Exercice n :1

Soit P le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique : 2 cm). Pour tout complexe *z* on considère dans P les points *M* d'affixe *z*, *N* d'affixe z^2 et *Q* d'affixe z^3 .

1. Déterminer les nombres complexes *z* pour lesquels deux au moins de ces trois points , *M*, *N* et *Q* sont confondus.

2. Dans ce qui suit on supposera *M*, *N* et *Q* deux à deux distincts. Exprimer les distances *MN* et *MQ* en fonction de *z*. Déterminer et construire dans P l'ensemble E des points *M* tels que *MN* = *MQ*.

3. Montrer que l'angle $(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MQ})$ a pour mesure un argument de *z* + 1. Déterminer et construire l'ensemble F des points *M* tels que le triangle *MNQ* soit rectangle en *M*.

4. Dans cette question *z* = −1 − *i*.

Calculer les affixes de *N* et *Q* et construire le triangle *MNQ* dans le plan P. Que peut on constater ? Expliquer ce résultat à partir des questions 2. et 3.

Exercice n :2

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. Unité graphique : 0,5 cm. On note *j* le nombre complexe $e^{i\frac{2\pi}{3}}$. On considère les points *A*, *B* et *C* d'affixes respectives *a* = 8, *b* = 6*j* et *c* = 8j^2.

Soit *A′* l'image de *B* par la rotation de centre *C* et d'angle $\frac{\pi}{3}$, *B′* l'image de *C* par la rotation de centre *A* et d'angle $\frac{\pi}{3}$, *C′* l'image de *A* par la rotation de centre *B* et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

1. Placer les points *A*, *B*, *C*, *A′*, *B′* et *C′* dans le repère donné.

2. On appelle *a′*, *b′* et *c′* les affixes respectives des points *A′*, *B′* et *C′*.

a. Calculer *a′*. On vérifiera que *a′* est un nombre réel.

b. Montrer que $b'=16e^{-i\frac{\pi}{3}}$. En déduire que *O* est un point de la droite (*BB′*).

c. On admet que $c'=7+7i\sqrt{3}$. Montrer que les droites (*AA′*), (*BB′*) et (*CC′*) sont concourantes en *O*.

3. On se propose désormais de montrer que la distance *MA+MB+MC* estminimale lorsque *M* = *O*.

a. Calculer la distance *OA* + *OB* + *OC*.

b. Montrer que $j^3=1$ et que $1+j+j^2=0$.

c. On considère un point *M* quelconque d'affixe *z* du plan complexe. On rappelle que *a* = 8, *b* = 6*j* et *c* = 8j^2.
Déduire des questions précédentes les égalités suivantes :

$$\left|(a-z)+(b-z)j^2+(c-z)j\right|=\left|a+bj^2+cj\right|=22.$$

d. On admet que, quels que soient les nombres complexes *z*, $|z+z'+z''|\le|z|+|z'|+|z''|$. Montrer que *MA+MB+MC* est minimale lorsque *M* = *O*.