Nombres et calculs - notion : Arithmétique

1. Multiples et diviseurs :

a) définitions

$a > 0$ $b > 0$ $a = k \times b$

- a est un multiple de b
- b est un diviseur de a
- b divise a
- a est divisible par b

b) critères de divisibilité d'un nombre entier

Divisibilité par :	Énoncé du critère :	Exemple :
1	Tout nombre entier est divisible par 1	* 1, 2, 3, 4 sont divisibles par 1.
2	Un nombre est pair, c'est-à-dire divisible par 2, si et seulement si son chiffre des unités est 0 ; 2 ; 4 ; 6 ou 8.	* 15679205738 est divisible par 2 car il se termine par 8 qui est un nombre pair ;
3	Un nombre est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3.	* 35796825 est divisible par 3 car : 3 + 5 + 7 + 9 + 6 + 8 + 2 + 5 = 45 et nous voyons que 45 est divisible par 3. On a même 4 + 5 = 9 (divisible par 3).
4	Un nombre est divisible par 4 si et seulement si le nombre formé par ses deux derniers chiffres est divisible par 4.	* 356 812 332 548 est divisible par 4 car il se termine par 48 et nous voyons que 48 est divisible par 4.
5	Un nombre est divisible par 5 si et seulement si son chiffre des unités est 0 ou 5.	* 12 968 275 est divisible par 5 car il se termine par 5.
6	* Un nombre est divisible par 6 si et seulement s'il est divisible à la fois par 2 et par 3.	* 24186 est divisible par 6, car son chiffre des unités est 6 (chiffre pair) ; et la somme de ses chiffres vaut 21=3x7.
8	Un nombre est divisible par 8 si le nombre formé par ses trois derniers chiffres est divisible par 8.	* 100 636 136 est divisible par 8 car 136 est divisible par 8.
9	Un nombre est divisible par 9 si la somme de ses chiffres est divisible par 9.	* 423 est divisible par 9 car 4 + 2 + 3 = 9 et 9 est divisible par 9.
10	Un nombre est divisible par 10 si son chiffre des unités est 0.	* 77 270 est divisible par 10 car il se termine par 0.
11	La différence entre la somme de ses chiffres de rangs pairs et la somme de ses chiffres de rangs impairs est un multiple de 11.	* 80927 est un multiple de 11 car (8 + 9 + 7) - (0 + 2) = 22 qui est un multiple de 11.
25	Un nombre est divisible par 25 s'il termine par 00, 25, 50, 75.	* 4575 est divisible par 25, car il termine par 75.

2. Nombres premiers

a) définition

Un nombre entier naturel est dit premier s'il admet exactement deux diviseurs distincts (1 et lui-même).

Exemples : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ...

b) décomposition d'un entier naturel en un produit de facteurs premiers

La méthode la plus efficace consiste à tester des divisions de n par les nombres premiers connus : 2, 3, 5, 7, 11... tant que le quotient n'est pas un nombre premier.

Exemple :

28	2
14	2
7	7
1	

$28 = 2 \times 2 \times 7 = 2^2 \times 7$

c) nombre de diviseurs d'un entier naturel

Pour $n = a^{\alpha}b^{\beta}$, le nombre de diviseurs est égal à $(\alpha + 1)(\beta + 1)$.

Exemple :

$36 = 2^2 \times 3^2$

Le nombre de diviseurs de 36 est égale à $(2 + 1)(2 + 1) = 3 \times 3 = 9$.

3. PGCD

a) définition

Le PGCD de plusieurs nombres entiers naturels est le nombre entier Plus Grand Commun Diviseur de ces nombres.

Le PGCD de différents nombres est un diviseur de chacun des nombres et est donc toujours inférieur ou égal à chacun des nombres.

b) techniques de détermination du PGCD

On écrit les décompositions en facteurs premiers des premiers des deux nombres. Le produit des facteurs premiers communs aux deux décompositions, chacun étant affecté de **son plus petit exposant**, le PGCD des deux nombres.

Exemple :

$48 = 2^4 \times 3$
$36 = 2^2 \times 3^2$

Donc PGCD $(48 ; 36) = 2^2 \times 3 = 12$

4. PPCM

a) définition

Le PPCM de plusieurs nombres entiers naturels est le nombre entier Plus Petit Commun Multiple non nul de ces nombres.

Le PPCM de différents nombres est un multiple de chacun de ces nombres et est donc toujours supérieur ou égal à chacun de ces nombres.

b) techniques de détermination du PGCD

On écrit les décompositions en produit de facteurs premiers des deux nombres.

Puis, on écrit le produit des facteurs premiers qui figurent dans l'une ou l'autre des décompositions, chacun étant prise avec son plus grand exposant. Ce produit est le PPCM des deux nombres.

Exemple :

$48 = 2^4 \times 3$
$36 = 2^2 \times 3^2$

Donc PGCD (48 ; 36) = $2^4 \times 3^2 = 144$

5. Relation entre le PGCD et le PPCM de deux nombres

Pour tout entier naturel a et b, on a la relation :

$a \times b$ = PGCD (a ; b) $\times$ PPCM (a ; b)

A l'aide de cette relation, si on connaît déjà le PGCD, on peut calculer rapidement le PPCM (et inversement).

6. Nombres premiers entre eux

a) définition

Deux entiers naturels dont le PGCD = 1 sont premiers entre eux, autrement dit lorsqu'ils n'ont pas de diviseur commun autre que 1.

a) technique pour savoir si deux nombres sont premiers entre eux

L'algorithme d'Euclide.

Exemple 1 : Est-ce que 15 et 8 sont premiers entre eux ?

En premier lieu, il faut soustraire le plus petit nombre (8) au plus grand nombre (15).
Ensuite, on soustrait le résultat (7) au plus petit (8) … si le résultat est égal à 1. Ce sont bien des nombres premiers.
15 - 8 = 7
8 - 7 = 1
Donc 15 et 8 sont premiers entre eux.

Exemple 2 : Est-ce que 17 et 11 sont premiers entre eux ?
17 - 11 = 6
11 - 6 = 5
6 - 5 = 1
Donc 17 et 11 sont premiers entre eux.