# I. Équations du 1er degré

## 1. Activité

a) Exerrcice1

Déterminer $x$ dans les cas suivants

- $x + 1 = 0$
- $2x = -1$
- $3x + 2 = 0$

b) Exercice2 :

Fatima a eu deux notes en mathématiques.
Entre les deux, elle a progressé de quatre points et sa moyenne est de 13 .
Quelles sont ces deux notes ?

c) Exercice 3

Un salarié dépense le quart de son salaire pour le logement et les deux cinquièmes pour la nourriture.
Il lui reste 378 € pour les autres dépenses.
Calculer mon salaire mensuel.

## 2. Définition :

On appelle équation du 1er degré à une seule inconnue l'expression : $ax + b = 0$ ou $a\ et\ b$ sont des nombres réels
Et l'ensemble des éléments qui vérifient l'équation c'est l'ensemble des solutions de l'équation

## 3. Résolution de l'équation : $\boldsymbol{ax + b = 0}$

- 1er cas : si $a \neq 0$
- 2e cas : si $a = 0$

| Résolution de l'équation $ax + b = 0$ | | |
|---|---|---|
| Les Cas | Résultats | Ensemble de solutions |
| $a \neq 0$ | Solution unique $x = \frac{-b}{a}$ | $S = \left\{\frac{-b}{a}\right\}$ |
| $a = 0\ et\ b = 0$ | Tous les nombres réels vérifient l'équation | $S = \mathbb{R}$ |
| $a = 0\ et\ b \neq 0$ | Pas de solutions | $S = \{\quad\} = \phi$ |

## 4. Remarque :

Deux équations sont équivalentes si et seulement s'ils ont le même ensemble de solutions

## 5. Équations qui se ramènent au 1er degré

**a) Équations de la forme : $(ax + b)(cx + d) = 0$**

**Exemple : $(2x + 1)(3x + 4) = 0$**

EL ROMANI

b) Équations de la forme : $\frac{ax+b}{cx+d} = 0$

Exemple : $\frac{2x+1}{3x+4} = 0$

## II. Inéquations du 1er degré

### 1. Définition :

Les expressions : $ax + b \geq 0$ , $ax + b > 0$ , $ax + b \leq 0$ ou $ax + b < 0$ sont des inéquations du 1er degré a une inconnue

### 2. Résolution de l'inéquation $ax + b \geq 0 \quad (I)$

- $Si\ a = 0$

L'inéquation $ax + b \geq 0 \quad (I)$ s'écrit $0x + b \geq 0 \quad (I)$ donc : $b \geq 0 \quad (I)$

- ✓ $Si\ b \geq 0$ alors l'inéquation est vérifier pour toute $x \in \mathbb{R}$ donc : $S = \mathbb{R}$
- ✓ $Si\ b < 0$ alors l'inéquation n'est pas vérifier pour tout nombre réels donc $S = \phi$

- $Si\ a \neq 0$

L'inéquation $ax + b \geq 0 \quad (I)$ s'écrit $a\left(x + \frac{b}{a}\right) \geq 0 \quad (I)$

Les signe de $a\left(x + \frac{b}{a}\right)$ est celui de $a$ et $\left(x + \frac{b}{a}\right)$ donc un tableau de signes peut nous aider à résoudre l'inéquation

| $x$ | $-\infty$ | $\frac{-b}{a}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $x + \frac{b}{a}$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $a\left(x + \frac{b}{a}\right)$ | Signe de$(-a)$ | | Signe de$(a)$ |

### 3. Exemple

Résolution de l'inéquation : $2x + 1 \geq 0$

On fait un tableau de signe de $2x + 1$

On $a = 2\ et\ b = 1$

| $x$ | $-\infty$ | $\frac{-1}{2}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $2x + 1$ | $-$ | $0$ | $+$ |

Donc : $2x + 1 \geq 0\ si\ x \in \left[\frac{-1}{2}, +\infty\right[$ ainsi $S = \left[\frac{-1}{2}, +\infty\right[$

Résolution de l'inéquation : $-2x + 3 \geq 0$

On fait un tableau de signe de $-2x + 3$

On $a = -2\ et\ b = 3$

| $x$ | $-\infty$ | $\frac{3}{2}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $-2x + 3$ | $+$ | $0$ | $-$ |

Donc : $-2x + 3 \geq 0\ si\ x \in \left]-\infty, \frac{3}{2}\right]$ ainsi $S = \left]-\infty, \frac{3}{2}\right]$

ELROMANI

## III. Équations du second degré à une inconnue

### 1. Activités

Résoudre les équations suivantes

$2x^2 - x = 0$ , $(E_1)$

$x^2 - 2 = 0$ , $(E_2)$

$2x^2 - x - 1 = 0$ , $(E_3)$

### 2. Définition

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$ s'appelle équation du second degré a une inconnue

### 3. Forme canonique du trinôme $ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$

a. On a : $ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$

$$= a\left(x^2 + 2 \times \frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right)$$

$$= a\left(\left(x^2 + 2 \times \frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right)$$

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)$$

Ainsi : $ax^2 + bx + c = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)$ c'est l'écriture canonique de $ax^2 + bx + c$

**b. Exemple**

L'écriture canonique de $x^2 + x - 1$ on a : $\begin{cases} a = 1 \neq 0 \\ b = 1 \\ c = -1 \end{cases}$

Donc : $x^2 + x - 1 = 1\left(\left(x + \frac{1}{2\times1}\right)^2 - \frac{1^2+4\times1\times1}{4\times1^2}\right) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$

### 4. Résolution de l'équation : $ax^2 + bx + c = 0$ , $(E)$

L'équation : $(E)$ est équivalente a : $a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right) = 0$ ; $(E)$

Comme $a \neq 0$ donc $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2} = 0$ ; $(E)$

On pose $\Delta = b^2 - 4ac$ s'appelle le discriminant de l'équation $(E)$

**1^er^ cas : si $\Delta > 0$**

$$(E)\ s'ecrit: \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 = 0$$

$$\left(x + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0$$

ELROMANI

Donc : $x = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ $ou$ $x = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

Ainsi l'équation $(E)$ admet deux solutions sont

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $et$ $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

**2ème cas : Si $\Delta = 0$**

$$(E)\ s'ecrit: \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$$

Donc : $x + \frac{b}{2a} = 0$ donc : $x = -\frac{b}{2a}$ on dit que l'équation admet une solution double c'est : $-\frac{b}{2a}$

**3ème cas : Si $\Delta < 0$**

$(E)\ s'écrit \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0$ ; $(E)$ L'équation est impossible

Car : $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} > 0$ ; $(E)$ donc non nul

5. **Propriété :**

**L'ensemble des solutions de l'équation :** $ax^2 + bx + c = 0$ , $(E)$ **est :**

- $\boldsymbol{S_E = \left\{x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\ , x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}\ , Si\ \Delta > 0,\ (deux\ solutions)}$
- $\boldsymbol{S_E = \left\{x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}\right\}\ ,\ Si\ \Delta = 0\ , (une\ solution\ double\ )}$
- $\boldsymbol{S_E = \phi\ \ si\ \ \Delta < 0\ ,\ (pas\ de\ solution\ )}$

6. **Résoudre les équations suivantes :**

$\boldsymbol{(E_1)\ :\ 2x^2 + x - 1 = 0}$

$\boldsymbol{(E_2)\ :\ 2x^2 + 2\sqrt{2}x + 1 = 0}$

$\boldsymbol{(E_3)\ :\ x^2 + \sqrt{3}x + 2 = 0}$

7. **Produit et sommes des racines**

**Soit l'équation :** $ax^2 + bx + c = 0$ , $(E)$ : tels que $a \neq 0\ et\ \Delta > 0$

**Alors :** $(E)$ **admet deux racines distincts** $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $et$ $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

Ainsi $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$ et $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$

Réciproquement

Soit $ax^2 + bx + c = 0$ , $(E)$ une équation du second degré tel que

$a \neq 0\ et\ \Delta > 0$ ; Alors si on pose $x_1 + x_2 = s$ et $x_1 \times x_2 = p$

$(E)$ S'écrit $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ donc : $x^2 - sx + p = 0$

Donc $x_1 et x_2$ sont solution de l'équation : $x^2 - sx + p = 0$

8. **Propriété**
   - **Si $x_1$ $et$ $x_2$ sont solution de l'équation : $ax^2 + bx + c = 0$ alors $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$ et $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$**
   - **Réciproquement si $x_1 + x_2 = s$ et $x_1 \times x_2 = p$ alors $x_1 et x_2$ sont solution de l'équation : $x^2 - sx + p = 0$**
9. **Exercice d'application :**
   - **Déterminer deux nombres réels $a$ $et$ $b$ tels que**

$$a + b = 1 \;\; et \;\; a \times b = -1$$

   - **Soit l'équation : $2x^2 - x - 2 = 0$ montrer que l'equation admet deux racines distincts et leurs somme est $\frac{1}{2}$ est leurs produit est $-1$**

ELROMANI