

SYNTHESE Thème N°17 : ANGLE INSCRIT ET ANGLE AU CENTRE POLYGONES REGULIERS

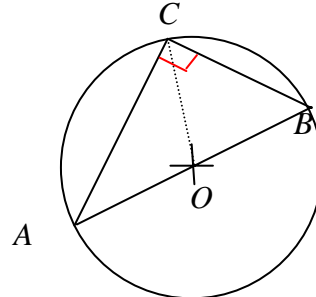
A - RAPPELS : PROPRIETE DU CERCLE CIRCONSCRIT A UN TRIANGLE

RECTANGLE

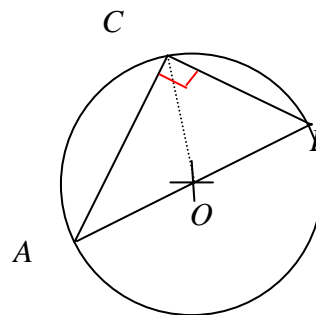
Propriété 1 :

Si un triangle est rectangle, alors le cercle circonscrit à ce triangle a pour diamètre l'hypoténuse de ce triangle.

Hypothèse : ABC est un triangle rectangle en C



Hypothèse : ABC un triangle et C appartient au cercle de diamètre $[AB]$.



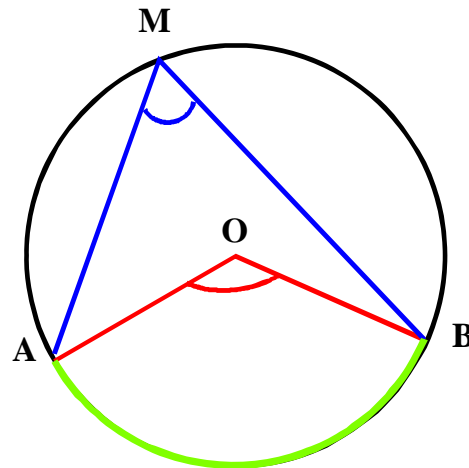
Propriété 2 :

Si un triangle est inscrit dans un cercle et a pour côté un diamètre de ce cercle, alors ce triangle est rectangle et ce diamètre est l'hypoténuse du triangle.

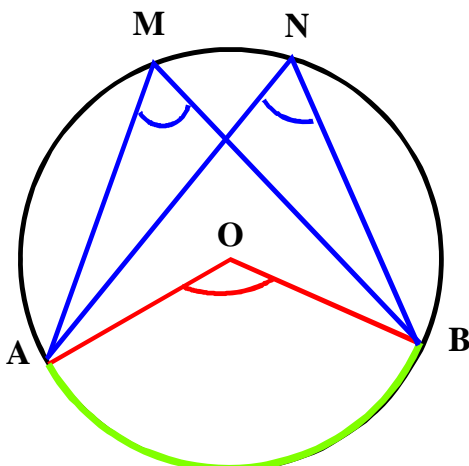
B - DEFINITION : ANGLE INSCRIT ET ANGLE AU CENTRE

Etant donné deux points A et B d'un cercle de centre O , et un point M de ce cercle :

- L'angle \widehat{AOB} est **l'angle au centre** qui intercepte l'arc \widehat{AB} .
- L'angle \widehat{AMB} est **l'angle inscrit** qui intercepte l'arc \widehat{AB} .



C - PROPRIETES



- Si deux angles inscrits dans un cercle interceptent le même arc alors ils ont **la même mesure**

$$\widehat{AMB} = \widehat{ANB}$$

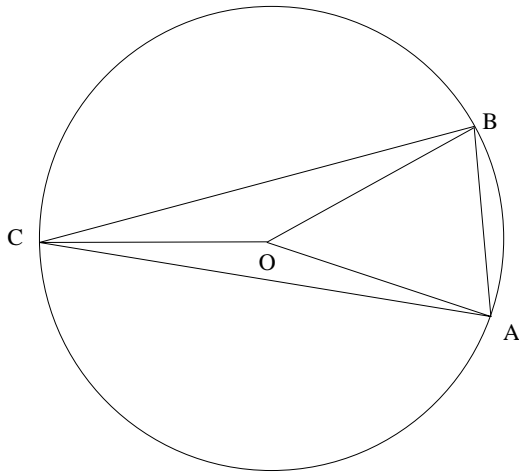
- Si dans un cercle, un angle au centre et un angle inscrit interceptent le même arc alors la mesure de l'angle au centre est **le double de la mesure de l'angle inscrit**

$$\widehat{AOB} = 2 \times \widehat{AMB}$$

D

ALCULE

Enoncé :



Déterminer la mesure des angles du triangle ABC sachant que $\widehat{AOB} = 50^\circ$ et $\widehat{BOC} = 150^\circ$, en justifiant chacune de vos réponses. Le point O est le centre du cercle passant par les points A, B et C.

Solution :

- Calcul de la mesure de l'angle \widehat{ACB} .

L'angle \widehat{ACB} est un angle inscrit dans un cercle qui intercepte l'arc \widehat{AB} et l'angle \widehat{AOB} est un angle au centre qui intercepte le même arc \widehat{AB}

D'après la propriété :

Si dans un cercle, un angle au centre et un angle inscrit interceptent le même arc alors la mesure de l'angle au centre est le double de la mesure de l'angle inscrit

$$\text{Donc : } \widehat{ACB} = \frac{\widehat{AOB}}{2} = \frac{50^\circ}{2} = 25^\circ$$

Conclusion : $\widehat{ACB} = 25^\circ$

- Calcul de la mesure de l'angle \widehat{BAC} .

L'angle \widehat{BAC} est un angle inscrit dans un cercle qui intercepte l'arc \widehat{BC} et l'angle \widehat{COB} est un angle au centre qui intercepte le même arc \widehat{BC}

D'après la propriété :

Si dans un cercle, un angle au centre et un angle inscrit interceptent le même arc alors la mesure de l'angle au centre est le double de la mesure de l'angle inscrit

$$\text{Donc : } \widehat{BAC} = \frac{\widehat{COB}}{2} = \frac{150^\circ}{2} = 75^\circ$$

Conclusion : $\widehat{BAC} = 75^\circ$

- Calcul de la mesure de l'angle \widehat{ABC} .

Sachant que dans un triangle la somme des angles est égale à 180°

$$\widehat{ABC} + \widehat{ACB} + \widehat{CAB} = 180^\circ$$

$$\widehat{ABC} + 25^\circ + 75^\circ = 180^\circ$$

$$\widehat{ABC} = 180^\circ - 25^\circ - 75^\circ$$

$$\widehat{ABC} = 80^\circ$$

Conclusion : $\widehat{ABC} = 80^\circ$

E - POLYGONES REGULIERS

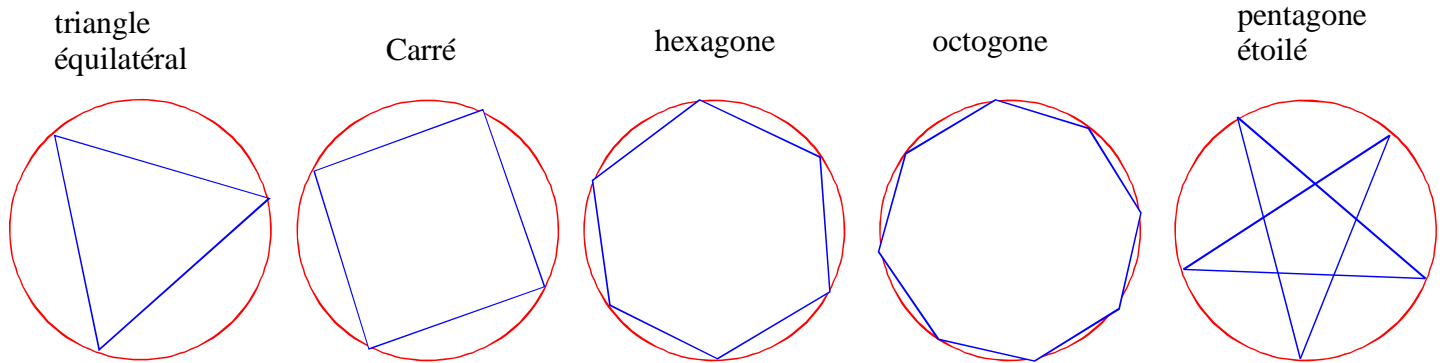
1. Définition

Un polygone régulier est un polygone dont tous les côtés ont la **même longueur** et dont tous les sommets appartiennent à un **même cercle**.

Tous les angles d'un polygone régulier ont la **même mesure**.

Ce cercle s'appelle le cercle **circonscrit** au polygone et son centre est le **centre** du polygone.

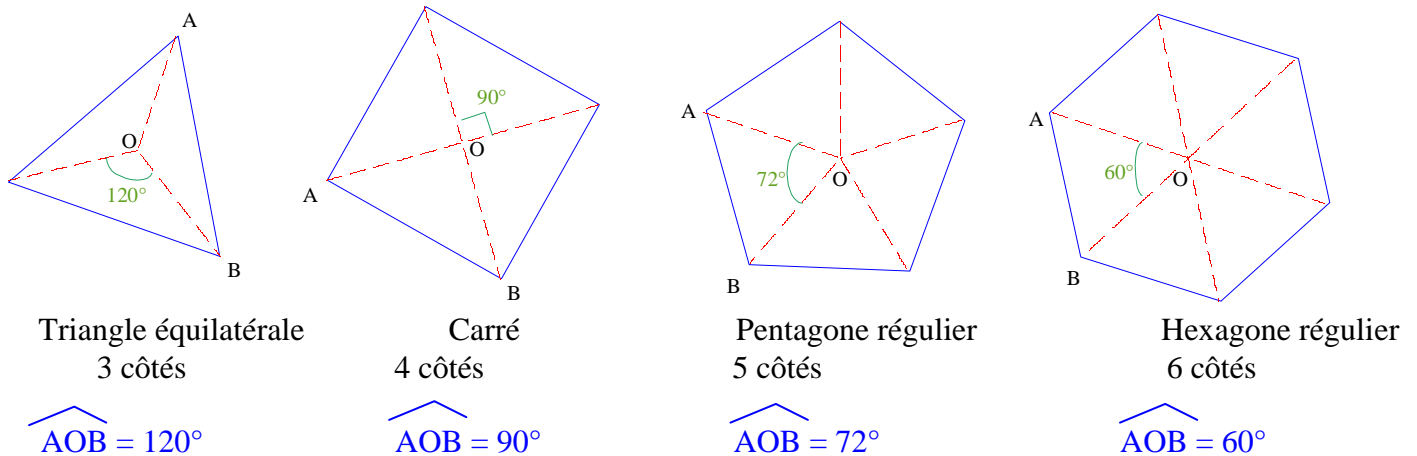
Exemples :



2. Propriété

Dans le cas d'un polygone régulier non croisé à n côtés, la mesure de l'angle au centre interceptant un des côtés est égale à $\frac{360^\circ}{n}$

Exemples :



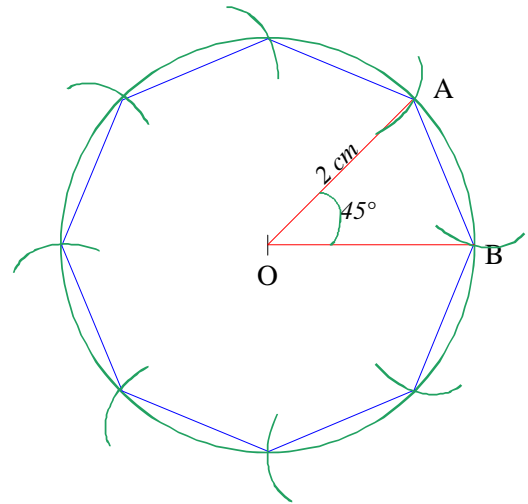
F – PYRAMIDE REGULIERE (Rappel)

Une Pyramide est régulière si sa base est **un polygone régulier** et si sa hauteur passe par le **centre** de ce polygone

G – METHODES

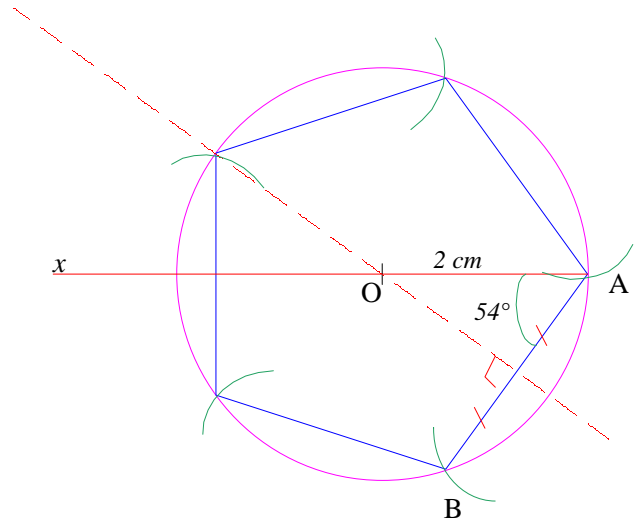
1. Construire un octogone régulier dont les sommets sont sur un cercle de centre O et de rayon 2 cm.

- ① On calcule la mesure des angles au centre : $360^\circ : 8 = 45^\circ$
- ② On trace un segment [OA] de longueur 2 cm
- ③ On trace le segment [OB] de longueur 2 cm et telle que $\widehat{AOB} = 45^\circ$.
- ④ On trace le cercle de centre O qui passe par A et B.
- ⑤ On utilise le compas pour reporter la longueur AB.

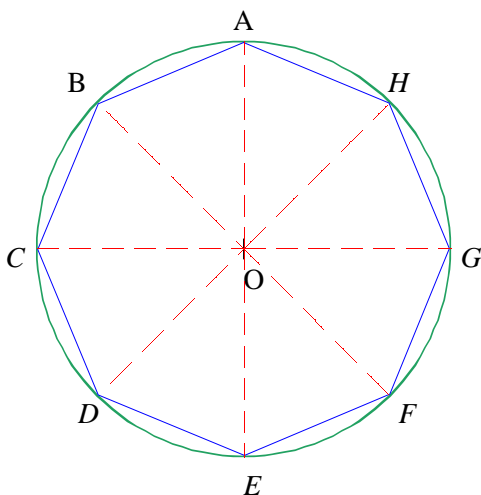


2. Construire un pentagone régulier de centre O et de côté [AB] avec AB = 2 cm

- ① On calcule les angles du triangle OAB isocèle en O : $\widehat{AOB} = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$; $\widehat{OAB} = \frac{(180^\circ - 72^\circ)}{2} = 54^\circ$
- ② On trace un segment [AB] de longueur 2 cm.
- ③ On trace la médiatrice de [AB] et une demi-droite [Ax] telle que $\widehat{xAB} = 54^\circ$. On note O leur point d'intersection
- ④ On trace le cercle de centre O qui passe par A et B.
- ⑤ On utilise le compas pour reporter la longueur AB.



3. Calculer la mesure de l'angle \widehat{ABC} sachant que ABCDEFGH est un octogone régulier de centre O.



$$\widehat{AOB} = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$$

$$\widehat{OBA} = \frac{(180^\circ - 45^\circ)}{2} = 67,5^\circ$$

$$\widehat{CBA} = 2 \times \widehat{OBA} = 2 \times 67,5^\circ$$

$$\widehat{CBA} = 135^\circ$$