Système de deux équations du $1^{ére}$ degré à deux inconnues	Prof : Naifar Med Yassine Classe : $1^{ére}$ année

I) Equations du $1^{ére}$ degré à deux inconnues:

Définition :

On appelle équation du premier degré à deux inconnues réelles x et y toute équation qui se ramène à la forme : ax + by + c = 0 a, b et c étant des réels données tels que $a \neq 0$ ou $b \neq 0$.

- Le couple (x_0, y_0) est une solution de l'équation ax + by + c = 0 équivaut $ax_0 + by_0 + c = 0$
- Si $ax_0 + by_0 + c \neq 0$ alors (x_0, y_0) n' est pas une solution de l'équation ax + by + c = 0.
- Toute couple (x_0, y_0) de réels pour le quel on obtient $ax_0 + by_0 + c = 0$ est une solution de l'équation ax + by + c = 0.
- Résoudre dans IR² cette équation ax + by + c = 0.c'est chercher l'ensemble de ses solutions.

ax + by + c = 0 avec $a \neq 0$ et $b \neq 0$ signifie $by = -ax - c$ signifie $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$

donc $S_{IR^2} = \left\{ (x, -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}) \text{ avec } x \in IR \quad (x \text{ varie sur } IR) \right\}$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation ax + by + c = 0 est représenté graphiquement par la droite d'équation $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$.

Exemples :

- Le couple $(5, -5)$ est une solution de l'équation $2x + 3y + 5 = 0$ Car $2\times5 + 3\times-5 + 5 = 0$

Résoudre dans IR² cette équation $2x + 3y + 5 = 0$

$2x + 3y + 5 = 0$ signifie $3y = -2x - 5$ signifie $y = -\frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$

donc $S_{IR^2} = \left\{ (x, -\frac{2}{3}x - \frac{5}{3}) \text{ avec } x \in IR \quad (x \text{ varie sur } IR) \right\}$

- Donc l'ensemble des solutions de l'équation $2x + 3y + 5 = 0$ est représenté graphiquement par la droite D d'équation $D : y = -\frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$

Contre –exemple :

- Le couple $(2, -3)$ n'est pas une solution de l'équation $2x + 3y + 5 = 0$ Car $2\times2 + 3\times3 + 5 = 18 \neq 0$.

II) Système de deux équations du $1^{ére}$ degré à deux inconnues :

Définition: Système de deux équations du 1er degré à deux inconnues

C'est un système de la forme : $\begin{cases} a\,x + b\,y = c \\ a'\,x + b'\,y = c' \end{cases}$

(a, b, c, a', b', c' sont des réels donnés; x et y sont les inconnues).

- Tout couple (x_0, y_0) de réels vérifiant à la fois les deux équations est une solution du système.
- Résoudre ce système, c'est chercher l'ensemble de ses solutions.

Exemple : $(S)\begin{cases}5x + y = 13\\ 3x - y = 11\end{cases}$ **S est un système de deux équations du 1er degré à deux inconnues**

- *Le couple* $(3,-2)$ **est une solution du système S car** $(3,-2)$ **vérifiant à la fois les deux équations**

$$(S)\begin{cases}5\times 3 + (-2) = 13\\ 3\times 3 - (-2) = 11\end{cases}$$

- *Le couple* $(5,-12)$ ***n' est pas une solution du système S car le couple ne satisfait pas au système***

$$(S)\begin{cases}5\times 5 + (-12) = 13\\ 3\times 5 - (-12) = 27 \neq 11\end{cases}$$ $(5,-12)$ ***n' est pas une*** *solution commune aux deux équations.*

Les trois méthodes de résolution d'un système:

Méthode de substitution ou méthode d'addition (ou par élimination) ou méthode graphique

1) $1^{ére}$ Méthode de substitution *Substituer, c'est remplacer par*

Exemple : *Soit à résoudre par exemple le système* $(S)\begin{cases}2x + y = 7 & (L_1)\\ 3x - y = 3 & (L_2)\end{cases}$

On exprime y en fonction de x ***, l'équation*** (L_1) ***s'écrit*** $y = 7 - 2x$. ***On remplace*** $y = 7 - 2x$ ***dans l'équation*** (L_2) ***d'où l'équation*** (L_2) ***devient*** $3x - (7 - 2x) = 3$ ***signifie*** $3x - 7 + 2x = 3$ ***signifie*** $5x - 7 = 3$ ***signifie*** $5x = 10$ ***signifie*** $x = \frac{10}{5} = 2$ ***,On obtient y en remplaçant*** $x = 2$ ***dans l'équation*** (L_1) ***ou l'équation*** (L_2) (L_1) $2x + y = 7$ ***et*** $x = 2$ ***donc*** $2\times 2 + y = 7$ ***signifie*** $4 + y = 7$ ***signifie*** $y = 7 - 4$ ***signifie*** $y = 3$ ***D'ou*** $y = 3$ ***et*** $x = 2$

- ***On vérifie que le couple*** $(2,3)$ ***satisfait au système*** $(S)\begin{cases}2x + y = 7 & (L_1)\\ 3x - y = 3 & (L_2)\end{cases}$

$$(S)\begin{cases}2\times 2 + 3 = 7\\ 3\times 2 - 3 = 3\end{cases}$$ *Conclusion :* $S_{IR^2} = \{(2,3)\}$.

2) $2^{éme}$ Méthode par addition (ou par élimination):

Multiplier les deux membres des deux équations par des nombres convenablement choisis de sorte que lorsque l'on additonne les deux équations obtenues , on obtient une équation à une seule inconnue ,c'est à dire par addition les termes en x (ou en y) disparaissent et on raméne à des équation du 1ére degré à une incnnue.

Exemple :

Soit à résoudre dans IR² par exemple le système $(S)\begin{cases}x + 3y = 3 & (L_1)\\ -2x + y = 8 & (L_2)\end{cases}$

a) Calcul de x (disparition de y)

On fait disparaitre les termes en y en multipliant l'équation (L_2) ***par -3 puis en additionnant membre à membre les deux équations***

$$(S)\begin{cases}x + 3y = 3 & (L_1)\\ -2x + y = 8 & (L_2)\times(-3)\end{cases} \text{ signifie } +\begin{cases}x + 3y = 3\\ 6x - 3y = -24\end{cases}$$

$$7x + 0y = -21 \text{ signifie } x = -\frac{21}{7} = -3$$

On remplaçant x par -3 dans l'équation (L_1) ***ou*** (L_2) ***on trouve la valeur de*** y

$x = -3$ ***donc l'équation*** (L_1) ***devient*** $-3 + 3y = 3$ ***signifie que*** $3y = 6$ ***signifie que*** $y = \frac{6}{3} = 2$

D'ou $y = 2$ ***et*** $x = -3$

❖ On vérifie que le couple $(-3,2)$ satisfait au système $(S)\begin{cases} x + 3y = 3 & (L_1) \\ -2x + y = 8 & (L_2) \end{cases}$

$(S)\begin{cases} -3 + 3\times 2 = 3 & (L_1) \\ -2\times -3 + 2 = 8 & (L_2) \end{cases}$ Conclusion : $S_{IR^2} = \{(-3,2)\}$

.

b) Calcul de y (disparition de x)

On fait disparaitre les termes en x en multipliant l'équation **(L_1) par 2 puis en additionnant membre à membre les deux équations**

$(S)\begin{cases} x + 3y = 3 & (L_1)\times(2) \\ -2x + y = 8 & (L_2) \end{cases}$ **signifie** $+\begin{cases} 2x + 6y = 6 \\ -2x + y = 8 \end{cases}$

$0x + 7y = 14$ **signifie** $y = \dfrac{14}{7} = 2$

On remplaçant y par 2 dans l'équation (L_1) ou (L_2) on trouve la valeur de y

$y = 2$ ***donc l'équation (L_2) devient*** $-2x + 2 = 8$ ***signifie que*** $-2x = 6$ ***signifie que*** $x = -\dfrac{6}{2} = -3$

D'ou $y = 2$ ***et*** $x = -3$ Conclusion : $S_{IR^2} = \{(-3,2)\}$

3) 3[éme] Méthode : Résolution graphique

Pour résoudre graphiquement le systéme $:(S)\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$

(a, $b \neq 0$, c, a', $b' \neq 0$, c' sont des réels donnés; x et y sont les inconnues).

❖ *Supposons que le plan est rapporté à un repère (0, I, J).*

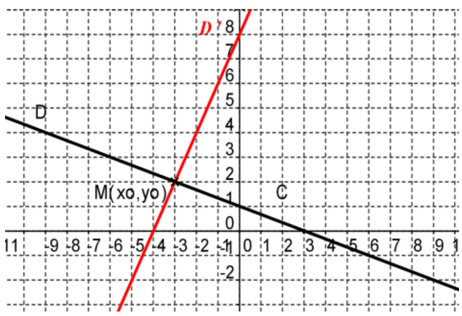
On pose (D) la droite d'équation : $y = -\dfrac{a}{b}x + \dfrac{c}{b}$ **et** *(D') la droite d'équation :* $y = -\dfrac{a'}{b'}x + \dfrac{c'}{b'}$

Les équations ax + by + c = 0,et a'x + b'y + c' = 0,sont représentées respectivement par les deux droites D et D'

❖ *On construit les droites D et D' sur le même graphique (Dans le repère (O , I ,J))*

❖ *L'ensemble des solutions du système .* $(S)\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ *est l'ensemble des couples des coordonnées des points de* $D \cap D'$.

❖ *Les droites D et D' peuvent être soit sécantes soit parallèles.*



1[ére]Cas : *D et D' sont sécantes équivaut à* **ab'-a'b$\neq 0$**

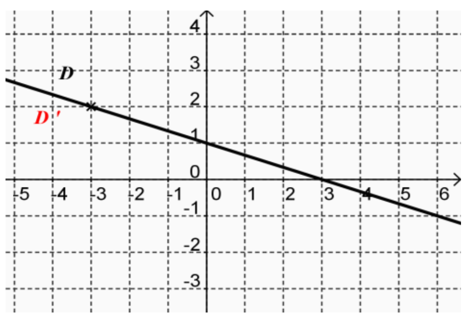
$D \cap D' = \{A(x_0, y_0)\}$ **on lis les coordonnées du point A .**

Ce point d'intersection de ces deux droites est la solution du système.

donc le système admet une solution unique : le couple $A(x_0, y_0)$

Conclusion : $S_{IR^2} = \{(x_0, y_0)\}$

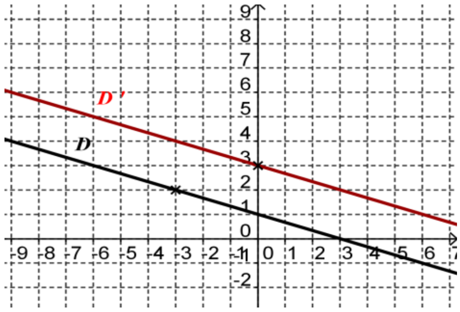
2[éme]Cas : *D et D' sont confondues équivaut à* **ab'-a'b=0 et bc'-cb'=0**



Si $D \cap D' = D$ alors le système admet *une infinité* **de solution** *lorsque D et D' sont confondues. L'ensemble des solutions du système est l'ensemble des couples des coordonnées des points de la droite D.*

Conclusion :

$S_{IR^2} = \left\{ M(x,\ y = -\dfrac{a}{b}x + \dfrac{c}{b}) \text{avec } x \in IR \quad (x \text{ varie sur } IR) \right\}$



$3^{éme}$Cas *D et D' sont strictement parallèles équivaut à* $ab'-a'b=0$ **et** $bc'-cb'\neq 0$

Si $D\cap D'=\varnothing$ ***alors le système n'a pas de solution*** *lorsque D et D' sont strictement parallèles,*

Conclusion : $S_{IR^2}=\varnothing$

Exemple : *Résoudre dans IR² graphiquement le systéme*

$$(S)\begin{cases} x+3y=3 & (L_1) \\ -2x+y=8 & (L_2) \end{cases}$$

Solution :

On pose (D) la droite d'équation : $y=-\dfrac{1}{3}x+1$ **et** *(D') la droite d'équation :* $y=2x+8$

❖ *On construit les droites D et D' sur le même graphique (Dans le repère (O , I ,J))*

(D)

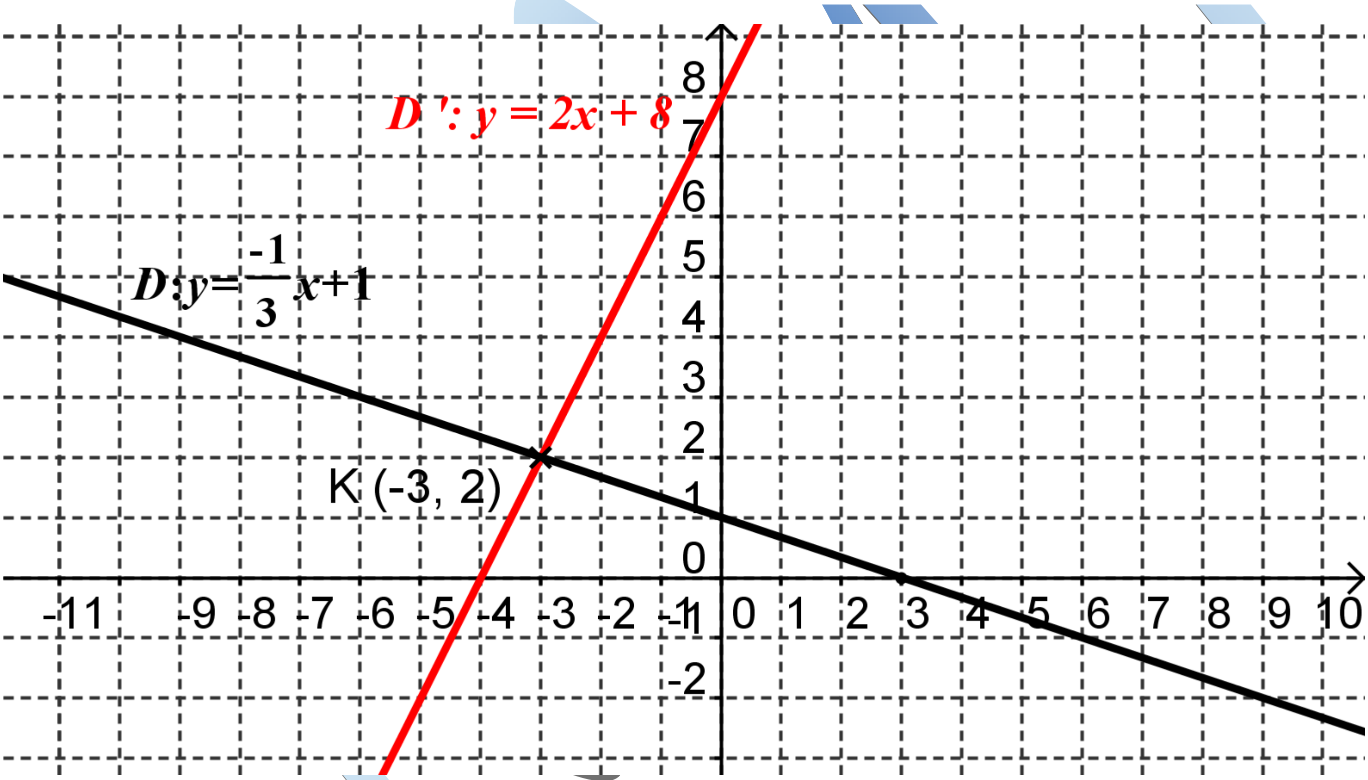
x	0	3
y	1	0

La droite D passe par les points $A(0,1)$ **et** $B(3,0)$

(D')

x	-2	-3
y	4	2

La droite D' passe par les points $A'(-2,4)$ **et** $B'(-3,2)$



On remarque graphiquement que $D\cap D'=\{k(-3,2)\}$

Ce point d'intersection de ces deux droites est la solution du système . *donc le système admet une solution unique : le couple* $(-3,2)$ *Conclusion* $S_{IR^2}=\{(-3,2)\}$

Théorème:

Soit le système $(S)\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$

* *Si* $\boldsymbol{ab'\text{-}a'b \neq 0}$ *le système admet une solution unique. .*

* *Si* $\boldsymbol{ab'\text{-}a'b = 0}$ *le système admet une infinité de solutions ou zéro solution.*

Le réel ab' - a'b s'appelle le déterminant du système et se note $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab'\text{-}a'b$

Remarque :

$(S)\begin{cases} x + 3y = 3 & (L_1) \\ -2x + y = 8 & (L_2) \end{cases}$ ***a=1 , b=3,a'= -2 ,et b' = 1***

$\boldsymbol{ab'\text{-}a'b = 1+6 = 7 \neq 0}$ ***alors D*** *et D' sont sécantes d'où le système admet une solution unique.*

$D \cap D' = \{k(-3,2)\}$ *Conclusion* $S_{IR^2} = \{(-3,2)\}$