Arithmétique

I) Division euclidienne :

- **Définition** : *Soient a et b deux entiers naturels tels que b est non nul, effectuer la division euclidienne de a par b c'est déterminer deux entier q et r tel que :*

$$a = bq + r \text{ avec } 0 \le r < b \begin{cases} a = \text{dividende } a \in IN \\ b = \text{Diviseur } b \in IN^* \\ q = \text{quotient } q \in IN \\ r = \text{reste} \end{cases}$$

- **Exemple**

1974 = 25 x 78 + 24

le reste de la division euclidienne de 1974 par 25 = 24
le quotient de la division euclidienne de 1974 par 25 = 78

$$\begin{array}{r|l} 1974 & 25 \\ \cline{2-2} \underline{175} & 78 \\ 224 & \\ \underline{200} & \\ 24 & \end{array}$$

Remarques :

** Si r = 0 donc il existe q tel que a =b q*
a = b q équivaut à b divise a
** b est un diviseur de a alors a est un multiple de b*

II) nombres premiers

Définition

un nombre entier naturel est premier s'il différent de 1 et il possède exactement deux diviseurs : 1 et lui-même

Ex : *12 n'est pas premier*
5 est premier

les premiers nombres premiers :

2 ;3 ;5 ;7 ;11 ;13 ;17 ;19 ;…….

Remarques

1 n'est pas premier car il n'a qu'un seul diviseur : 1
2 est le seul nombre premier pair
il y a un infinité de nombre premier .

III) Critère de divisibilité;

Critère de divisibilité par 2 et par 5 :

- *Un entier est divisible par 2 (respectivement par 5) si et seulement si son chiffre des unité est divisible par 2 (respectivement par 5)*
- *Le reste de la division euclidienne d'un entier naturel par 2 (respectivement par 5) est égale au reste de la division euclidienne de son chiffre des unités par 2 (respectivement par 5)*

Critère de divisibilité par 3 et par 9 :

- *Un entier est divisible par 3 (respectivement par 9) si et seulement si la somme de ces chiffres est divisible par 3 (respectivement par 9)*
- *Le reste de la division euclidienne d'un entier naturel par 3 (respectivement par 9) est égale au reste de la division euclidienne de la somme de ces chiffres par 3 (respectivement par 9)*

❖ Critère de divisibilité par 4 et par 25 :

* *Un entier est divisible par 4 (respectivement par 25) si et seulement si le nombre formé par ses deux dernier chiffres est divisible par 4 (respectivement par 25)*

* *Le reste de la division euclidienne d'un entier naturel par 4 (respectivement par 25) est égale au reste de la division euclidienne par 4 (respectivement par 25) du nombre formé par ses deux derniers chiffres*

❖ Critère de divisibilité par 8 :

* *Un entier est divisible par 8 si et seulement si le nombre formé par ses trois dernier chiffres est divisible par 8. Le reste de la division euclidienne d'un entier naturel par 8 est égale au reste de la division euclidienne par 8 du nombre formé par ses trois derniers chiffres*

I) L'ensembles des diviseurs d'un entier naturel

Définition :a un entier naturel non nul. On note *l'ensembles des diviseurs de a :* D_a

Exemple : *L'ensembles des diviseurs de 18 :* $D_{18}=\{1,\ 2,3,\ 6,\ 9,18\}$

Activité : Donner la liste de tous les diviseurs de 108 :

Réponse

On désigne par D_{108} *l'ensemble des diviseurs de 108*

$$\begin{array}{r|l} 108 & 2 \\ 54 & 2 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$108 = 2^2 \times 3^3 = 4 \times 27$

L'ensembles des diviseurs de 4: $D_4=\{1,\ 2,4\}$

L'ensembles des diviseurs de 27 : $D_{27}=\{1,\ 3,\ 9,27\}$

(x)	1	3	9	27
1	1	3	9	27
2	2	6	18	54
4	4	12	36	108

Donc *L'ensembles des diviseurs de 108 :* $D_{108}=\{1,\ 2,3,4,\ 6,\ 9,12,18,27,36,54,108\}$

II) PGCD :

- *Tout entier naturel non nul et différent de 1 se décompose en produit de facteur premier*
- ***PGCD (Le plus grand commun diviseur)***

Le plus grand diviseur commun de deux entiers naturels a et b est appelé le plus grand commun diviseur de a et b , on le note PGCD (a , b)
Le PGCD de deux entiers naturels mis sous la forme de produit de facteur premier est le produit de tous les facteurs communs aux deux décompositions chaque facteur étant effectué de son plus petit exposant

a) Méthode de décomposition produit de facteur premier :

Calculer le PGCD(168, 180) par la méthode de décomposition en produit de facteur premier

$$\begin{array}{r|l} 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 168 & 2 \\ 84 & 2 \\ 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$168 = 2x2x2x3x7 = 2^3x3x7$

$180 = 2x2x3x3x5 = 2^2x3^2x5$

$PGCD(168,180) = 2^2x3 = 12$

b) 2ieme méthode : (Divisurs communs à 2 entiers naturels $D_a \cap D_b$) :

On veut calculer *PGCD (180 ,168)*

1) Donner la liste de tous les diviseurs de 180et 168

❖ *On désigne par* D_{180} *l'ensemble des diviseurs de 180*

180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

$180 = 2^2 \times 3^2 \times 5 = 12 \times 15$

L'ensembles des diviseurs de 12: $D_{12} = \{1, 2,3,4,6,12\}$

L'ensembles des diviseurs de 15: $D_{15} = \{1, 3, 5,15\}$

Donc *L'ensembles des diviseurs de 180:*

$D_{180} = \{1, 2,3,4,5,6,9,10,12,15,18,20,30,36,45,60,90,180\}$

(x)	1	3	5	15
1	1	3	5	15
2	2	6	10	30
3	3	9	15	45
4	4	12	20	60
6	6	18	30	90
12	12	36	60	180

❖ *On désigne par* D_{168} *l'ensemble des diviseurs de 168*

168	2
84	2
42	2
21	3
7	7
1	

$168 = 2^3 \times 3 \times 7 = 8 \times 21$

L'ensembles des diviseurs de 4: $D_8 = \{1, 2,4,8\}$

L'ensembles des diviseurs de 21 : $D_{21} = \{1, 3, 7,21\}$

Donc *L'ensembles des diviseurs de 168:*

$D_{168} = \{1, 2,3,4,6,7,8,12,14,21,24,28,42,56,84,168\}$

(x)	1	2	4	8
1	1	2	4	8
3	3	6	12	24
7	7	14	28	56
21	21	42	84	168

2) Donner la liste de tous les diviseurs communs de 180et 168 ($D_{168} \cap D_{180}$ ***)***

$D_{180} = \{1, 2,3,4,5,6,9,10,12,15,18,20,30,36,45,60,90,180\}$

$D_{168} = \{1, 2,3,4,6,7,8,12,14,21,24,28,42,56,84,168\}$

donc $D_{168} \cap D_{180} = \{1,2,3,4,6,12\}$

3) En déduire *PGCD (180 ,168)*

$D_{168} \cap D_{180} = \{1,2,3,4,6,12\}$ ***donc*** *PGCD (180 ,168)=12*

c) 3ieme méthode par l'algorithme d'Euclide:

Trouver le PGCD de168 et de 90 : par l'algorithme d'Euclide
PGCD(90 ‹168)
En effectue la division euclidienne de 168 par 90 :

$168 = 1 \times \boxed{90} + \boxed{78}$ *Donc* $r_1 = 78$ *et PGCD (90 ,168) = PGCD (90 ,78)*

On effectue la division euclidienne de90par 78 :

$90 = 1 \times \boxed{78} + \boxed{12}$ *Donc* $r_2 = 12$ *PGCD (90 ,168) = PGCD (78 , 12)*

On effectue la division euclidienne de78par 12 :

$78 = 6 \times \boxed{12} + \boxed{6}$ *Donc* $r_3 = 6$ *PGCD (90 ,168) = PGCD (12 ,6)*

On effectue la division euclidienne de12par 6 : 12 =2 x 6 + 0 donc 6 divise 12 et par suite

PGCD (90 ,168) = PGCD (12 ,6) = 6

VI) Nombres premiers entre eux - Fraction irréductibles

Définition : *Deux entier naturels a et bsont premiers entre eux si leur PGCD égale a 1(PGCD (a ,b)=1)*

Exemple : *PGCD (35 ,26)=1donc 35 et26 sont premiers entre eux*

Remarques :

- *Un entier naturel est divisible par 6 s' il est divisible par2 et 3***(car 3.et 2sont premier entre eux)**
- *Un entier naturel est divisible par 12 s' il est divisible par 4et 3***(car 3.et 4sont premier entre eux)**
- *Un entier naturel est divisible par 15 s' il est divisible par 5et 3***(car 3.et 5sont premier entre eux)**

Retenons : ***Soit a et b deux entier naturel tel que*** $b \neq 0$***.Le quotient*** $\frac{a}{b}$ ***est un entier naturel si b divise a***

Exemples :

- ***Le quotient*** $\frac{1155}{15}$ ***est un entier naturel car 15 divise 1155***
- ***Le quotient*** $\frac{1808}{24}$ ***n 'est pas un entier naturel car 24 ne divise pas 1808***

Définition :

- *une fraction est dite irréductible si le PGCD de son numérateur et son dénominateur vaut 1*
- $\frac{a}{b}$ *est irréductible si PGCD (a , b) = 1*
- *Si PGCD (a , b) = c alors* $\dfrac{\frac{a}{\text{PGCD}(a,b)}}{\frac{b}{\text{PGCD}(a,b)}} = \dfrac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}}$ *est irréductible*

Exemple : *PGCD (168 ,180) = 2^2x3 = 12 alors* $\dfrac{\frac{180}{12}}{\frac{168}{12}} = \frac{15}{14}$ *est irréductible*

2ieme méthode

$$\frac{180}{168} = \frac{2^2 \times 3^2 \times 5}{2^3 \times 3 \times 7} = \frac{3 \times 5}{2 \times 7} = \frac{15}{14}$$

VII) PPCM :

- **PPCM (Le plus petit commun multiple)**

Le plus petit multiple commun de deux entiers naturels a et b est appelé le plus petit commun multiple de a et b , on le note PPCM (a , b)

Le PPCM de deux entiers naturels mis sous la forme de produit de facteur premier est égal au produit de tous les facteurs premier commun et non commun aux deux décompositions chaque facteur étant effectué de son plus grand exposant

Remarques :

- *Il y a une relation entre PPCM et PGCD,* $\text{PPCM}(a,b) = \frac{ab}{\text{PGCD}(a,b)}$
- *Si b divise a alors PGCD (a , b) =b et* $\text{PPCM}(a,b) = a$
- *Si a et b sont deux entier naturels premiers entre eux alors* $\text{PPCM}(a,b) = a\,b$ *(carPGCD(a, b)= 1)*

Exemple : **Calculer le PPCM (264,630)**

264	2	630	2
132	2	315	3
66	2	105	3
33	3	35	5
11	11	7	7
1		1	

$630 = 2 \times 3^2 \times 5 \times 7$

$264 = 2^3 \times 3 \times 11$

$PPCM(264, 630) = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 11$

$PPCM(264, 630) = 27720$

2^{eme} méthode

$PGCD(264, 630) = 2 \times 3 = 6$

$$PPCM(264,630) = \frac{264 \times 630}{PGCD(264,630)} = \frac{264 \times 630}{6} = 27720$$