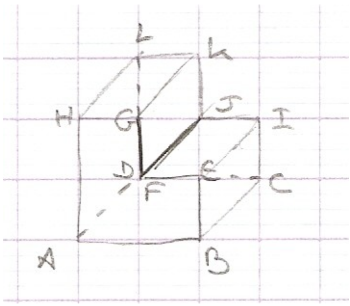
Géométrie de l'espace

I. Les solides

1- Les Polyèdres.

Définition: Un polyèdre est un solide délimité par des faces qui sont toutes des polygones.

Polygone: figure du plan qui a deux dimensions.



Ce polyèdre s'appelle ABCDEFGHIJKL.

Un polyèdre est constitué de :

- Faces

EFIJ est une face

- Arêtes

[EI] est une arête.

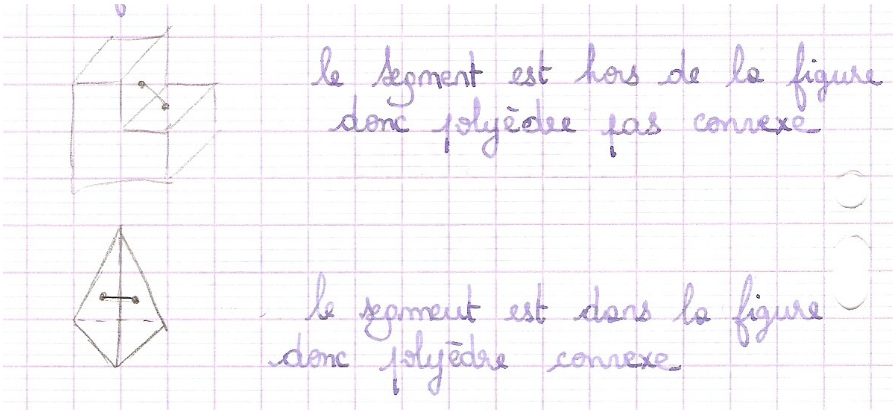
[FG] est une arête.

- Sommets

L est un sommet

I est un sommet.

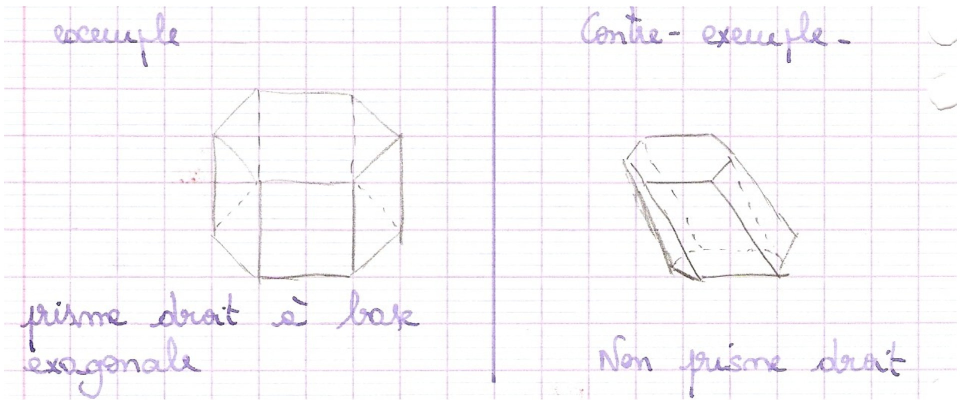
Un polyèdre est dit convexe s'il est situé tout entier dans un même côté, de tout plan contenant une quelconque de ses faces.



Polyèdres particuliers :

- **Le Prisme droit** est un polyèdre particulier qui a deux faces polygonales, superposables, les autres faces étant des rectangles.

Exemple :



Les autres faces sont appelées : **faces latérales**.

La hauteur d'un prisme droit est un segment joignant les deux bases.

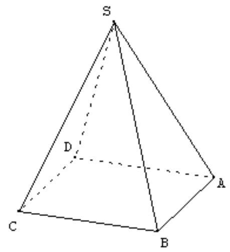
Le volume d'un prisme droit :

$$V_{\text{prisme droit}} = \text{Aire de la Base} * \text{la hauteur}$$

Exemple : Un cube est un prisme droit à base carrée.

Un parallélépipède est un prisme droit à base rectangulaire (appelé aussi pavé droit).

- La pyramide est un polyèdre (prisme non droit), dont une face est un polygone convexe, appelé la base de la pyramide et dont les faces latérales sont des triangles ayant un somment commun.



La hauteur de la pyramide est obtenue en projetant orthogonalement le somment sur la base (le plus court chemin).

Volume :

$$V_{pyramide} = \frac{\text{Aire de la Base * la hauteur}}{3}$$

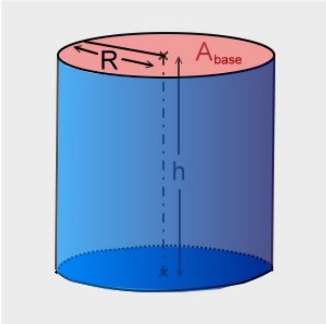
Une pyramide régulière est une pyramide dont la base est un polygone régulier (tous les côtés sont égaux 2 à 2) et dont la hauteur passe par le centre de la base.

Cas particulier : Une pyramide ayant 4 faces s'appelle un **tétraèdre**. Elle est formée de 4 triangles équilatéraux isométriques (on peut superposer les triangles 2 à 2 = 4 mêmes triangles).

2- D'autres solides

a) Le cylindre.

C'est un solide ayant deux faces qui sont des disques superposables (même rayon) et dont la face latérale est un rectangle.



Le Volume :

$V_{cylindre}$= Aire du disque * hauteur

$V_{cylindre} = \pi r^2 * h$

Nota Bene :

- Un disque est une surface : non ne peut que calculer son aire :

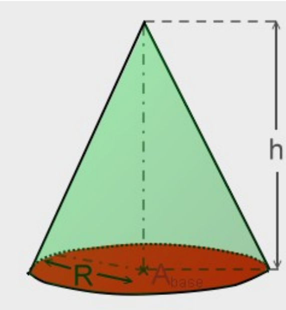
$$A_{disque} = \pi r^2$$

- Un cercle est donc « une ligne » : on ne peu pas calculer son Aire mais on calcule son Périmètre

$$A_{cercle} = 2 \pi r$$

b) Le cône

La cône est une base qui est un disque et sa face latérale une partie d'un disque.



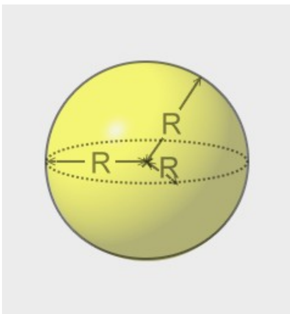
Volume :

$$V_{\text{cône}} = \frac{\text{Aire du disque} * \text{hauteur}}{3}$$

$$\boxed{V_{\text{cône}} = \frac{\pi r^2 * \text{hauteur}}{3}}$$

c) **La sphère.**

La sphère de centre 0 et de rayon « r » est l'ensemble des points M de l'espace, situés à une distance égale à « r » du point O. (c'est le contour d'une boule).



On ne peut pas calculer le volume d'une sphère mais son aire :

$$\boxed{A_{\text{phère}} = 4 \pi r^2}$$

La boule contient tous les points à l'intérieur de la sphère. On peut calculer son volume.

$$\boxed{V_{\text{boule}} = 4/3 \pi r^3}$$

3- Représentation des solides

On représente les solides en **perspectives cavalières**. Une face est alors privilégiée : la face frontale (c'est l'une des faces pour laquelle on grade les grandeurs réelles).

Une arête perpendiculaire à la face frontales est appelée : **fuyante.**

A partir d'une représentation en perspective cavalière, on peut nous demander de représenter d'autres faces comme :

- Vue de face
- Vue de dessus
- Vue de dessous
- Vue de droite
- Vue de gauche

Sur une seule vue (la vue frontale), on respecte les grandeurs réelles.

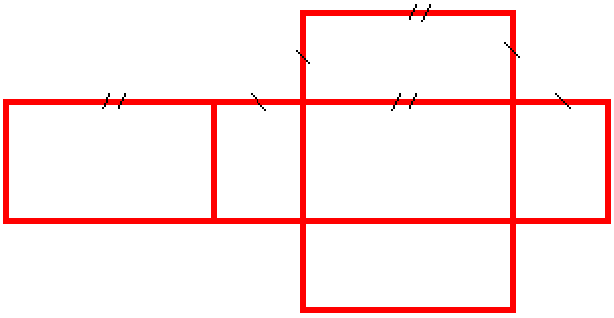
Règles des perspectives cavalières :

- Les angles et les longueurs ne sont pas conservés.
- Le milieu d'un segment est représenté par le milieu du segment représenté. → conversation du milieu.
- Les arrêtes cachées sont représentées par des pointillés.
- Il est fréquent d'utiliser un angle de 45° entre les fuyantes et la direction horizontale.

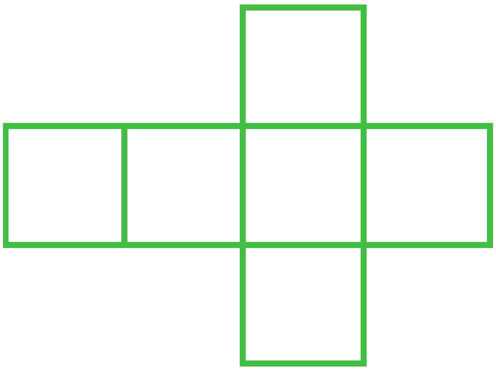
Le patron d'un solide :

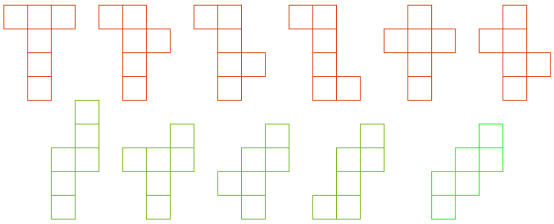
C'est une figure géométrique plane, telle que , uniquement, par pliage, l'on puisse obtenir ce solide sans chevauchement des faces. Il n'y a pas d'unicité d'un patron pour un solide donné : il y en a plusieurs.

pour un pavé droit :



pour un cube :





plusieurs patrons pour un cube

II. Position relative, parallélisme et orthogonalité.

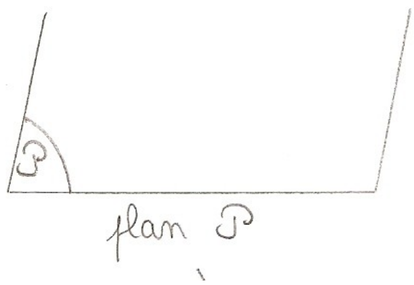
1- Les règles de base.

Tous les résultats de géométrie plane s'appliquent dans chaque plan de l'espace.

a) Comment déterminer un plan dans l'espace ?

- La plus simple : par 3 points non alignés passe un unique plan.
- 2ème façon : 1 droite (d) et un point A extérieur à (d) détermine également un même plan.
- 3ème façon : par deux droites sécantes.

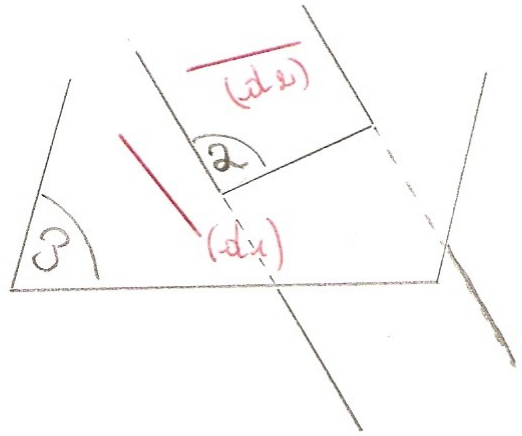
Pour représenter un plan , on va tricher, on dessine les bords alors que le plan n'a pas de limites.



b) Coplanaire / Non-coplanaire.

- deux éléments de l'espace (points, droite) sont dits **coplanaires** quand ils sont situés dans un même plan. Il faut trouver un même plan commun aux deux éléments.
- Sinon, on dit qu'ils sont **non coplanaires**.
- **Un point et une droite sont toujours coplanaires.**

Exemple de non coplanarité :

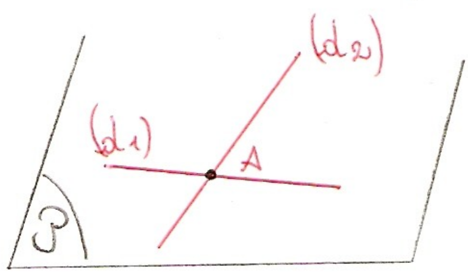


(d1) et (d2) ne sont pas coplanaires

2- Position relative de 2 droites dans l'espace.

a) deux droites sécantes

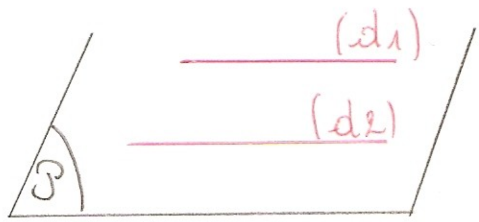
Elle définissent un même plan = (d1) et (d2) sont coplanaires.



$(d_1) \cap (d_2) = \{A\}$

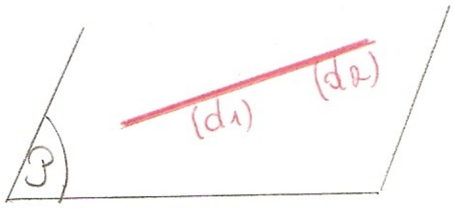
intersection pt A

b) deux droites parallèles



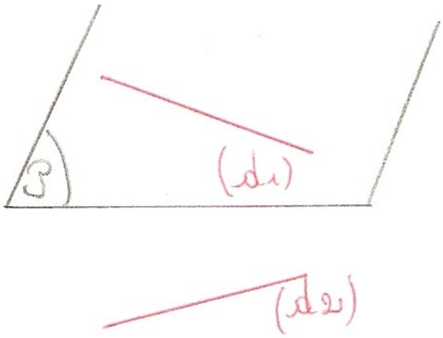
$(d_1) \cap (d_2) = \emptyset$

c) deux droites confondues



$(d_1) \cap (d_2) = (d_1)$ ou (d_2)

d) **2 droites non-coplanaires**



Remarque :

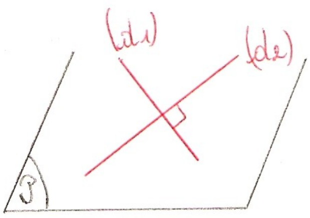
Si deux droites sont **disjointes** (ne se rencontrent pas) alors :

- soit elles sont non-coplanaires
- soit elles sont coplanaires et strictement parallèles (non confondues).

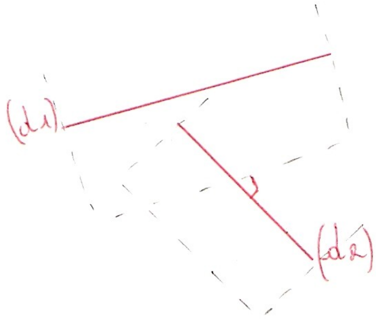
DROITES ORTHOGONALES :

Dans l'espace, deux droites sont orthogonales quand leurs parallèles menées par un point quelconque sont perpendiculaires.

- deux droites perpendiculaires → elles se coupent (dans le même plan) et forment en angle droit.
- Deux droites orthogonales → forment un angle droit mais ne se coupent pas (2 plans ≠)

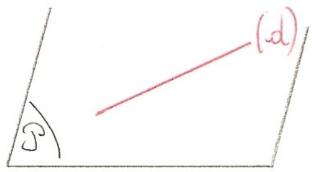


droites | perpendiculaires
orthogonales
ds le m̂ plan

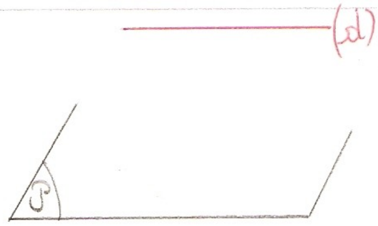


d1 et d2 sont orthogonales mais ne se coupent pas ≠ sécantes.

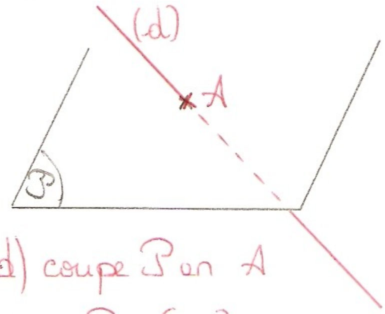
3- <u>Position relative d'une droite et d'un plan.</u>



(d) est incluse dans P
$(d) \subset P$



(d) // P

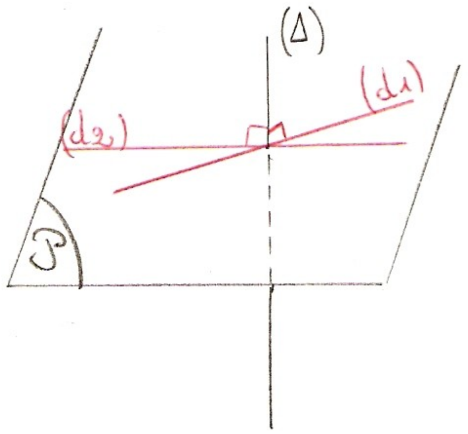


(d) coupe P en A
$(d) \cap P = \{A\}$
La droite perce le Plan P.

Droites perpendiculaires à un plan :

<u>Théorèmes :</u>

- Si (d) est perpendiculaire à deux droites sécantes d'un plan P, alors (d) est perpendiculaire au plan P.
- Si (d) est perpendiculaire à un plan P, alors elle est orthogonale à toutes droites incluses dans le plan P.



$(d_1) \perp (d_2)$

$(d_i) \perp (\Delta)$

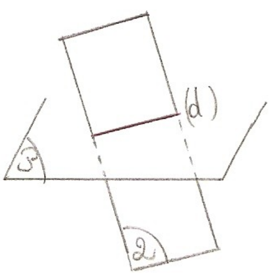
(d_1) et $(d_2) \subset \mathcal{P}$

$\Downarrow$

$\Delta \perp \mathcal{P}$

4- **<u>Position relative de deux plans</u>**

Sécants



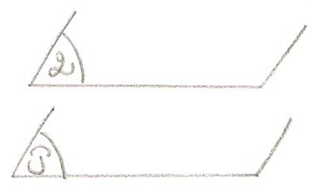
$\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ st sécants

$\mathcal{P} \cap \mathcal{Q} = (d)$

Confondus

$\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont confondus

Parallèles



$\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont //.

$\mathcal{P} \parallel \mathcal{Q}$

$\mathcal{P} \cap \mathcal{Q} = \emptyset$