Géométrie dans l'espace.

I. Premiers éléments de géométrie dans l'espace

A. Positions

1. Positions relatives

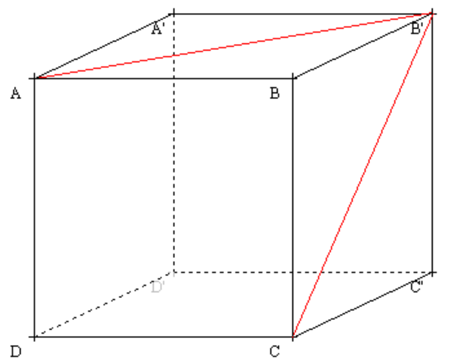
C

a) de deux droites dans l'espace

deux droites peuvent êtres :

- sécantes : elles sont alors coplanaires ou définissent un plan.
- Parallèles : elles sont coplanaires et si elles sont distinctes elles définissent un plan
- Ni parallèles ni sécantes : elles ne sont alors pas coplanaires.

Ex avec le cube :

	(AB') et (CB') sont sécantes en B' (AD) et (B'C') sont parallèles (AD) et (CB') ne sont ni sécantes, ni parallèles.

b) de deux plan dans l'espace

Des plans P et P' sont parallèles si P = P' ou si P 3 P' = ⇔. On peut écrire P // P'

Des plans P et P' sont sécants s'ils sont distinct (P γ P') et ont au moins un point commun P 3 P' γ ⇔.

Si deux plan sont sécants, leur intersection est une droite.

c) D'une droite et d'un plan dans l'espace

Une droite d est parallèle à un plan P si d est incluse dans ce plan ou si elle n'a aucun point commun avec P.

Une droite d est sécante avec un plan si elle a exactement un point commun avec ce plan.

2. Orthogonalité dans l'espace

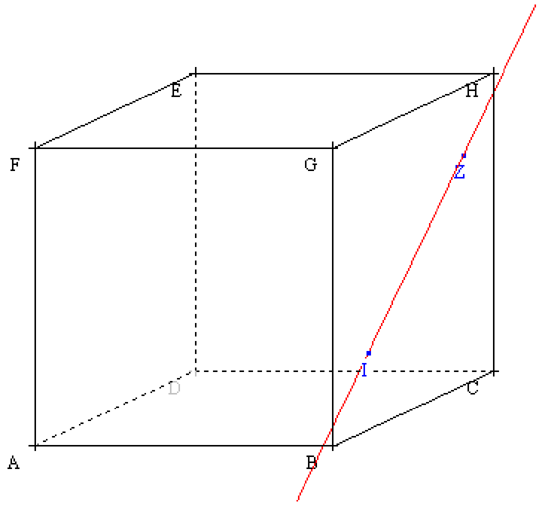
Deux droites sont **perpendiculaires** si elles sont sécantes et formes un angle droit. => (AB) et (BC)

Des droites d et d' sont **orthogonales** si elles sont parallèles à des droites sécantes perpendiculaires => (AB) et (GH)

Une droite d est perpendiculaire à un plan P si elle est perpendiculaire à deux droites sécantes incluses dans le plan P. on peut écrire d ζ P.

d est alors perpendiculaire à toutes les droites du plan. => (AB) perpendiculaire au plan (BCH) et par conséquent (AB) est perpendiculaire à (IZ) incluse dans le plan (BCH).

Deux plans sont perpendiculaires si l'un des plans contient une droite perpendiculaire à l'autre plan. => (ABC) ζ (BCH)



B. Solides particuliers

1. Polyèdres

Un polyèdre est un solide terminé par des surfaces planes. Ces surfaces sont des polygones et sont appelées faces du polyèdre.

L'intersection de deux faces adjacentes est une arête du polyèdre. Les extrémités des arêtes sont les sommets.

Il n'y a que cinq polyèdres qualifiés de réguliers : les solides de Platon

Nom	Nombre de faces	polygone
tétraèdre régulier	4	Triangles équilatéraux
L'octaèdre régulier	8	Triangles équilatéraux
L'icosaèdre régulier	20	Triangles équilatéraux
Cube	6	Carré
Dodécaèdre	12	Pentagone régulier

2. Cylindres à base circulaire.

Etant donné deux cercles C et C' de centre respectifs O et O', de même rayon, situés dans les plans parallèles distincts, toute droite passant par un point M de C, parallèle à (OO') coupe C en un point M' ; OMM'O' est un parallélogramme.

Un cylindre est un cylindre de révolution si son axe est perpendiculaire au plan des bases.

3. Prismes

Un prisme est un polyèdre délimité par deux faces polygonales isométriques situées dans des plans parallèles, ce sont ses bases et par des parallélogrammes.

Un prisme est droit si les faces autre que ses bases sont des rectangles.

Cas particuliers :

Parallélépipède : prisme dont toutes les faces sont des parallélogrammes.

Parallélépipède rectangle ou pavé droit : toutes les faces sont des rectangles.

Cube : toutes les faces sont des carrés.

4. Cônes.

Un cône à base circulaire est un solide limité par un disque, sa base, et la surface formée par les segments joignant les points du cercle de base à un point fixe, le sommet du cône. Les droites portant ces segments ainsi que les segments eux-mêmes sont appelés génératrices du cône.

Un cône est un cône de révolution si la droite joignant le somment au centre du disque de base est perpendiculaire au plan de la base. Cette droite est l'axe du cône.

5. Pyramides

Une pyramide est un polyèdre dont une face, sa base, est un polygone et dont les autres faces sont formées par les segments joignant les points de cotés de la base à un point fixe, le sommet de la pyramide. Les autres faces sont donc des triangles.

Pour le cône comme pour la pyramide, la hauteur est le segment liant le sommet au pieds de la perpendiculaire issue du sommet. La hauteur représente indifféremment le segment ou sa longueur.

Cas particulier ;

Un tétraèdre est une pyramide à base triangulaire.

Une pyramide est régulière si sa base est un polygone régulier et si la droite joignant le centre de sa base à son sommet est perpendiculaire à sa base..

6. Sphères

La sphère de centre O et de rayon R est l'ensemble des points M tels que OM = R.

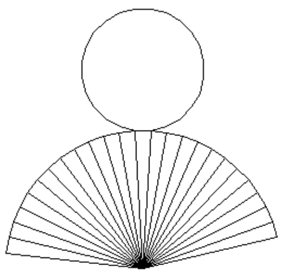
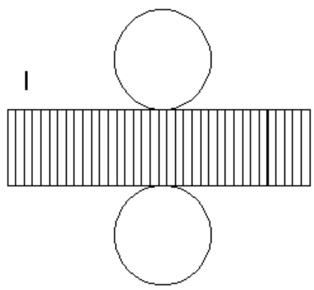
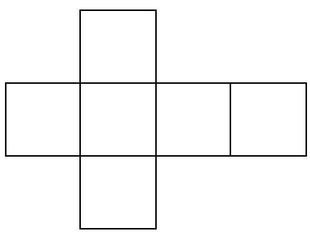
La section d'une sphère par un plan est un cercle dont le centre est le point d'intersection de la perpendiculaire au plan passant par le centre, et de ce plan

Lorsque le plan de section passe par le centre de la sphère, on obtient un grand cercle.

C. Patrons ou développements

Un patron de solide est une figure plane d'un seul tenant qui permet de reconstituer le solide par pliage (sans superposition)

Quelques patrons

Cône		Cylindre	
cube			

II. Démonstrations en géométrie dans l'espace.

A. Théorèmes généraux à propos de parallélisme dans l'espace

- Deux droites d et d' incluses respectivement dans deux plans distincts P et P' parallèles ne sont pas sécantes. Ces droites ne sont pas nécessairement parallèles.
- Si une droite d est parallèle à une droite d' et si la droite d' est elle-même parallèle à une droite d'', alors les droites d et d'' sont parallèles, ces trois droites ne sont pas nécessairement coplanaires.
- Si une droite d est parallèle à une droite d', alors la droite d est parallèle à tout plan contenant d'.
- Si deux droites distinctes d et d' sont parallèles à un plan, alors le plan défini par d et d' est parallèle au plan P.
- Etant donné un plan P et un point T, il existe un plan P' et un seul contenant T et parallèle au plan P.
- Si un plan P // à un plan P', si le plan P' est // à un plan P'', alors les plans P et P'' sont //.
- Si une droite d est // à un plan P et si le plan P est // à un plan P', alors la droite d au plan P'.
- Si une droite d est // à deux plans sécants P et P', alors la droite d est // à la droite d'intersection de P et de P'.
- Si d est incluse dans un plan P et si d est // à un plan P' sécant avec P, alors d // à la droite d'intersection de P avec P'.
- Si un plan P coupe deux plans // et distincts P' et P'' alors les droites d'intersection de P avec P' et avec P'' sont //.
- Si parmi trois plans deux quelconques ne sont pas // alors l'intersection des trois plans se réduit à un point.
- Etant donné un plan P et une droite d, // à P sans y être incluse, alors il existe un plan P' et un seul contenant d, tel que P' // P.
- Etant donné deux droites d et d' non coplanaires, il existe un plan P et un seul contenant d et // à d'.

B. Théorèmes généraux à propos de l'orthogonalité dans l'espace

- Si une droite d est perpendiculaire à une droite d' et si la droite d' est perpendiculaire à une droite d'', alors les droites d et d'' sont en position quelconque l'une par rapport à l'autre, c'est-à-dire qu'elles peuvent être sécantes ou // ou non coplanaires.
- Si un plan P est perpendiculaire à un plan P', si P' est perpendiculaire à un plan P'' alors P et P'' peuvent être // ou sécants.
- Si une droite d est perpendiculaire à un plan P, si une droite d' est // à d, alors d' est perpendiculaire au plan P.
- Si une droite d est perpendiculaire à un plan P et si un plan P' est parallèle au plan P, alors d est perpendiculaire au plan P'.
- Si une droite d est incluse dans un plan P et si une droite d', sécante avec d est incluse dans un plan P' perpendiculaire à P, alors d n'est pas nécessairement perpendiculaire à d'.
- Etant donné un plan P et un point A, il existe une droite d unique, passant par A et perpendiculaire à P.
- Etant donné un plan P et un point A, il existe une infinité de plans P', contenant A et perpendiculaire à P. Tous ces plans se coupent le long de la droite passant par A et perpendiculaire à P.
- Etant donné une droite d et un plan P tel que d ne soit pas perpendiculaire à P, il existe un seul plan P' contenant la droite d et perpendiculaire à P.
- Etant donné une droite d et un point A, il existe un plan P unique contenant A et perpendiculaire à d.
- Etant donné deux droites d et d' orthogonales et non coplanaires, il existe un seul plan P contenant d et perpendiculaire à d'.

C. Eléments de perspective cavalière

Pour dessiner un solide en perspective cavalière, il faut :

- Choisir un plan vertical de référence commode car tout ce qui est inclus sera dessiné en vraie grandeur, de même que tous les éléments des plans verticaux parallèles à ce plan.
- Choisir un angle α pour les fuyantes et un coefficient de réduction k.
- Repérer les points du solide par rapport à des plan verticaux, à des plans parallèles au plan de référence ou à des plans verticaux parallèles au plan de référence, ou à des plans verticaux perpendiculaires au plan de référence ;
- Utiliser les propriétés de conservation

La perspective cavalière conserve :

- le parallélisme ;
- l'alignement ;
- le rapport des longueurs portés sur la même droite.

Ex pour dessiner une pyramide de base rectangulaire (6x 4) avec un angle de fuite de 45° et un coefficient de réduction de 0,8.

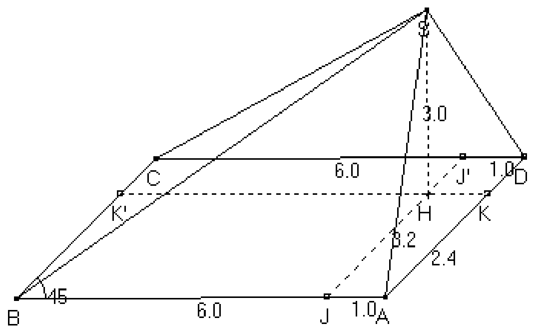
<table>
<tr>
<td>

- Tracer [AB]en taille réelle (6 cm)
- Tracer [AD] en taille réduite 4 * 0,8 = 3,2.
L'angle $\hat{A}$ mesurant 45°.
- Tracer [BC] // [AD] et de même longueur
- Tracer [CD] // [AB] et de même longueur
- Position de H : pieds de la hauteur

Par hypothèse A est à 1 cm de (AD) et 3 de (AB)
Se servir des droites (JJ')// (AD) et (KK') // (AB) avec AJ = J'D = 1 et AK = BK' = 0,8*3 = 24

- Placer S sur la verticale passant par H avec HS = 3 cm (grandeur réelle)
- Tracer les arêtes issues de S.

</td>
<td>



taille réduite à 77%

</td>
</tr>
</table>

D. Vues

Vue de face : image du solide par projection orthogonale sur un plan vertical parallèle au plan de référence, placé derrière le solide.

Vue de dessus (dessous) : image du solide par projection orthogonale sur un plan horizontal placé sous (au dessus) le solide.

Vue de droite (gauche) : image du solide par projection orthogonale sur un plan vertical perpendiculaire au plan de référence, placé à gauche (droite) du solide