Calcul algébrique, équations et inéquations

Méthode 1 → Développer et réduire une expression.

Pour développer et réduire une expression

- repérer les parenthèses de l'expression
- traiter les opérations par ordre de priorité
- grouper les termes par puissances décroissantes de x : on ne doit avoir qu'un occurrence de chaque terme à une puissance donnée (un terme en x, un terme en x^2...)

Exemple :

Développer puis réduire cette expression : A = $(3x + 4) - 2(x + 3)$

A = $(3x + 4) - 2(x + 3)$

A = $3x + 4 - 2x - 6$

A = $x - 2$

Méthode 2 → Factoriser une expression.

Pour factoriser une expression :

- rechercher le facteur commun aux différents termes de l'équation
- le faire apparaître s'il n'est pas visible
- mettre ce facteur commun devant une parenthèse regroupant les termes restants
- simplifier si besoin le contenu de la deuxième parenthèse

Exemple :

Factoriser cette expression : B = $(3x - 2)^2 - (3x - 2)(x + 5) + x(3x - 2)$

B = $(3x - 2)^2 - (3x - 2)(x + 5) + x(3x - 2)$

B = $(3x - 2)[(3x - 2) - (x + 5) + x]$

B = $(3x - 2)(3x - 2 - x - 5 + x)$

B = $(3x - 2)(3x - 7)$

Méthode 3 → Résoudre une équation du premier degré à une inconnue.

Pour résoudre une équation du premier degré à une inconnue :

- développer les deux membres de l'équation
- regrouper les termes semblables
- réduire le tout
- le terme en x sera un membre de l'équation, les termes restants seront dans l'autre membre
- isoler x dans le premier membre
- la valeur du deuxième membre sera la valeur de x

Exemple :

Résoudre l'équation $3(2x - 5) - 2(1 - x) = 7x - 4$

$3(2x - 5) - 2(1 - x) = 7x - 4$

On développe puis on réduit le membre de gauche, le second membre étant déjà sous forme réduite.

$6x - 15 - 2 + 2x = 7x - 4$

$8x - 17 = 7x - 4$

$8x - 7x = -4 + 17$

$x = 3$

Calcul algébrique, équations et inéquations

Méthode 4 → Résoudre une équation du second degré.

Pour résoudre une équation du second degré :

- factoriser cette équation
- la transformer en une équation produit
- résoudre chacune des équations du premier degré obtenues
- l'ensemble constitué des solutions de chacune de ces équations est l'ensemble solution de l'équation de départ

Exemple :

Résoudre l'équation du second degré : $(2x - 5)^2 - 9 = 0$

$(2x - 5)^2 - 9 = 0$ équivaut à $(2x - 5)^2 - 3^2 = 0$

On reconnaît la forme $a^2 - b^2$ du membre de gauche avec $a = (2x - 5)$ et $b = 3$

En utilisant l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, on obtient l'équation équivalente suivante $[(2x - 5) - 3]\,[(2x - 5) + 3] = 0$

$(2x - 5)^2 - 9 = 0$

$(2x - 5)^2 - 3^2 = 0$

$[(2x - 5) - 3]\,[(2x - 5) + 3] = 0$

$(2x - 8)(2x - 2) = 0$

d'où $2x - 8 = 0$ ou $2x + 8 = 0$

$x = 4$ $x = 1$

L'équation $(2x - 5)^2 - 9 = 0$ admet donc deux solutions : 1 et 4

D'où $S = \{1 ; 4\}$

Calcul algébrique, équations et inéquations

Méthode 5 → Résoudre une inéquation de premier degré à une inconnue.

Pour résoudre une inéquation du premier degré à une inconnue :

- développer les deux membres de l'inégalité
- regrouper les termes semblables
- isoler x d'un côté de l'inégalité
- écrire l'ensemble solution de l'inéquation sous forme d'un intervalle :
  - quand on trouve x strictement supérieur à n, on écrit $S =]n\ ;+\infty[$
  - quand on trouve x strictement inférieur à n, on écrit $S =]-\infty\ ;n[$
  - quand on trouve x inférieur ou égal à n, on écrit $S =]-\infty\ ;n]$
  - quand on trouve x supérieur ou égal à n, on écrit $S = [n\ ;+\infty[$

Exemple :

Résoudre l'inéquation $2x + 4 \leq 5x + 10$

$2x + 4 \leq 5x + 10$

$2x + 4 - 4 \leq 5x + 10 - 4$

$2x - 5x \leq 6$

$-3x \leq 6$

$\frac{-3x}{-3} \geq \frac{6}{-3}$

Attention au changement de sens de l'inégalité car on divise par un nombre négatif !

$x \geq -2$

L'inéquation $2x + 4 \leq 5x + 10$ admet donc comme solution : $S = [-2\ ;+\infty[$

Méthode 6 → Résoudre un système de deux équations à deux inconnues par la méthode par substitution.

Pour résoudre par substitution un système de deux équations :

- exprimer dans l'une des équations du système une inconnue en fonctions de l'autre
- remplacer dans la deuxième équation l'inconnue par cette nouvelle expression
- résoudre cette deuxième équation devenue équation du premier degré à une inconnue
- déduire de la valeur de la première inconnue obtenue celle de l'autre
- écrire la solution du système sous la forme d'un couple

Exemple :

Résoudre le système suivant : $\begin{cases} x + 5y = 13 \\ 4x + 3y = 18 \end{cases}$

Dans la première équation, comme le coefficient de x est 1, il est alors plus aisé d'exprimer x en fonction de y.

$x + 5y = 13$

$x = 13 - 5y$

Puis on remplace x par la valeur 13 – 5y dans la seconde équation.

$4x + 3y = 18$

$4\,(13 - 5y) + 3y = 18$

$52 - 20y + 3y = 18$

$-17y = 18 - 52$

$y = \dfrac{-34}{-17}$

$y = 2$

Enfin il faut remplacer y par la valeur 2 dans la première équation puis calculer la valeur de x.

$x = 13 - 5y$

$x = 13 - 5 \times 2$

$x = 3$ On en déduit que le couple (3 ; 2) est solution de l'inéquation.

Calcul algébrique, équations et inéquations

Méthode 7 → Résoudre un système de deux équations à deux inconnues par la méthode par combinaison linéaire.

Pour résoudre par combinaison linéaire un système de deux équations :

- choisir l'inconnue la plus facile à éliminer
- multiplier les deux membres de chacune des deux équations par des nombres choisis de façon à obtenir des coefficients de cette inconnue opposés (*a* et -*a* par exemple)
- additionner les deux égalités membre à membre
- résoudre l'équation du premier degré à une inconnue obtenue
- de la valeur de cette première inconnue obtenue, déduire celle de la deuxième
- écrire la solution du système sous forme d'un couple

Exemple :

Résoudre le système suivant : $\begin{cases} x + 5y = 13 \\ 4x + 3y = 18 \end{cases}$

Ici, il est plus aisé d'éliminer x en multipliant les deux membres de la première équation par -4,

ce qui donne : $-4(x + 5y) = -4 \times 13$

$-4x - 20y = -52$

On obtient alors le système équivalent suivant : $\begin{cases} -4x - 20y = -52 \\ 4x + 3y = 18 \end{cases}$

Après une addition membre à membre, on élimine les x car $-4x + 4x = 0$

d'où $-20y + 3y = -52 + 18$

$17y = -34$

$y = 2$

Il suffit de remplacer y par sa valeur dans l'une des deux équations pour calculer x.

$x + 5y = 13$

$x + 5 \times 2 = 13$

$x = 3$

La solution du système est la couple (3 ; 2)

Calcul algébrique, équations et inéquations

Méthode 8 → Résoudre un problème par la méthode algébrique.

Pour résoudre un problème mathématique de façon algébrique :

- identifier l'inconnue
- traduire l'énoncé en expression(s) algébrique(s)
- vérifier la valeur trouvée de x

Exemple :

Une directrice achète 53 cahiers de deux formats différents pour ses élèves. Le petit format est au prix de 1,50€ est le grand format au prix de 2€ l'unité. Sachant que sa dépense totale est de 97€, combien de cahiers de petit et de grand format a-t-elle achetés ?

1. Soit x le nombre de cahier de petit format et y le nombre de cahier de grand format.

2. Mise en équation du problème :

   « un total de 53 cahiers » peut être traduit par $x + y = 53$

   « une dépense totale de 97€ » peut être traduit par $1,5x + 2x = 97$

3. Résolution du système :

   $$\begin{cases} x + y = 53 \\ 1,5x + 2x = 97 \end{cases}$$

   On trouve $x = 18$ et $y = 35$

4. Vérification des résultats : $\begin{cases} 18 + 35 = 53 \\ 1,5 \times 18 + 2 \times 35 = 97 \end{cases}$

Conclusion :

La directrice a acheté 18 cahiers de petit format et 35 cahiers de grand format.

Calcul algébrique, équations et inéquations

Méthode 9 → Résoudre un problème par la méthode arithmétique.

Pour résoudre un problème par la méthode arithmétique :

- analyser de façon logique l'énoncé
- essayer de tirer de cette analyse en raisonnant de façon déductive et intuitive des calculs (addition, soustraction, multiplication et division) illustrant le problème posé
- faire ces calculs

Exemple :

Une directrice achète 53 cahiers de deux formats différents pour ses élèves. Le petit format est au prix de 1,50€ est le grand format au prix de 2€ l'unité. Sachant que sa dépense totale est de 97€, combien de cahiers de petit et de grand format a-t-elle achetés ?

D'après l'énoncé, on peut se ramener à la méthode intuitive (trouvée par tâtonnements) suivante : $2 - 1,5 = 0,5$

0,5e est le différence de prix entre le cahier grand format et le cahier petit format.

Si la directrice n'avait acheté que des cahiers de grand format, elle aurait payé 53×2 soit 106€

La différence avec sa dépense réelle est de $106 - 97$ soit 9€

Elle a donc acheté $\frac{9}{0,5}$, soit 18 cahiers de petit format.

Et par conséquent elle a acheté $53 - 18$, soit 35 cahiers de grand format.