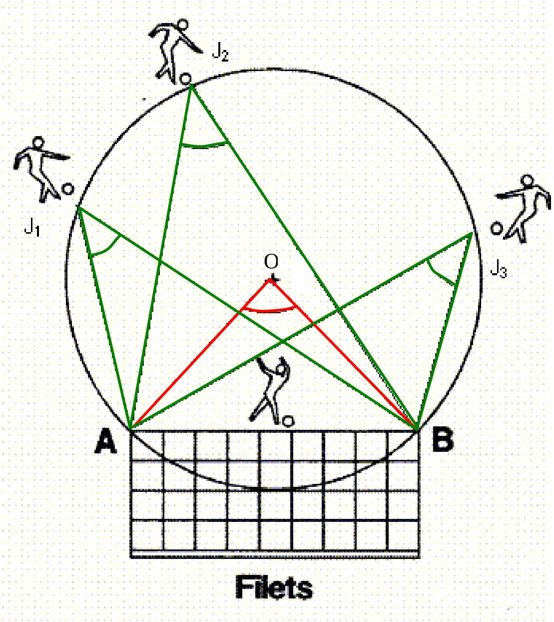
ANGLES INSCRITS, ANGLE AU CENTRE
POLYGONES REGULIERS

I. Définitions

1) Exemple d'introduction

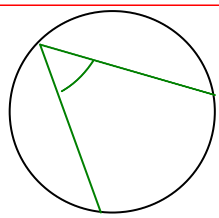


En mesurant, on constate que : $\widehat{AJ_1B} = \widehat{AJ_2B} = \widehat{AJ_3B} = 46°$ et $\widehat{AOB} = 92°$

2) Angle inscrit et angle au centre

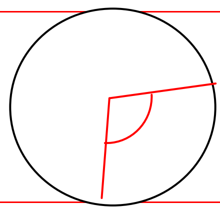
a) $\widehat{AJ_1B}$, $\widehat{AJ_2B}$ et $\widehat{AJ_3B}$ sont des angles inscrits.

Un angle inscrit est formé par deux cordes issues d'un même point du cercle



b) $\widehat{AOB}$ est un angle au centre.

Un angle au centre est un angle dont le sommet est au centre du cercle.



II. Théorème et conséquence

La démonstration du théorème se fait en trois étapes.

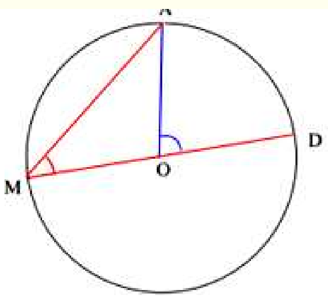


Fig. 1

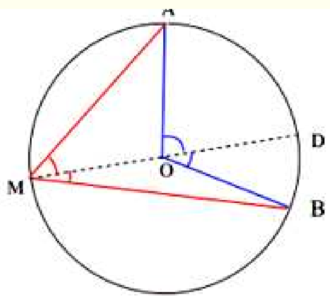


Fig. 2

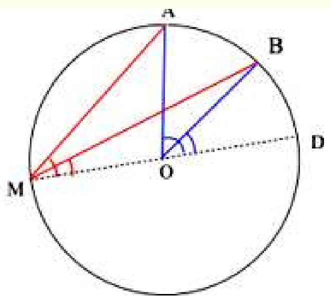


Fig.3

1ère étape : Fig. 1

Soit $\widehat{\mathbf{AMD}} = \alpha$.

On sait que AOM est un triangle isocèle (OM=OA) or les angles à la base d'un triangle isocèle sont égaux.

Donc $\widehat{MAO} = \widehat{AMO} = \alpha$.

Comme la somme des angles d'un triangle est égale à 180°, pour le triangle AOM, on peut écrire que :

$\widehat{AOM} = 180° - (\widehat{AMO} + \widehat{MAO}) = 180° - 2\alpha$.

On sait que M, O et D sont alignés donc $\widehat{MOD} = 180°$.par conséquent $\widehat{AOD}$ et $\widehat{AOM}$ sont supplémentaires.

Donc $\widehat{\mathbf{AOD}} = 180° - \widehat{AOM} = 180° - (180° - 2\alpha) = 2\alpha = \mathbf{2}\ \widehat{\mathbf{AMD}}$

2ème étape : Fig. 2

Soient $\widehat{AMD} = \alpha$ et $\widehat{BMD} = \beta$.

D'après la 1ère étape, $\widehat{AOD} = 2\alpha$ et $\widehat{BOD} = 2\beta$.

D'où $\widehat{AMB} = \alpha + \beta$ et $\widehat{\mathbf{AOB}} = 2\alpha + 2\beta = 2(\alpha + \beta) = \mathbf{2}\ \widehat{\mathbf{AMB}}$

3ème étape : Fig 3.

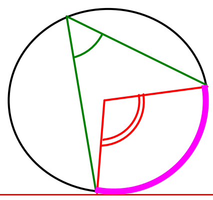
Soient $\widehat{AMD} = \alpha$ et $\widehat{BMD} = \beta$.

D'après la 1ère étape, $\widehat{AOD} = 2\alpha$ et $\widehat{BOD} = 2\beta$.

D'où $\widehat{AMB} = \alpha - \beta$ et $\widehat{\mathbf{AOB}} = 2\alpha - 2\beta = 2(\alpha - \beta) = \mathbf{2}\ \widehat{\mathbf{AMB}}$

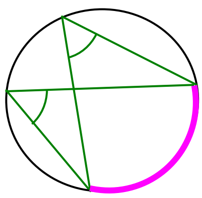
Théorème :

La mesure d'un angle au centre est le double de celle de l'angle inscrit qui intercepte le même arc.



Conséquence:

Deux angles inscrits qui interceptent le même arc ont la même mesure.



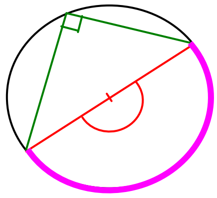
Démonstration :

Deux angles inscrits qui interceptent le même arc ont nécessairement le même angle au centre associé. Par conséquent leurs mesures égalent la moitié de celle de cet angle au centre. Par conséquent ils ont la même mesure.

Remarque :

Si l'angle au centre est plat (180°),
alors un angle inscrit interceptant le même arc
mesure 180 : 2 = 90°

On retrouve le théorème du triangle rectangle inscrit vu en 4e.



III. Polygones réguliers

a. Définition :

Un polygone est dit « **régulier** » quand :

- Tous ses côtés ont la même longueur.
- Tous ses angles ont la même mesure.

Exemple *:* Un triangle équilatéral et un carré sont des polygones réguliers.

b. Cercle circonscrit :

Dans un polygone régulier, il existe un cercle de centre O qui passe par tous les sommets.
On appelle ce cercle le **cercle circonscrit au polygone**.
Le point O est appelé **centre du polygone**.

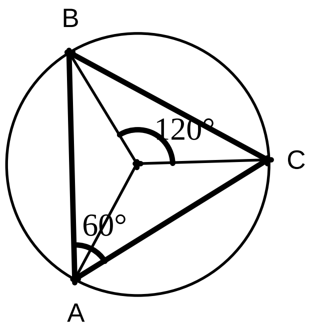
Propriété : Dans un polygone régulier, tous les angles au centre sont égaux.

Conséquence *:* L'angle formé par deux sommets consécutifs et de sommet O est égal à (360/n), où n est le nombre de côtés du polygone.

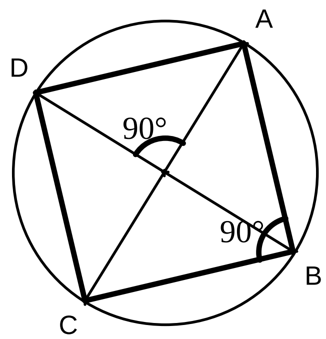
Exemples :

TRIANGLE EQUILATERAL	CARRE	HEXAGONE REGULIER
n = 3	n = 4	n = 6
$\alpha = 360/3 = 120°$	$\alpha = 360/4 = 90°$	$\alpha = 360/6 = 60°$

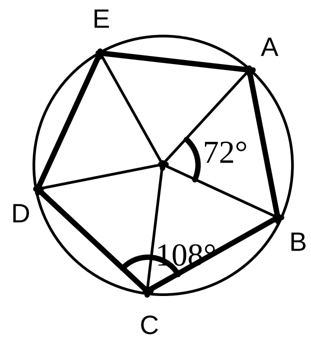
Figures *:*



Triangle équilatéral ABC



Carré ABCD



Pentagone régulier ABCDE