

Chap 8 : Géométrie dans l'espace

✓ Apports théoriques

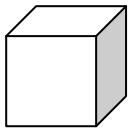
1. Les polyèdres

1.1 Définition

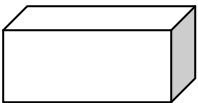
Un polyèdre est un solide délimité par des faces qui sont toutes des polygones.

- L'intersection de 2 faces est une arête.
- L'intersection de 2 arêtes est un sommet.
- Un polyèdre est convexe s'il est situé tout entier d'un même côté de tout plan contenant une quelconque de ses faces.

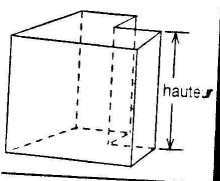
1.2 Des polyèdres particuliers



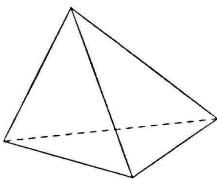
Un **cube** est un polyèdre qui a 6 faces carrées.



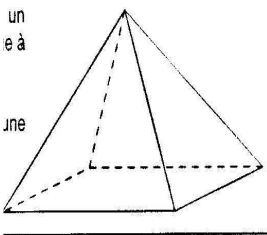
Le **parallélépipède rectangle** est un polyèdre qui a 6 faces rectangulaires.



Le **prisme droit** est un polyèdre qui a 2 faces superposables, les autres sont des rectangles.



Le **tétraèdre** est un polyèdre qui a 4 faces triangulaires.

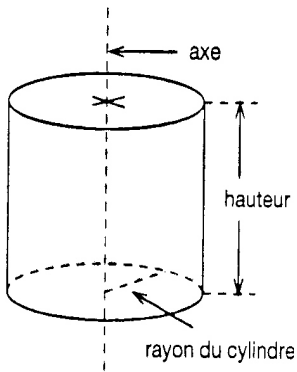


La **pyramide** est un polyèdre dont une face est un polygone convexe (appelé base de la pyramide) et toutes les autres faces sont des triangles dont un côté est un côté de la base et qui ont tous un sommet commun (appelé sommet de la pyramide).

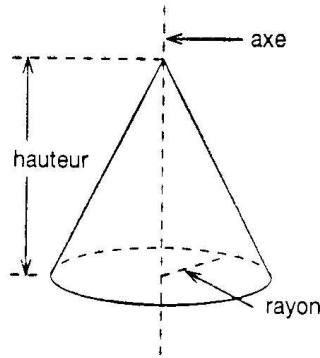
Si la base est un carré, on parlera de pyramide à base carrée.

Si la base d'une pyramide est un polygone régulier et si la projection orthogonale de son sommet est le centre de la base, on dit que la pyramide est régulière.

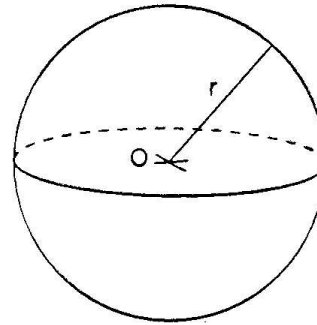
2. Autres solides



Le **cylindre** a 2 faces qui sont des disques superposables.



Le **cône** a une face qui est un disque.



La **sphère**, de centre O et de rayon r est l'ensemble des points M de l'espace situés à une distance égale à r de O .

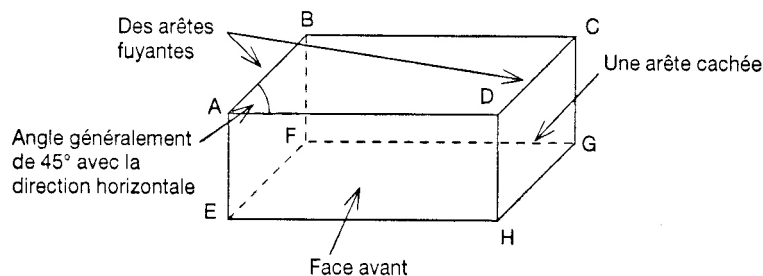
3. Représentation dans le plan d'un solide

Les projections

Il s'agit de représenter l'image du solide par une projection sur un plan.

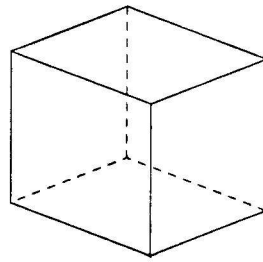
La perspective cavalière

- Le plan de projection est parallèle à une face du solide.
- Les faces parallèles au plan de projection sont représentées sans déformation et en grandeur réelle (à une échelle près).
- Les droites perpendiculaires au plan de projection se projettent selon une direction qui est toujours la même (= direction des fuyantes).
- L'angle avec la direction horizontale est généralement de 45° .
- Les distances sur cette direction sont réduites, le coefficient utilisé étant souvent 0,5.
- Les arêtes cachées sont représentées en pointillés.



La perspective axonométrique

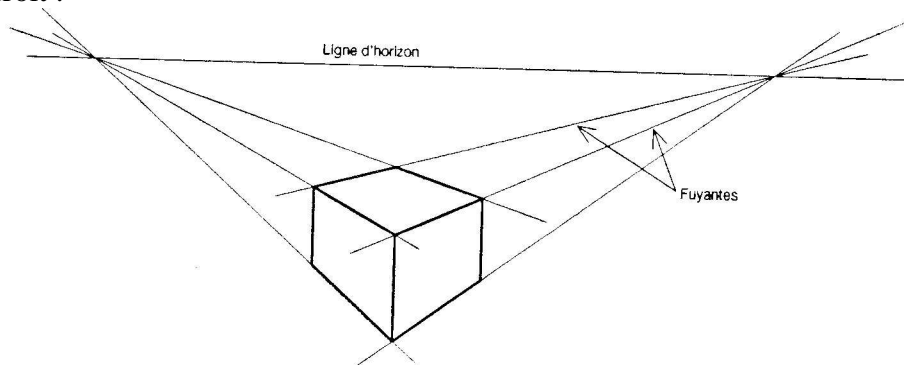
- La projection se fait sur un plan qui n'est pas parallèle à l'une des faces.
- Toutes les faces sont déformées (parallélogrammes).



La perspective artistique

Toutes les droites horizontales qui appartiennent à des plans qui ne sont pas parallèles au plan du dessin convergent en des points situés sur la ligne d'horizon appelée ligne de fuite.

Ex d'un pavé droit :



4. Patrons de solides

Le patron d'un solide est une figure géométrique plane telle que uniquement par pliage on puisse obtenir ce solide, sans chevauchement de face.

5. Orthogonalité et parallélisme dans l'espace

5.1 Droites et plans dans l'espace

Toute arête d'un polyèdre est portée par une droite.
De même, toute face est contenue dans un plan.

5.2 Droites parallèles ou perpendiculaires dans l'espace

Deux droites de l'espace sont parallèles si elles sont dans le même plan et si elles sont confondues ou si elles n'ont aucun point commun.

Deux droites de l'espace sont orthogonales si leurs parallèles menées par un point sont perpendiculaires.

5.3 Plans parallèles

Deux plans sont parallèles s'ils n'ont aucun point commun ou s'ils sont confondus.

5.4 Droite orthogonale à un plan

Une droite est orthogonale à un plan si elle est orthogonale à toute droite du plan.

Propriété : Si une droite est orthogonale à 2 droites sécantes du plan, alors elle est orthogonale au plan (donc à toutes droites du plan).

✓ Aspects didactiques

1. Représentation des objets de l'espace dans le plan

1.1 Les espaces topologique, projectif et métrique

Pour analyser les productions des élèves dans le cadre de la représentation d'objets de l'espace, on distingue 3 types d'espaces :

- **L'espace topologique** : on ne prend en compte ni l'alignement ni les mesures. Seules sont prises en compte les propriétés de voisinage des éléments, leur ordre, leur discontinuité ou continuité.
- **L'espace projectif** : conservation des propriétés par la projection : l'alignement, le milieu, le parallélisme. Positions relatives des figures par rapport aux autres sont conservées.
- **L'espace métrique** : conserve les distances.

1.2 L'évolution des représentations de l'espace chez l'enfant

3 stades :

- **Stade 1 : incapacité synthétique** (3-4 ans) :
 - o Volonté réelle de représenter un objet bien déterminé.
 - o Mais les difficultés motrices empêchent l'enfant de prendre en compte l'alignement, les proportions : seuls les propriétés topologiques de voisinage sont respectées dans les grandes lignes.
- **Stade 2 : « le réalisme intellectuel »** (5-7 ans) : le sujet dessine non pas ce qu'il voit de l'objet mais ce qu'il sait.
- **Stade 3 : « le réalisme visuel »** (8-9 ans) :
 - o L'enfant cherche à tracer ce qu'il voit.
 - o Souci du rapport simultané des perspectives, des proportions, des mesures et des distances.
 - o L'espace projectif et métrique se construisent en même temps.

1.3 Analyse des erreurs et difficultés des élèves

Dans le cadre de la représentation d'un objet de l'espace

Ce qu'on appelle erreur dans ce cadre c'est un écart par rapport aux caractéristiques de la perspective qui sont essentiellement des conventions.

Principaux écarts des élèves :

- Chercher à représenter plusieurs points de vue dans une même représentation.
 - Ne représenter que la face avant sans avoir la possibilité de représenter les autres faces.
 - Chercher, dans le cadre de la perspective cavalière, à conserver l'orthogonalité pour des parties du solide qui ne correspondent pas aux vues de face ou arrière.
 - Chercher à conserver les distances pour des arêtes placées sur des fuyantes.
 - Ne pas représenter, dans le cadre d'une perspective cavalière, les arêtes cachées en pointillés.
- **Difficulté de l'élève à prendre en compte la tridimensionnalité de l'objet dans le plan.**

Dans le cadre de la reconnaissance d'un objet

- L'élève n'arrive pas à percevoir la tridimensionnalité dans le dessin.
- L'élève n'imagine pas certaines caractéristiques de l'objet.

→ Difficulté à s'approprier les conventions de la perspective ; difficulté à construire une image mentale de l'objet à partir d'un tracé.

2. Tracé et reconnaissance de patrons de solides

2.1 Reconnaissance de patrons

Reconnaître un dessin donné comme patron d'un solide suppose pour l'élève de s'assurer :

- Que toutes les faces du solide et elles seulement sont bien représentées, ce qui suppose de connaître leur nombre et leurs caractéristiques.
- Que les côtés des différents polygones qui représentent les faces et qui se correspondent après pliage sont de même dimension.
- Que 2 faces ne se superposent pas.

Principales variables didactiques

- La nature du solide : familiarité que l'élève a avec ce solide.
- La présence ou non du solide quand l'élève résout la tâche.
- La possibilité ou non de découper et de plier le dessin.

Origines des erreurs de reconnaissance

- L'élève ne s'assure que d'une condition (surcharge cognitive ou non-appropriation de l'intérêt des autres conditions).
- L'élève n'arrive pas à vérifier mentalement la 2^{ème} et la 3^{ème} conditions.

2.2 Construction de patrons

Variable déterminante : avoir ou non à sa disposition l'objet dont il faut construire le patron.

- **L'objet est présent :**
 - o L'élève peut construire le patron en le faisant rouler sur sa feuille et en traçant l'empreinte de chaque face.
 - o Difficulté : s'assurer que toutes les faces sont dessinées et pas deux fois la même.
 - o Si l'élève n'a pas le droit de manipuler l'objet, il peut construire le patron en « étalant » mentalement les différentes faces de cet objet.
- **L'objet est absent du regard de l'élève :** 2 possibilités :
 - o Si cet objet est représenté par un tracé en perspective cavalière, l'élève devra se représenter mentalement l'objet puis étaler toujours mentalement ses faces : double difficulté.
 - o Si cet objet n'est pas représenté, il ne pourra s'agir que d'un objet familier : cube, pavé...

→ Certains élèves s'imaginent qu'un solide n'a qu'un seul patron.

3. Repérage des propriétés caractéristiques d'un objet de l'espace

Nombre de faces, nature de ces faces, nombre d'arêtes, nombre de sommets...

- **L'élève a le solide à sa disposition** : il suffit de « lire » directement ses propriétés (difficulté : compter une seule fois).
- **L'élève voit le solide mais ne peut la manipuler, ni tourner autour** : l'élève doit imaginer ce qu'il y a derrière la face avant (suppose qu'il a déjà eu l'occasion de manipuler ce solide). Difficulté encore plus importante d'oublier des faces (ou arêtes, sommets) ou d'en compter un/une plusieurs fois.
- **L'élève ne dispose que du tracé en perspective de ce solide** : il faut qu'il connaisse et qu'il se soit approprié les conventions de la perspective cavalière.