k}\right) \ \ et \ \ T_{2k} = (-1)^{(2k+1)k}$$

alors si

$$\begin{cases} k = 2l \Rightarrow \ S_{4l} = \left(2 + \dfrac{3}{4l}\right) \ et \ T_{4l} = (-1)^{2(4l+1)l} = 1 \\ \\ k = 2l+1 \Rightarrow S_{4l+2} = \left(2 + \dfrac{3}{4l+2}\right) \ et \ T_{4l+2} = (-1)^{(4l+3)(2l+1)} = -1 \end{cases}$$

on remarque que la suite

$$T_{4l+2}\ S_{4l+2} = -\left(2+\frac{3}{4l+2}\right)$$

et croissent donc

$$\min_{l\in\mathbb{N}}\left[T_{4l+2}\ S_{4l+2}\right] = \min_{l\in\mathbb{N}}\left[-\left(2+\frac{3}{4l+2}\right)\right] = -\left(2+\frac{3}{2}\right) = -\frac{7}{2}$$

d'ou

$$\min_{n\in\mathbb{N}^*} v_n = \min_{n\in\mathbb{N}^*}\left[2\left(-1\right)^{n+1}\right] + \min_{n\in\mathbb{N}^*}\left[\left(-1\right)^{n(n+1)/2}\left(2+\frac{3}{n}\right)\right] = -2-\frac{7}{2} = -\frac{11}{2}$$

Pour

$$D = \left\{\frac{n-1}{n+1}\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)\ n\in\mathbb{N}\right\}$$

On pose

$$v_n = \frac{n-1}{n+1}\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)$$

on a

$$\begin{cases} n=1 \Rightarrow \cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2} \\ n=2 \Rightarrow \cos\left(\dfrac{4\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2} \\ n=3 \Rightarrow \cos\left(2\pi\right) = 1 \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} n=3k \Rightarrow \cos\left(2\pi\right) = 1,\ \ k\in\mathbb{N} \\ \\ n=3k+1 \Rightarrow \cos\left(\dfrac{2\left(3k+1\right)\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2},\quad k\in\mathbb{N} \\ \\ n=3k+2 \Rightarrow \cos\left(\dfrac{2\left(3k+1\right)\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2}, k\in\mathbb{N} \end{cases}$$

alors

$$D = \left\{\frac{3k-1}{3k+1}, k\in\mathbb{N}\right\} \cup \left\{-\frac{3k}{6k+4}, k\in\mathbb{N}\right\} \cup \left\{-\frac{3k+1}{6k+6}, k\in\mathbb{N}\right\}$$

De plus on a

$$\sup\left(A\cup B\right) = \sup\left(\sup A, \sup B\right), \inf\left(A\cup B\right) = \inf\left(\inf A, \inf B\right)$$

d'ou

$$\inf(D) = \inf\left(\inf_{k\in\mathbb{N}}\left(\frac{3k-1}{3k+1}\right), \inf_{k\in\mathbb{N}}\left(-\frac{3k}{6k+4}\right), \inf_{k\in\mathbb{N}}\left(-\frac{3k+1}{6k+6}\right)\right) = -\frac{1}{2},$$

$$\sup(D) = \sup\left(\sup_{k\in\mathbb{N}}\left(\frac{3k-1}{3k+1}\right), \sup_{k\in\mathbb{N}}\left(-\frac{3k}{6k+4}\right), \sup_{k\in\mathbb{N}}\left(-\frac{3k+1}{6k+6}\right)\right) = 1$$

Pour

$$E = \left\{x = \frac{2p^2-3q}{p^2+q}, p, q \in \mathbb{Z} \ \ 0 < p < q\right\}$$

On a

$$0 < p < q \Longleftrightarrow \ 0 < \frac{p}{q} < 1$$

et

$$x = \frac{2p^2-3q}{p^2+q} = \frac{2(p^2+q)-5q}{p^2+q} = 2 - \frac{5q}{p^2+q} = 2 - \frac{5}{\frac{p^2}{q}+1}$$

On pose

$$x(t) = 2 - \frac{5}{t+1} \quad \text{tel que } t = \frac{p^2}{q} > 0$$

Nous pouvons tenter de déterminer la $\sup\limits_{t>0}(x(t))$ et $\inf\limits_{t>0}(x(t))$. Ainsi la dérive est

$$x'(t) = \frac{5}{(t+1)^2} > 0 \ \forall t \in D_{x(t)} =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$$

alors

$$\sup_{t>0}(x(t)) = \lim_{t\to+\infty} x(t) = 2 \text{ et } \inf_{t>0}(x(t)) = \lim_{t\to 0} x(t) = -3$$

car $x(t)$ est une fonction croissante donc

$$-3 < 2 - \frac{5}{\frac{p^2}{q}+1} < 2$$

Montrons que $\sup E = 2$ on a

$$\forall x \in E, x \leq 2 \text{ et } \forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in E \ , \ 2-\varepsilon < x$$

ce qui équivaut

$$\forall p, q \in \mathbb{N}^* \ \frac{2p^2-3q}{p^2+q} \leq 2 \tag{1}$$

et

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ (p_0, q_0) \ \in \mathbb{N}^2 - \{(0,0)\}\,, \ \frac{2p_0^2 - 3q_0}{p_0^2 + q_0} - \varepsilon \leq 2 \ \text{ tel que } 0 < p_0 < q_0 \quad (2)$$

On a (1) est évident. Pour (2) soit $\varepsilon > 0$ tel que

$$2 - \varepsilon \leq 2 - \frac{5}{\dfrac{p_0^2}{q_0} + 1}$$

donc

$$\varepsilon \geq \frac{5}{\dfrac{p_0^2}{q_0} + 1} \Rightarrow \frac{p_0^2}{q_0} + 1 \geq \frac{5}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{p_0^2}{q_0} \geq \frac{5}{\varepsilon} - 1$$

Il suffit de choisir $q_0 = 2p_0$ alors

$$\frac{p_0}{2} > \frac{5}{\varepsilon} - 1 \Rightarrow p_0 > \frac{10}{\varepsilon} - 2$$

donc on peut prendre

$$p_0 = \left[\frac{10}{\varepsilon} - 2\right] + 1$$

alors

$$\exists \ (p_0, q_0) \ \in \mathbb{N}^2 - \{(0,0)\}\,, \ \frac{2p_0^2 - 3q_0}{p_0^2 + q_0} - \varepsilon \leq 2 \ \text{ tel que } 0 < p_0 < q_0$$

d'ou

$$\sup E = 2$$

Montrons que $\inf E = -3$ alors

$$\forall x \in E, x \geq -3 \text{ et } \forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in E \ , \ -3 + \varepsilon > x$$

ce qui équivaut

$$\forall p, q \in \mathbb{N}^* \ \frac{2p^2 - 3q}{p^2 + q} \geq -3 \quad (3)$$

et

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ (p_0, q_0) \ \in \mathbb{N}^2 - \{(0,0)\}\,, \ 2 - \frac{5}{\dfrac{p_0^2}{q_0} + 1} + \varepsilon \geq -3 \ \text{ tel que } 0 < p_0 < q_0 \quad (4)$$

On a (3) est évident. Pour (4) soit $\varepsilon > 0$ tel que

$$2 - \frac{5}{\frac{p_0^2}{q_0} + 1} + \varepsilon \geq -3$$

donc

$$5 + \varepsilon \geq \frac{5}{\frac{p_0^2}{q_0} + 1} \iff \frac{p_0^2}{q_0} \geq \frac{5}{5+\varepsilon} - 1$$

Nous choisissions $q_0 = 2p_0$

$$p_0 \geq \frac{5}{10 + 2\varepsilon} - \frac{1}{2}$$

donc on peut prendre

$$p_0 = \left[\frac{5}{10 + 2\varepsilon} - \frac{1}{2}\right] + 1$$

alors

$$\exists \ (p_0, q_0) \ \in \mathbb{N}^2 - \{(0,0)\}, \ \ 2 - \frac{5}{\frac{p_0^2}{q_0} + 1} + \varepsilon \geq -3 \ \text{ tel que } 0 < p_0 < q_0$$

D'où l'on déduit que

$$\inf E = -3$$

Montrons que

$$\sup\left\{x \in \mathbb{Q}; x > 0, x^2 < 2\right\} = \sqrt{2}$$

Proposition 9 *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ si M est un majorant de A tel que*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists x_\varepsilon \in A \ , M - \varepsilon \leq x_\varepsilon$$

alors $M = \sup(A)$

Soit

$$A = \left\{x \in \mathbb{Q}; x > 0, x^2 < 2\right\}$$

et $M = \sup(A)$ On peut supposer que $M > 0$. On va prouver que, pour tout $\varepsilon > 0$ on a

$$(M - \varepsilon)^2 \leq 2 \leq (M + \varepsilon)^2 \tag{5}$$

On pose $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$ puisque $M - \dfrac{1}{n}$ n'est pas un majorant de A,donc il existe $x_\varepsilon \in A$ tel que

$$M - \frac{1}{n} \leq x_\varepsilon \Rightarrow \left(M - \frac{1}{n}\right)^2 < x_\varepsilon^2 < 2$$

Supposons que $\left(M + \dfrac{1}{n}\right)^2 < 2$. Si M est rationnel, alors $M + \dfrac{1}{n} \in A$, ce qui contredit le fait que $M = \sup A$.Si M est irrationnel, alors

$$[(n+1)\, M] \leq (n+1)\, M < [(n+1)\, M] + 1$$

donc

$$\frac{[(n+1)\, M]}{(n+1)} \leq M < \frac{[(n+1)\, M]}{(n+1)} + \frac{1}{(n+1)} < M + \frac{1}{n}$$

alors

$$w = \frac{[(n+1)\, M]}{(n+1)} + \frac{1}{(n+1)}$$

est un nombre rationnel tel que

$$w^2 \leq \left(M + \frac{1}{n}\right)^2 \ \ et \ \ w \in A$$

contradiction le fait que $M = \sup A$. On a ainsi prouvé que

$$\left(M + \frac{1}{n}\right)^2 \geq 2$$

L'inégalité de gauche de (5) implique

$$\left(M - \frac{1}{n}\right)^2 = M^2 - \frac{2}{n}M + \frac{1}{n^2} \leq 2$$

alors

$$M^2 - \frac{2}{n}M < M^2 - \frac{2}{n}M + \frac{1}{n^2} \leq 2$$

ce qui donne

$$\frac{M^2 - 2}{2M} < \frac{1}{n}$$

En faisant tendre$n$ vers $+\infty$, on obtient $M^2 - 2 \leq 0$. Comme ci-dessus, l'inégalité de droite de (5) donne

$$\frac{M^2 - 2}{2M} > -\frac{1}{n}$$

ce qui implique $M^2 - 2 \geq 0$. Donc, $M = 2$.

Corrigé de l'exercice 3

La résolution de l'équation

$$\left[\sqrt{3x^2+1}\right] = 4$$

On a

$$\left[\sqrt{3x^2+1}\right] \leq \sqrt{3x^2+1} < \left[\sqrt{3x^2+1}\right] + 1$$

donc

$$4 \leq \sqrt{3x^2+1} < 5$$

alors

$$16 \leq 3x^2 + 1 < 25 \Rightarrow 15 \leq 3x^2 < 24 \Rightarrow 5 \leq x^2 < 8$$

donc

$$x^2 < 8 \Rightarrow x \in \left]-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right[\ \ et\ x^2 \geq 5 \Rightarrow x \in \left]-\infty, -\sqrt{5}\right] \cup \left[\sqrt{5}, +\infty\right[$$

d'ou l'ensemble des solution est

$$\left], -2\sqrt{2}, -\sqrt{5}\right] \cup \left[\sqrt{5}, 2\sqrt{2}, \right[$$

Théorème 10 (Division euclidienne) *Soit $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$. Il existe des entiers q, $r \in \mathbb{Z}$ tels que*

$$a = qb + r \ et \quad 0 \leq r < b$$

De plus q et r sont uniques.

Pour démontrer qu'il existe un entier $q \in \mathbb{N}$ tel que

$$[px] = p\,[x] + k \quad \ avec \quad 0 \leq k \leq p-1 \tag{6}$$

en utilisant tous simplement le théorème (10) avec

$$a = [px]\,, b = [x]$$

alors

$$[px] = l\,[x] + k$$

et on a

$$p\,[x] \leq px < p\,[x] + p$$

et la fonction $[x]$ est une fonction croissente donc

$$p\,[x] \leq [px] \leq p\,[x] + p$$

alors

$$p\,[x] \leq l\,[x] + k \leq p\,[x] + p$$

d'ou

$$[px] = p\,[x] + k \qquad\qquad 0 \leq k \leq p - 1$$

La comparaison entre

$$\left[x + \frac{q}{p}\right] \;\; et \;\; [x]$$

on a

$$[px] \leq px < [px] + 1 \tag{7}$$

on remplace (6) dans (7) on obtien

$$p\,[x] + k \leq px < p\,[x] + k + 1$$

donc

$$p\,[x] + k + q \leq px + q < p\,[x] + q + k + 1$$

alors

$$[x] + \frac{k+q}{p} \leq x + \frac{q}{p} < [x] + \frac{q+k+1}{p}$$

On observe deux cas

$$\frac{k+q}{p} < 1 \Rightarrow \left[x + \frac{q}{p}\right] = [x]$$

et

$$\frac{k+q}{p} \geq 1 \Rightarrow \left[x + \frac{q}{p}\right] = [x] + 1$$

Par suite

$$\sum_{q=0}^{p-1} \left[x + \frac{q}{p}\right] = \sum_{q=0}^{p-k-1} \left[x + \frac{q}{p}\right] + \sum_{q=p-k}^{p-1} \left[x + \frac{q}{p}\right]$$

On a

$$\begin{aligned} \frac{k+q}{p} &< 1 \Rightarrow q < p - k \Rightarrow \left[x + \frac{q}{p}\right] = [x] \\ \frac{k+q}{p} &\geq 1 \Rightarrow q \geq p - k \Rightarrow \left[x + \frac{q}{p}\right] = [x] + 1 \end{aligned}$$

alors

$$\sum_{q=0}^{p-k-1}\left[x+\frac{q}{p}\right]+\sum_{q=p-k}^{p-1}\left[x+\frac{q}{p}\right]=\sum_{q=0}^{p-k-1}[x]+\sum_{q=p-k}^{p-1}([x]+1)$$

$$=(p-k)[x]+(k)([x]+1)$$

$$=p[x]+k=[px]$$

Corrigé de l'exercice 4

Soient x, y deux nombre réel on a

$$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$$

$$\leq |x|^2+2|x||y|+|y|^2=(|x|+|y|)^2$$

alors

$$|x+y|\leq |x|+|y| \text{ Inégalité triangulaire}$$

Posons $x'=x$ et $y'=y-x$. Par inégalité triangulaire, on a

$$|y|\leq |x|+|y-x|$$

c'est-à-dire

$$|y|-|x|\leq |y-x|=|x-y|$$

De même

$$|x|-|y|\leq |y-x|$$

Finalement

$$||x|-|y||\leq |y-x|$$

Pour

$$\left|\sum_{i=1}^{n}x_i\right|\leq \sum_{i=1}^{n}|x_i|$$

En raisonnant par récurrence sur n et en utilisant inégalité triangulaire on montre facilement que

$$\left|\sum_{i=1}^{n}x_i\right|\leq \sum_{i=1}^{n}|x_i|$$

pour

$$\max_{i\in\{1,\cdots,n\}}\left(|x_i|\right) \leq \left[\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2\right]^{\frac{1}{2}} \leq \sum_{i=1}^{n}|x_i| \leq n \max_{i\in\{1,\cdots,n\}}\left(|x_i|\right)$$

On a

$$\exists j \in \{1,\cdots,n\}, \text{ tel que } \max\left(|x_i|\right) = |x_j|$$

donc

$$|x_j| \leq \left[\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

de plus on a

$$\sum\nolimits_{i=1}^{n}(x_i)^2 = \sum\nolimits_{i=1}^{n}|x_i|^2 \leq \sum\nolimits_{i=1}^{n}|x_i|^2 + 2\sum\nolimits_{1\leq i<j\leq n}|x_i|\,|x_j| = \left[\sum\nolimits_{i=1}^{n}|x_i|\right]^2$$

$$\Longrightarrow \left[\sum\nolimits_{i=1}^{n}(x_i)^2\right]^{\frac{1}{2}} \leq \sum\nolimits_{i=1}^{n}|x_i|$$

et

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i| \leq \sum_{i=1}^{n}\max_{i=1,,n}\left(|x_i|\right) = n \max_{i=1,,n}\left(|x_i|\right)$$

alors

$$\max_{i\in\{1,\cdots,n\}}\left(|x_i|\right) \leq \left[\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2\right]^{\frac{1}{2}} \leq \sum_{i=1}^{n}|x_i| \leq n \max_{i\in\{1,\cdots,n\}}\left(|x_i|\right)$$

Soit

$$S(x) = \sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k x)^2$$

Montrons que le discriminant de cette équation du second degré est négatif ou nul

$$S(x) = \sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k x)^2 = \left[\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right]x^2 + 2\left[\sum_{k=1}^{n}(a_k b_k)\right]x + \left[\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right]$$

On a $S(x)$ est une fonction pôlynomiale de degre 2 *et*

$$\sum_{k=1}^{n}b_k^2 > 0 \ et \ \sum_{k=1}^{n}a_k^2 > 0$$

vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R} \ S(x) \geq 0$$

alors

$$\triangle = \left[\sum_{k=1}^{n} (a_k b_k)\right]^2 - \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \leq 0$$

En déduire que

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leq \left[\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right]^{1/2} \left[\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right]^{1/2} \quad (l'\textit{inégalité de Cauchy}) \tag{8}$$

On a

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} a_k b_k + \sum_{k=1}^{n} b_k^2$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| + \sum_{k=1}^{n} b_k^2$$

Utilisons l'inégalité de Cauchy (8) on obtien

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2 \leq \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\left[\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right]^{1/2} \left[\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right]^{1/2} + \sum_{k=1}^{n} b_k^2$$

On pose

$$t = \left[\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right]^{1/2}, r = \left[\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right]^{1/2}$$

donc

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2 \leq t^2 + 2tr + r^2 = (t+r)^2$$

d'ou

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2 \leq \left[\left[\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right]^{1/2} + \left[\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right]^{1/2}\right]^2$$

finalement

$$\left[\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2\right]^{1/2} \leq \left[\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right]^{1/2} + \left[\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right]^{1/2}$$

Corrigé de l'exercice 5

Nous démenstrons la formule du binôme de Newton

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \; x^{n-k} y^k$$

par récurrence sur n

On a pour $n=0$

$$(x+y)^0 = 1 = C_0^0 \ x^0 y^{0-0} = 1$$

$\boxed{n \to n+1}$

$$(x+y)^{n+1} = (x+y)\,(x+y)^n = x\sum_{k=0}^{k=n} C_n^k \ x^k y^{n-k} + y\sum_{k=0}^{k=n} C_n^k \ x^k y^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k \ x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k \ x^k y^{n-k+1} = \sum_{k=1}^{k=n+1} C_n^{k-1} \ x^k y^{n-k+1} + \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k \ x^k y^{n-k+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{k=n} C_n^{k-1} \ x^k y^{n-k+1} + \sum_{k=1}^{k=n} C_n^k \ x^k y^{n-k+1} + C_{n+1}^{n+1} \ x^{n+1} y^0 + C_n^0 \ x^0 y^{n+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{k=n} \underbrace{\left(C_n^{k-1} + C_n^k\right)}_{C_n^k} x^k y^{n-k+1} + C_{n+1}^{n+1} \ x^{n+1} y^0 + C_n^0 \ x^0 y^{n+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{k=n+1} C_n^k \ x^k y^{n-k}$$

Exemple. Si on pose $x = y = 1$ dans la formule du binôme de Newton on obtien

$$2^n = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k$$

de même si on pose $x = -1$ $y = 1$ on obtien

$$\sum_{k=0}^{k=n} C_n^k \ (-1)^k = 0$$

Calculons les deux sommes suivantes :

$$\begin{aligned} S &= C_n^1 + 2C_n^2 \ + 3C_n^3 \ldots + nC_n^n \ = \sum_{k=0}^{n} kC_n^k \\ T &= C_n^1 + 4C_n^2 \ + 3C_n^3 \ldots + n^2 C_n^n \ = \sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k \end{aligned}$$

Première méthode : On utilise les propriétés des coefficients binomiaux que nous

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} kC_n^k &= \sum_{k=0}^{n} \frac{kn!}{k!\,(n-k)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!n}{(k-1)!\,(n-k)!} \\ &= n\sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} = n\sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1}\end{aligned}$$

on pose $j = k-1$ donc

$$n\sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} = n\sum_{j=0}^{n-1} C_{n-1}^{j} = n2^{n-1}$$

Première méthode : On utilise les propriétés des coefficients binomiaux que nous

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} kC_n^k &= \sum_{k=0}^{n} \frac{kn!}{k!\,(n-k)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!n}{(k-1)!\,(n-k)!} \\ &= n\sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} = n\sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1}\end{aligned}$$

on pose $j = k-1$ donc

$$n\sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} = n\sum_{j=0}^{n-1} C_{n-1}^{j} = n2^{n-1}$$

Seconde méthode : On utilise les propriétés des fonctions d'une variable réelle et la formule du binôme :

$$\frac{d}{dx}(x+1)^n = \frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{k=n} C_n^k\ x^k$$

alors

$$n\,(x+1)^{n-1} = \sum_{k=1}^{k=n} kC_n^k\ x^{k-1}$$

si je prends $x = 1$

$$n2^{n-1} = \sum_{k=1}^{k=n} kC_n^k$$

Pour

$$T = C_n^1 + 4C_n^2\ + 3C_n^3 \ldots + n^2C_n^n\ = \sum_{k=0}^{n} k^2C_n^k$$

On a

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k = \sum_{k=0}^{n} \left[k\left(k-1\right)C_n^k + kC_n^k\right] = \sum_{k=0}^{n} k\left(k-1\right)C_n^k + \sum_{k=0}^{n} kC_n^k$$

de la même manière

$$\frac{d^2}{dx}\left(x+1\right)^n = \frac{d^2}{dx}\sum_{k=0}^{k=n} C_n^k \; x^k$$

alors

$$n\left(n-1\right)\left(x+1\right)^{n-2} = \sum_{k=0}^{k=n} k\left(k-1\right)C_n^k \; x^{k-2}$$

En faisant alors $x = 1$, on obtient l'égalité

$$n\left(n-1\right)2^{n-2} = \sum_{k=0}^{k=n} k\left(k-1\right)C_n^k$$

alors

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k = n\left(n-1\right)2^{n-2} + n2^{n-1}$$

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes

$$z^2 + \left(1-2i\right)z + 5i + 1 = 0, \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^3 + \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 = 0$$

Pour

$$z^2 + \left(1-2i\right)z + 5i + 1 = 0$$

On a

$$\Delta = \left(1-2i\right)^2 - 4\left(5i+1\right) = -7 - 24i = \left(\alpha + \beta i\right)^2 = \alpha^2 - \beta^2 + 2i\alpha\beta$$

donc

$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = -7 \\ \alpha^2 + \beta^2 = \sqrt{24^2 + 7^2} \\ \alpha\beta = -12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = -7 & (1) \\ \\ \alpha^2 + \beta^2 = 25 & (2) \end{cases}$$

La somme de (1) et (2) donne

$$2\alpha^2 = 18 \Rightarrow \alpha = \pm 3 \; et \; \beta = \pm 4$$

donc

$$\Delta = \left(3-4i\right)^2$$

ansi

$$z_1 = \frac{-(1-2i)+(3-4i)}{2} = (1-i) \;\; et \; z_2 = \frac{-(1-2i)-(3-4i)}{2} = -2+3i$$

Pour

$$\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^3 + \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 = 0 \tag{9}$$

on pose

$$h = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^3$$

l'équation (9) devient

$$h + \frac{1}{h} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{h^2+1}{h} = 0 \Rightarrow h = \pm i = e^{i\pi/2+2ik\pi}$$

donc

$$\frac{z+1}{z-1} = e^{i\pi/6+2ik\pi/3} \;\; et \; z \neq 1 \;\;\; z \neq -1 \qquad et \;\;\; que \;\;\; k = 0,1,2$$

alors on

$$\frac{z+1}{z-1} = \frac{z-1+2}{z-1} = 1 + \frac{2}{z-1}$$

donc

$$\frac{2}{z-1} = e^{i\pi/6+2ik\pi/3} - 1 \Rightarrow z-1 = \frac{2}{e^{i\pi/6+2ik\pi/3}-1}$$

$$\Rightarrow z = \frac{2}{e^{i\pi/6+2ik\pi/3}-1} + 1 = z = \frac{e^{i\pi/6+2ik\pi/3}+1}{e^{i\pi/6+2ik\pi/3}-1}$$

:donc

$$z = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}\pi k\right) + 1 + i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}\pi k\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}\pi k\right) - 1 + i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}\pi k\right)} \qquad tel \; que \; k = 0,1,2$$

$$z = \frac{\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}\pi k\right) + 1 + i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}\pi k\right)\right]\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}\pi k\right) - 1 - i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}\pi k\right)\right]}{\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}\pi k\right) - 1\right]^2 + \sin^2\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}\pi k\right)}$$

$$z = \frac{i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}\pi k\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}\pi k\right) - 1} \quad k = 0,1,2$$

finalement

$$z_1 = \frac{i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)-1} = \frac{i}{\sqrt{3}-2} \qquad z_2 = \frac{i\sin\left(\frac{5}{6}\pi\right)}{\cos\left(\frac{5}{6}\pi\right)-1} = -\frac{i}{\sqrt{3}+2},$$

$$z_3 = \frac{i\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right)}{\cos\left(\frac{3}{2}\pi\right)-1} = i$$

Explicitons la formule du binôme pour $n = 3$

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

A l'aide de la formule d'Euler et de la formule précédente, exprimer $\cos^3(\theta)$ et $\sin^3(\theta)$ en fonction de

$$\sin(k\theta) \;\; et \;\; \cos(k\theta) \;\; k = 1;3$$

On a

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}, \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

donc

$$\cos^3(\theta) = \frac{\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)^3}{8}, \sin^3(\theta) = -\frac{\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)^3}{8i}$$

alors

$$\cos^3(\theta) = \frac{1}{8}\left[e^{3i\theta} + 3e^{i\theta 2}e^{-i\theta} + 3e^{i\theta}e^{-i2\theta} + e^{-i3\theta}\right]$$

d'ou

$$\cos^3(\theta) = \frac{1}{4}\cos(3\theta) + \frac{3}{4}\cos(\theta)$$

de même pour

$$\sin^3(\theta) = -\frac{1}{8i}\left[\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)^3\right]$$

$$\begin{aligned}
\sin^3(\theta) &= -\frac{1}{8i}\left[e^{3i\theta} - e^{-i\theta 3} - 3e^{2i\theta}e^{-i\theta} + 3e^{i\theta}e^{-2i\theta}\right] \\
&= -\frac{1}{8i}\left[e^{3i\theta} - e^{-i\theta 3} - 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta}\right] = -\frac{1}{8i}\left[2i\sin(3\theta) - 6i\sin(\theta)\right] \\
&= \left[-\frac{1}{4}\sin(3\theta) + \frac{3}{4}\sin(\theta)\right]
\end{aligned}$$

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ on pose

$$Z_n = \sum_{k=0}^{n} e^{k\theta i} = \frac{1 - e^{(n+1)\theta i}}{1 - e^{\theta i}}$$

et on a

$$\sum_{k=0}^{n} e^{k\theta i} = \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) + i \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$$

de plus

$$\begin{aligned}
\frac{1 - e^{(n+1)\theta i}}{1 - e^{\theta i}} &= \frac{e^{(n+1)/2\theta i}}{e^{\theta/2i}} \frac{e^{-(n+1)\theta i/2} - e^{(n+1)\theta i/2}}{e^{-\theta i/2} - e^{\theta i/2}} \\
&= e^{n/2\theta i} \frac{\sin((n+1)\theta/2)}{\sin(\theta/2)} \\
&= \left[\cos\left(\frac{n}{2}\theta\right) + i \sin\left(\frac{n}{2}\theta\right)\right] \frac{\sin((n+1)\theta/2)}{\sin(\theta/2)}
\end{aligned}$$

en déduire

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) &= \cos\left(\frac{n}{2}\theta\right) \frac{\sin((n+1)\theta/2)}{\sin(\theta/2)} \\
\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta) &= \sin\left(\frac{n}{2}\theta\right) \frac{\sin((n+1)\theta/2)}{\sin(\theta/2)}
\end{aligned}$$

on a

$$\cos(\alpha + k\theta) = \cos(\alpha)\cos(k\theta) - \sin(\alpha)\sin(k\theta)$$

donc

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(\alpha + k\theta) = \cos(\alpha) \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) - \sin(\alpha) \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$$

alors

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(\alpha + k\theta) = \frac{\cos(\alpha)\cos\left(\frac{n}{2}\theta\right)\sin((n+1)\theta/2)}{\sin(\theta/2)} - \frac{\sin(\alpha)\sin\left(\frac{n}{2}\theta\right)\sin((n+1)\theta/2)}{\sin(\theta/2)}$$