Similitudes Directes

Exercice 1

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$, on considère les points A, B, A' et B' d'affixes : $z_A = 2 - i$, $z_B = -1 + 2i$, $z_{A'} = 1$ et $z_{B'} = 1 + 6i$.
Déterminer le centre, le rapport et l'angle de la similitude directe transformant A en A' et B en B'

Exercice 2

Soit ABC un triangle isocèle rectangle en A tel que $(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}$.

Déterminer le centre, le rapport et l'angle de la similitude directe transformant A en B et B en C.

Exercice 3

Soit A un point donné du plan orienté ; soit (C) un cercle donné. (son centre sera nommé I)
B est un point variable qui décrit le cercle (C). On construit le point D tel que le triangle ABD est rectangle en D et $(\overrightarrow{BA}\ ;\overrightarrow{BD}) = \frac{\pi}{3}$.

Déterminer et construire le lieu des points D, lorsque B décrit le cercle (C).

Exercice 4 :

Soient les points A, B, A', B' d'affixes : $z_A = 1$; $z_B = 2 + 2i$; $z_{A'} = -1 + i$; $z_{B'} = 2$.

1) Montrer qu'il existe une unique similitude indirecte f, que l'on déterminera par son écriture complexe, telle que f(A) = A' et f(B) = B'.

2) Soit C le point d'affixe $Z_C = \frac{7}{2}$.

a) Calculer l'affixe du point C' = f(C).
b) Montrer que ABC et A'B'C' sont des triangles isocèles.

Exercice 5 :

ABCD un carre, M un point de la droite (DC), la perpendiculaire en A à la droite (AM) coupe la drote (BC) en N.
1° Demontrer que AMN est un triangle rectangle isocele
2° Determiner le lieu geometrique du milieu I du segment [MN], lors que M decrit (DC)

Exercice 6 :

ABCD est un quadrilatere convexe de sens direct, on construit exterieurement aux cotés de ce quadrilatère les carrées AMNB, BPQC, CRSD et DUTA, de centres respectifs O_1, O_2, O_3 et O_4

1° Soit S_D la similitude de centre D, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$, S_B la similitude de centre B, de rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$. Démontrer que l'image par $S_B o S_D$ de O_3 est O_2

2° Soit S'_D la similitude de centre D, de rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$, S'_B la similitude de centre B, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

Démontrer que l'image par $S'_D o S'_B$ de O_1 est O_4

3° a) Démontrer que $S_B o S_D = S'_D o S'_B$
b) En déduire que les segments $[O_1O_3]$ et $[O_2O_4]$ sont perpendiculaires et de même longeur

Exercice 7 :

Soit $(O;\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormé direct. On considère les points $A(2+i)$ et $B(-1-3i)$ et on note h l'homothètie de centre A et de rapport -2 et R la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

1° Donner l'ecriture complexe des transformations h, R, $R\circ h$ et $h\circ R$
2° Déterminer la nature et les élèments caracteristiques de la transformation $S = R\circ h$
3° Déterminer une homothètie h' de rapport positif et une rotation R' de même centre que h' telles que $S = h'\circ R' = R'\circ h'$

Exercice 8 :

Soit OAB un triangle tel que $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$ et (C) le cercle, de centre Ω, circonscrit au triangle OAB. On désigne par I le point de (C) diamétralement opposé à B.
1° On appelle S la similitude directe de centre I qui transforme A en B.
a) Déterminer l'angle de la similitude S.
b) Quelle est la nature de IAB ? En déduire la nature de S.
2° Soit G le point défini par $\overrightarrow{GA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GB}$. La droite (IG) coupe (C) en K. On appelle S' la similitude de centre K qui transforme A en B.
a) Déterminer l'angle de S'
b) On se propse de déterminer le rapport de S'. Montrer que $\overrightarrow{KA}\cdot\overrightarrow{KB} = -\frac{\sqrt{2}}{2}KA\cdot KB$.
On désigne par H le projeté orthogonal de A sur la droite (BK). Exprimer $\overrightarrow{KH}$ en fonction de $\overrightarrow{KB}$. En déduire que $\overrightarrow{KA}\cdot\overrightarrow{KB} = -\frac{1}{2}KB^2$. Déterminer le rapport de la similitude S'.

Exercice 9 :

Dans le plan orienté on considère un triangle ABC non rectangle et de sens direct. A l'exterieur du triangle, on construit les carrés AQPB, ACRS et BUTC de centres respectifs O_1, O_2 et O_3.
On appelle (C_1) et (C_2) les cercles circonscrit aux carrés AQPB et ACRS et I le milieu de [BC].
1° Les cercles (C_1) et (C_2) se coupent en A et en un autre point A'. Montrer que A' est sur le cercle de diamètre [BC].
2° Soit r_1 et r_2 les rotations de centres O_1 et O_2 et de même angle $\frac{\pi}{2}$.
a) Quelle est la nature de $r_2\circ r_1$?
b) Quelle est l'image de B par $r_2\circ r_1$?
c) En déduire les élèments caracteristiques de $r_2\circ r_1$.
d) Démontrer que le triangle IO_1O_2 est rectangle et isocèle (on pourra utiliser le point $J = r_1(I)$.
3° a) Quelle est l'image du triangle ABO_3 par la similitude de centre B, de rapprt $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$?
b) Déterminer une similitude dans lequel le triangle AO_1O_2 ait pour image AQC.

c) Prouver que les segments $[AO_3]$ et $[O_1O_2]$ sont orthogonaux et de même longueur.

Exercice 10 :

Soit $(O;\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormé du plan P. Pour tout réel α, on note S_α l'application de P dans P qui associe à tout point M(x,y) le point M'(x',y') tel que $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \alpha y \\ y' = \alpha x + \frac{1}{2}y + 1 \end{cases}$

1° Démontrer que S_α est une similitude directe plane.

2° Pour tout point A de P on note E_A l'ensemble des images de A par S_α. Quelle est la nature de E_A ? Discuter puis donner une construction géométrique simple de E_A à partir des points O et A. Soit F l'ensemble des points A tels que $A \in E_A$. Donner une équation cartésienne de F et construire F.

3° Montrer que toute application S_α admet un point invariant et un seul Ω_α. Quel est l'ensemble des points Ω_α lors que α décrit $\mathbb{R}$?

Exercice 11 :

Dans le plan orienté, ABCD est un carré direct de centre O. On désigne par r le quart de tour direct de centre A, par t la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ et par h l'homothétie de centre C et de rapport $\sqrt{3}$.

1° a) Prouver que $r' = t \circ r$ est une rotation dont on précisera l'angle.

b) Déterminer $r'(A)$ et $r'(B)$ puis en déduire le centre de r'

2° a) Montrer que $f = r' \circ h$ est une similitude directe dont on précisera l'angle.

b) Soit I le centre de f. Déterminer f(C) et prouver que $ID = \sqrt{3}\ IC$ et $(\overrightarrow{IC},\overrightarrow{ID}) = \frac{\pi}{2}$.

c) Déterminer et construire l'ensemble Γ des points M tels que $(\overrightarrow{MC},\overrightarrow{MD}) = \frac{\pi}{2}$.

Donner une mesure de l'angle $(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CI})$; placer alors I sur la figure.

d) Prouver que l'ensemble Γ' des points M du plan tels que $MD^2 - 3MC^2 = 0$ est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice 12 :

Dans le plan orienté, ABC est un triangle tel que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et $(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$

Soit I le symetrique de A par rapport au milieu de [BC] et H le pied de la hauteur issue de A dans ABC.

1° Soit S_1 la similitude directe de centre A et qui transforme H en B.

a) Déterminer les élèments caracteristiques de S_1

b) Montrer que $S_1(C) = I$. En déduire l'image de la droite (BC) par S_1.

2° Soit S_2 la similitude directe de centre A qui transforme B en C.

a) Déterminer l'image de la droite (BI) par S_2 .

b) Soit M un point de (BI) et $M' = S_2(M)$; on suppose que M et M' sont disticts de I. Montrer que les quatres points A, M, I , M' sont cocycliques.

Exercice 13 :

A, B, C sont trois points non alignés du plan orientés tels que $AB < AC$

On pose $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \alpha\ [2\pi]$. Soit d_1 la démi-droite de support (AB) d'origine B, ne contenant pas A et d_2 la démi-droite de support (AC) d'origine C contenant A. On place sur d_1 un point M distinct de B et sur d_2 un point N tel que CN = BM.

1° Justifier l'existance d'une unique rotation r transformant B en C et M en N et préciser l'angle de r en fonction de α.

2° a) Démontrer que le centre O de r est un point du cercle circonscrit au triangle ABC.

b) Déterminer la position du point O.

3° Soit f la similitude directe de centre O transformant B en M.

a) Démontrer que $f \circ r = r \circ f$.

b) En déduire que f(C) = N puis que $\dfrac{MN}{BC} = \dfrac{OM}{OB}$

4° construire le point M de d_1 et le point N de d_2 sachant que BM = CN et MN = BC .

Exercice 14 :

Dans un plan orienté, OAB est un triangle rectangle de sens direct en O. Soit Δ une droite variable passant par O ; on appelle A' et B' les projetés orthogonaux de A et B sur Δ.

1° a) Justifier l'existence d'une similitude directe S telle que S(O) = A et S(B) = O. Pourquoi S n'est elle pas une translation ?

b) déterminer l'angle de S.

c) Soit Ω le centre de S. Démontrer que Ω appartient aux cercles de diamètre [OA] et [OB] ; en déduire que Ω est le pied de la hauteur issue de O dans le triangle OAB.

2° On appelle D la droite passant par B et orthogonal à Δ.

a) Déterminer S(D) et S(Δ) ; en déduire S(B')

b) Déduire de ce qui précéde que le cercle de diamètre [A'B'] passe par un point fixe quand D varie.

Exercice 15 :

ABC est un triangle équilatèral indirect du plan orienté. On note Δ la droite orthogonale à (AB) et passant par C,et I le point de Δ tel que $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AI}\right) = \dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$. Enfin on note S la similitude directe de centre A telle que S(C) = I et la S' la similitude directe de centre B telle que S'(I) = C.

1° a) Prouver que $r = S \circ S'$ est une rotation d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

b) Déterminer le centre de r.

2° On associe à tout point M distinct de A, B, C, les points N et P tels que N = S(M) et S'(P) = M.

a) Déterminer les angles $\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}\right)$ et $\left(\overrightarrow{BP}, \overrightarrow{BM}\right)$.

b) On note σ la similitude directe de centre A telle que $\sigma(c) = M$. Comparer $\sigma \circ S = S \circ \sigma$. En déduire $\sigma(I)$ puis déterminer l'angle $\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MN}\right)$. En déduire une construction de N puis placer M et N.

c) Construire de même P (on pourra utiliser la similitude directe σ', de centre B, telle que $\sigma'(I) = P$).

3° Prouver que IP = IN et que $\left(\overrightarrow{IP}, \overrightarrow{IN}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.