1 Coordonnées dans l'espace

Dans un repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ orthonormé :

Si $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ alors :

• pour tout réel k, $k\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} kx \\ ky \\ kz \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \\ z+z' \end{pmatrix}$.

• les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont **colinéaires** si et seulement si il existe un réel k tel que $\overrightarrow{u}=k\overrightarrow{v}$.

• les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont **orthogonaux** si et seulement si $xx'+yy'+zz'=0$.

• la **norme** du vecteur $\overrightarrow{u}$ (c'est à dire sa longueur) est le réel noté $\|\overrightarrow{u}\|$ tel que : $\|\overrightarrow{u}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Si $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix}$ alors :

• le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est tel que : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B-x_A \\ y_B-y_A \\ z_B-z_A \end{pmatrix}$.

• le **milieu** I de $[AB]$ est tel que : $I\begin{pmatrix} x_I=\dfrac{x_A+x_B}{2} \\ y_I=\dfrac{y_A+y_B}{2} \\ z_I=\dfrac{z_A+z_B}{2} \end{pmatrix}$.

• la **distance** AB est telle que $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$.

• Trois points A, B et C (distincts 2 à 2) sont **alignés** si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

2 Vecteurs coplanaires

PROPRIÉTÉ

Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires, les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires si et seulement si il existe deux réels a et b tels que $a\overrightarrow{u}+b\overrightarrow{v}=\overrightarrow{w}$.

► *Exemple :* Montrons que $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}$ sont coplanaires.

• $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires.

On cherche a et b tels que $a\overrightarrow{u}+b\overrightarrow{v}=\overrightarrow{w} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}\left\{\begin{array}{l} 3b=3 \\ 4a-b=7 \\ -2a+2b=-2 \end{array}\right.$

• On résoud le système formé par deux des trois équations :

$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix}\left\{\begin{array}{l} 3b=3 \\ 4a-b=7 \end{array}\right.$. L_1 donne $b=1$. On en déduit avec L_2 que $a=2$.

• Les vecteurs seront coplanaires si a et b sont aussi solutions de la troisième équation.

Or, $-2a+2b=-2\times 2+2\times 1=-2$. a et b sont aussi solutions de L_3. Les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont bien coplanaires.

► **Remarque :** Pour montrer que les points A, B, C et D sont coplanaires, il suffit de prouver que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.

3 Équations de plan

PROPRIÉTÉS

• Tout plan admet une équation de la forme $ax+by+cz+d=0$ (a, b et c non tous muls).

• Un vecteur normal (orthogonal) au plan est le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

• Un plan dont un vecteur normal est $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ admet une équation de la forme $ax+by+cz+d=0$.

► *Exemple :* Soit P le plan d'équation $3x-4y+5z-7=0$. Un vecteur normal de P est $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$

► **Remarques :**
• Pour montrer que deux plans sont parallèles, il suffit de montrer qu'un vecteur normal de l'un est colinéaire à un vecteur normal de l'autre.
• Pour montrer que deux plans sont orthogonaux, il suffit de montrer qu'un vecteur normal de l'un est orthogonal à un vecteur normal de l'autre.

Comment déterminer une équation du plan (ABC) connaissant les coordonnées des points A, B et C ?

• On cherche un vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

• Le plan admet alors une équation de la forme $ax+by+cz+d=0$. Pour déterminer d, on exprime que les coordonnées du point A doivent vérifier l'équation du plan.

► *Exemple :* Déterminons une équation du plan (ABC) avec $A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

• Cherchons $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ tel que $\overrightarrow{u}$ soit orthogonal à $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et à $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

On obtient le système $\begin{cases} b+2c=0 \\ 5a+4b-2c=0 \end{cases}$. On prend alors $c=1$.
On en déduit que $b=-2c=-2$, puis que $5a=-4b+2c=-10$.
$a=2$, $b=-2$ et $c=1$ conviennent. Le plan admet une équation de la forme $2x-2y+z+d=0$.
• Les coordonnées de A doivent vérifier l'équation. On a donc $2\times 0-2\times 0+2+d=0 \Leftrightarrow d=-2$.
• Une équation du plan est : $2x-2y+z-2=0$.

4 Système d'équations d'une droite

PROPRIÉTÉ

Si une droite D est l'intersection des plans $P : ax+by+cz+d=0$ et $Q : a'x+b'y+c'z+d'=0$ alors $\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$ est un système d'équations de cette droite.

► **Remarque :** Pour déterminer un vecteur directeur d'une droite D, on détermine deux points distincts A et B de cette droite (en prenant $x=0$ et $y=0$, par exemple). Un vecteur directeur de D est alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$.

► *Exemple :* Soit D la droite définie par le système $\left\{ \begin{array}{l} x+4y=2 \\ x+y+z=5 \end{array} \right.$

Si $x=0$, on a $\left\{ \begin{array}{l} 4y=2 \\ y+z=5 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y=\frac{1}{2} \\ z=\frac{9}{2} \end{array} \right.$. Le point $A\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix}$ est sur la droite.

Si $y=0$, on a $\left\{ \begin{array}{l} x=2 \\ x+z=5 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=2 \\ z=3 \end{array} \right.$. Le point $B\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ est sur la droite.

Un vecteur directeur de la droite est donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$

► **Remarques :**

• Pour montrer que deux droites sont parallèles, il suffit de montrer qu'un vecteur directeur de l'une est colinéaire à un vecteur directeur de l'autre.

• Pour montrer que deux droites sont orthogonales, il suffit de montrer qu'un vecteur directeur de l'une est orthogonal à un vecteur directeur de l'autre.