

## GEOMETRIE DANS L'ESPACE

### I. Les programmes

#### 1. Cycle des apprentissages fondamentaux

- Compétences visées
  - Solides : cube, pavé droit
    - Distinguer, de manière perceptive, le cube et le pavé droit parmi d'autres solides (polyèdres et autres solides : boules, cylindres en particulier).
    - Utiliser le vocabulaire : cube, pavé droit, face, arête, sommet.

#### 2. Cycle des approfondissements

- Compétences visées
  - Solides : cube, pavé droit
    - Percevoir un solide, en donner le nom.
    - Vérifier certaines propriétés relatives aux faces ou arêtes d'un solide à l'aide des instruments.
    - Décrire un solide en vue de l'identifier dans un lot de solides ou de le faire reproduire sans équivoque.
    - Construire un solide.
    - Reconnaître, construire ou compléter un patron de cube, de parallélépipède rectangle.
    - Utiliser à bon escient le vocabulaire suivant : cube, parallélépipède rectangle ; sommet, arête, face.

### II. Les solides de l'espace

Les solides de l'espace peuvent être caractérisés par trois catégories d'éléments :

- des définitions, propriétés (en particulier pour les polyèdres, le nombre et la nature de leurs faces, le nombre de leurs arêtes et de leurs sommets) ;
- des représentations dans le plan : il y a plusieurs façons de représenter un objet de l'espace dans le plan : perspective cavalière<sup>1</sup>, axonométrique<sup>2</sup>, vue de dessus, dessous, ...

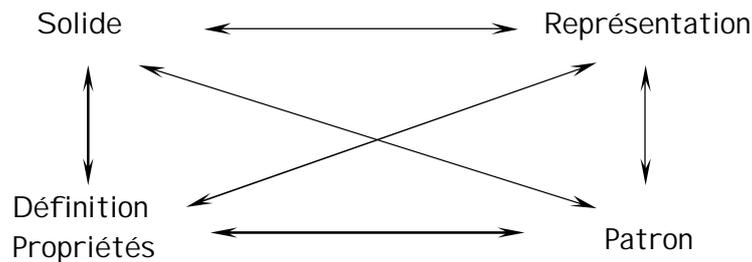
---

<sup>1</sup> Les faces parallèles au plan de projection sont représentées sans déformation en grandeur réelle.

<sup>2</sup> La projection se fait sur un plan non parallèle à l'une des faces.

- des patrons pour beaucoup de solides.

L'enseignement de la géométrie dans l'espace doit aider les élèves à mettre en relation ces éléments.



Ce travail s'amorce à l'école primaire et se poursuit au collège et au lycée. A l'école primaire, les solides pour lesquels des objectifs spécifiques sont formulés sont le cube, le parallélépipède et la sphère.

### III. Représentation des objets de l'espace dans le plan

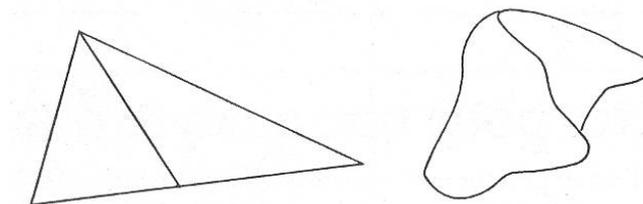
La représentation dans le plan d'un objet de l'espace pose des problèmes spécifiques dans la mesure où l'objet est dans un espace de dimension 3 et le dessin dans un espace de dimension 2.

La troisième dimension figure dans le plan de la feuille à l'aide d'indices de profondeur (comme par exemple avec les fuyantes dans la perspective cavalière).

#### 1. Les espaces topologique, projectif et métrique

- L'espace topologique

On ne prend en compte ni l'alignement, ni les mesures. Ainsi, les deux figures ci-dessous sont considérées comme équivalentes dans cet espace. Seules sont prises en compte les propriétés de voisinage des éléments, leur ordre, leur discontinuité ou continuité.



- L'espace projectif

Il y a conservation des propriétés par la projection, à savoir l'alignement, le milieu, le parallélisme. D'autre part, les positions relatives des figures les unes par rapport aux autres sont conservées.

- L'espace métrique (ou euclidien) dans lequel les distances sont conservées.

## 2. L'évolution des représentations de l'espace chez l'enfant

Dès son plus jeune âge l'enfant est amené à représenter des objets de l'espace dans le plan : dessin de ses parents, de son vélo, de son animal favori... Des chercheurs ont étudié l'évolution de ces dessins. Suite aux travaux de Luquet<sup>3</sup>, Piaget<sup>4</sup> distingue 3 stades :

- Stade 1 : incapacité synthétique (3-4 ans)

A ce stade, le dessin n'est plus un gribouillage (auquel l'enfant était parfois amené à donner une signification) ; il y a une volonté réelle de représenter un objet bien déterminé, mais les difficultés motrices, de concentration,... empêchent l'enfant de prendre en compte l'alignement, les proportions... Seules les propriétés topologiques de voisinage sont respectées dans les grandes lignes, mais pas toujours dans le détail (par exemple dans un dessin de bonhomme, l'enfant rattachera les doigts directement au bras). Les relations d'ordre ne sont pas respectées, les différents éléments de la figure sont souvent simplement juxtaposés (le chapeau du bonhomme sera suspendu au-dessus de sa tête).

- Stade 2 : « le réalisme intellectuel » (5-7 ans)

Le sujet dessine non pas ce qu'il voit de l'objet mais ce qu'il sait. Ainsi des éléments placés à l'intérieur de l'objet seront représentés par transparence (il dessinera l'oeuf avec le poussin à l'intérieur). Plusieurs vues sont souvent juxtaposées.

- Stade 3 : « le réalisme visuel » (8-9 ans avec de grandes disparités entre les enfants)

L'enfant cherche à tracer ce qu'il voit. Il est soucieux du rapport simultané des perspectives, des proportions, des mesures et des distances. L'espace projectif et métrique se construisent en même temps chez l'enfant.

## 3. Analyse des erreurs et difficultés des élèves

En ce qui concerne la représentation d'un objet de l'espace dans le plan, deux types de tâches peuvent être proposées aux élèves :

- représenter un objet de l'espace qu'ils ont sous les yeux ;
- reconnaître un objet à partir d'une représentation donnée.

---

<sup>3</sup> Luquet, Le dessin enfantin, édition Delachaux-Niestlé.

<sup>4</sup> Piaget, La représentation de l'espace chez l'enfant, édition PUF.

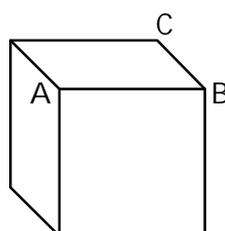
- Dans le cadre de la représentation d'un objet de l'espace, on peut s'interroger sur ce qu'est une erreur d'élève. Par exemple, si un élève, pour représenter une pyramide, dessine un triangle, est-ce une erreur ? On est tenté de répondre par l'affirmative, le dessin obtenu ne correspondant en rien à la perspective d'une pyramide. Mais quelle représentation de la tâche l'élève s'est-il construite ? Dans quelle mesure sa réponse n'est-elle pas logique avec cette représentation ? Par exemple, si on lui a demandé de représenter une pyramide pour qu'un de ses camarades en voyant le dessin puisse reconnaître un tel objet parmi d'autres solides et si parmi ces autres solides il y a des cubes, pavés, sphères, prismes à base pentagonale ou hexagonale, alors le dessin du triangle suffira certainement pour réussir la tâche.

Ce qu'on appelle erreur dans le cadre de la représentation d'un objet de l'espace, c'est un écart par rapport aux caractéristiques de la perspective. Les principaux écarts que les élèves peuvent être amenés à faire, outre les problèmes de maladresse manipulatrice, seront de :

- chercher à représenter plusieurs points de vue dans une même représentation ;
- ne représenter que la face avant sans avoir la possibilité de représenter les autres faces ;
- chercher, dans le cadre de la perspective cavalière, à conserver l'orthogonalité pour des parties du solide qui ne correspondent pas aux vues de face ou arrière ... ;
- chercher à conserver les distances pour des arêtes placées sur des fuyantes ;
- ne pas représenter, dans le cadre d'une perspective cavalière, les arêtes cachées en pointillés.

L'origine de ces erreurs est à renvoyer à la difficulté de l'élève à prendre en compte la tridimensionnalité de l'objet dans le plan, ainsi qu'à une mauvaise négociation entre le VU et le SU.

- Dans le cadre de la reconnaissance d'un objet ou des caractéristiques de cet objet à partir d'une représentation en perspective, les difficultés sont doubles :
  - L'élève n'arrive pas à percevoir la tridimensionnalité dans le dessin ; par exemple ci-dessous il repère un carré et deux parallélogrammes, mais à aucun moment ne voit un cube en perspective cavalière.



- L'élève n'imagine pas certaines caractéristiques de l'objet. Ainsi il ne perçoit pas que les droites (AB) et (BC) sont perpendiculaires.

L'origine de ces erreurs est à renvoyer à la difficulté que l'élève a pour s'approprier les conventions de la perspective, mais aussi à celle qu'il a pour construire une image mentale de l'objet à partir d'un tracé. C'est en effet à partir de cette image qu'il peut arriver à repérer les caractéristiques de l'objet représenté. Des caractéristiques, qui contrairement au dessin d'objets du plan, n'apparaissent pas directement sur le dessin.

#### IV. Tracé et reconnaissance de patrons de solides

Dans l'interrelation entre l'objet et le patron, deux types de tâches peuvent être proposées à l'élève : reconnaître si un dessin donné est le patron ou non d'un solide et construire le patron d'un solide.

##### 1. Analyse des erreurs et difficultés des élèves

Reconnaître un dessin donné comme patron d'un solide suppose pour l'élève de s'assurer :

- que toutes les faces du solide et elles seulement sont bien représentées, ce qui suppose de connaître leur nombre et leurs caractéristiques ;
- que les côtés des différents polygones qui représentent les faces et qui se correspondent après pliage sont de même dimension ;
- que deux faces ne se superposent pas.

Les erreurs de reconnaissance peuvent avoir plusieurs origines :

- l'élève ne s'assure que d'une condition ;
- l'élève n'arrive pas à vérifier mentalement la deuxième et la troisième condition. Cette vérification suppose en effet qu'il puisse effectuer mentalement des rotations de plusieurs polygones autour d'axes.

Ces images mentales se développent en entraînant l'élève à reconnaître des patrons, puis à vérifier ses pronostics en effectuant les pliages et en analysant ses propres erreurs.

##### 2. Variables didactiques

- La nature du solide : la familiarité que l'élève a avec ce solide, avec ces faces, le nombre de faces du solide...
- La présence ou non du solide quand l'élève résout la tâche.
- La possibilité ou non de découper et de plier le dessin.

### 3. Construction de patrons

Dans ce type de tâche, une variable est déterminante : le fait d'avoir ou non à sa disposition l'objet dont il faut construire le patron.

- L'objet est présent. L'élève peut construire le patron en le faisant rouler sur sa feuille et en traçant l'empreinte de chaque face. La seule difficulté consiste à s'assurer qu'il a bien tracé toutes les faces, seulement elles et jamais deux fois la même.

Si l'élève n'a pas le droit de manipuler l'objet, il peut construire le patron en « étalant » mentalement les différentes faces de cet objet. On retrouve alors ici les difficultés liées à la manipulation d'images mentales auxquelles peuvent s'ajouter des difficultés relatives à la nature des faces obtenues après étalement (c'est le cas par exemple de la face latérale du cylindre).

- L'objet est absent du regard de l'élève. Il y a deux possibilités :
  - si cet objet est représenté par un tracé en perspective cavalière, l'élève devra se représenter mentalement l'objet puis étaler toujours mentalement ses faces, d'où une double difficulté ;
  - si cet objet n'est pas représenté, il ne pourra s'agir que d'un objet familier : cube, pavé par exemple.

Enfin beaucoup d'élèves s'imaginent qu'un solide n'a qu'un seul patron ce qui peut, bien sûr, créer des difficultés pour la résolution de certains exercices.

### 4. Repérage des propriétés caractéristiques d'un objet dans l'espace

Il s'agit pour l'élève de reconnaître des propriétés d'un solide (nombre de faces, nature de ces faces, nombre d'arêtes, nombre de sommets...). Plusieurs cas peuvent se produire :

- L'élève a le solide à sa disposition. Dans ce cas il suffit de « lire » directement ses propriétés. Le décompte des faces, des sommets et des arêtes peut poser quelques difficultés dans la mesure où l'élève risque de compter deux fois les mêmes ou d'en oublier.
- L'élève voit le solide mais ne peut le manipuler, ni tourner autour. Dans ce cas, l'élève doit imaginer ce qu'il y a derrière la face avant, ce qui suppose qu'il a déjà eu l'occasion de manipuler ce solide. Il y a ici un risque encore plus important d'oublier des faces (des arêtes ou des sommets) ou de compter la même plusieurs fois. Les reconnaissances de propriétés d'orthogonalité peuvent être difficiles à repérer.
- L'élève ne dispose que du tracé en perspective de ce solide. Dans ce cas, il faut qu'il connaisse et se soit approprié les conventions de la perspective cavalière, en particulier le fait qu'elle ne conserve pas l'orthogonalité.

### 5. Difficultés au niveau du vocabulaire

Il y a des difficultés au niveau du vocabulaire dans la mesure où pour désigner les mêmes objets on utilise des mots différents suivant qu'on considère qu'ils appartiennent au solide ou à l'une de ses faces.

Par exemple, l'arête d'un solide devient le côté d'une face.

Inversement un même mot peut représenter des objets différents dans le même solide.

Par exemple, la hauteur.