Chapitre I Fonctions linéaires et affines

Attendus de fin de cycle 4

- **Résoudre des problèmes de proportionnalité**
- **Comprendre et utiliser la notion de fonction**

Les connaissances à acquérir

Connaître la définition et l'orthographe des mots suivants :
proportionnalité, coefficient de proportionnalité, fonction linéaire, pourcentage, augmentation, réduction, fonction affine, coefficient directeur, ordonnée à l'origine

	Les compétences à travailler
H 1	**Reconnaitre et utiliser une fonction linéaire**
H 2	**Reconnaitre et utiliser une fonction affine**

Objectif H1 Reconnaitre et utiliser une fonction linéaire

Activité 1

Sur un site de téléchargement, une minute de musique au format MP3 coûte 0,30 €.

❶ Compléter le tableau suivant :

Nombre de minutes	2	3	5	10	27
tarif					

❷ Ce tableau est-il un tableau de proportionnalité ? si oui, quel est le coefficient de proportionnalité ?
❸ Déterminer la fonction f qui, à un nombre x de minutes, associe le prix à payer.
❹ La fonction f est-elle une fonction linéaire (voir la définition ci-dessous)? Si c'est le cas, donner son coefficient.

définition

a est un nombre donné.
On appelle **fonction linéaire** de coefficient a la fonction qui, à tout nombre x, associe le nombre ax.
En notant f une telle fonction, on peut la schématiser de la manière suivante :

$$x \longrightarrow \boxed{f} \longrightarrow ax$$

et on note $f : x \mapsto ax$.

Solution

❶

Nombre de minutes	2	3	5	10	27
tarif	0,60	0,90	1,50	3	8,1

❷ $\dfrac{0,60}{2} = \dfrac{0,90}{3} = \dfrac{1,50}{5} = \dfrac{3}{10} = \dfrac{8,1}{27} = 0,30$

Ce tableau est un tableau de proportionnalité et le coefficient de proportionnalité est 0,30

❸ $f : x \mapsto 0,30x$

❹ La fonction f est de la forme $f : x \mapsto ax \;\; avec\ a = 0,30$ donc elle est linéaire et son coefficient est 0,30.

1 Définition

a est un nombre donné.
On appelle **fonction linéaire** de coefficient a la fonction qui, à tout nombre x, associe le nombre ax.
En notant f une telle fonction, on peut la schématiser de la manière suivante :

$$x \longrightarrow \boxed{f} \longrightarrow ax$$

et on note $f : x \mapsto ax$.
Ainsi, pour déterminer l'image de x par f, notée $f(x)$, on multiplie x par a.
On peut donc écrire $f(x) = ax$.

Exemples

- $f : x \mapsto -5x$ est une fonction linéaire de coefficient $a = -5$.
- $g : \mapsto \dfrac{x}{2}$ est une fonction linéaire de coefficient $a = \dfrac{1}{2}$.
- $h : x \mapsto -5x + 2$ n'est pas une fonction linéaire.
- $i : x \mapsto x^2$ n'est pas une fonction linéaire.

2 Proportionnalité

Propriété
Un **tableau de valeurs** d'une fonction linéaire est un **tableau de proportionnalité**.
Le coefficient de la fonction est un coefficient de proportionnalité de ce tableau.

Exemple
Soit f la fonction linéaire définie par $f : x \mapsto 5x$.
Ce tableau de valeurs de la fonction f est un tableau de proportionnalité.

x	-4	-3	$-2,5$	-1	0	$1,5$	2	3	$4,1$
$f(x)$	-20	-15	$-12,5$	-5	0	$7,5$	10	15	$20,5$

$\times 5$

Ce tableau a pour coefficient de proportionnalité 5, ce qui correspond au coefficient de la fonction linéaire f.

3 Représentation graphique

Propriété
Dans un repère, la représentation graphique d'une fonction linéaire $f : x \mapsto ax$ est une **droite passant par l'origine** du repère.

Définition
Le nombre a est appelé le **coefficient directeur** de cette droite.

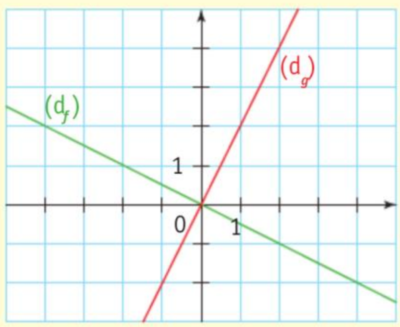
Exemples

- La droite (d_f) est la représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto -\dfrac{1}{2}x$.

La droite (d_f) passe par l'origine du repère et son coefficient directeur est $-\dfrac{1}{2}$.

- La droite (d_g) est la représentation graphique de la fonction $g : x \mapsto 2x$.

La droite (d_g) passe par l'origine du repère et son coefficient directeur est 2.



4 Faire le lien entre pourcentages et fonctions linéaires

	Prendre 5 % de x, c'est multiplier x par 0,05	Augmenter x de 5 %, c'est multiplier x par 1,05	Diminuer x de 5 %, c'est multiplier x par 0,95
Expression littérale	$\frac{5}{100}x = 0,05x$	$x + \frac{5}{100}x = \left(1 + \frac{5}{100}\right)x$ $= 1,05\,x$	$x - \frac{5}{100}x = \left(1 - \frac{5}{100}\right)x$ $= 0,95\,x$
Fonction linéaire	$x \mapsto 0,05\,x$ (coefficient 0,05)	$x \mapsto 1,05\,x$ (coefficient 1,05)	$x \mapsto 0,95\,x$ (coefficient 0,95)

Objectif H2 Reconnaitre et utiliser une fonction affine

Activité 3

1 Sur son site Internet, un magasin propose l'achat de CD-Rom à 10 euros l'unité. Quel que soit le nombre de CD-Rom commandés, les frais d'envoi s'élèvent à 3 euros pour la France métropolitaine.
Recopier et compléter le tableau ci-dessous.
Ce tableau est-il un tableau de proportionnalité ?

Nombre de CD-Rom commandés	1	2	3	5	6	8	10
Prix total à payer en euros							

2 **a.** Soit x un nombre entier positif. Exprimer le prix total $p(x)$ de la commande en fonction du nombre x de CD-Rom commandés.
b. Le nombre $p(x)$ est-il proportionnel à x ?

3 Soient a et b deux nombres. La fonction qui à x associe la valeur $ax + b$ est appelée une **fonction affine**.
a. La fonction f de la question précédente est-elle une fonction affine ?
b. Que peut-on dire d'une fonction affine h définie par $h(x) = ax + b$ si $a = 0$? Si $b = 0$?

Solution

1.

Nombre de CD-rom commandés	1	2	3	5	6	8	10
Prix total à payer en euros	13	23	33	53	63	83	103

2. a. $p(x) = 10x + 3$.
b. $p(x)$ n'est pas proportionnel à x.

3. a. La fonction p est une fonction affine de coefficients $a = 10$ et $b = 3$.

b. Si $a = 0$, alors pour tout x, $h(x) = b$ et h est une fonction constante.
Si $b = 0$, alors pour tout x, $h(x) = ax$ et h est une fonction linéaire.
Si $a = 0$ et $b = 0$, alors pour tout x, $h(x) = 0$ et h est la fonction nulle.

1 Définition

a et b sont deux nombres donnés.
On appelle **fonction affine** de coefficients a et b la fonction qui, à tout nombre x, associe le nombre $ax + b$.
En notant f une telle fonction, on peut la schématiser de la manière suivante : $x \longrightarrow \boxed{f} \longrightarrow ax+b$
et on note $f : x \mapsto ax + b$.
Ainsi, pour déterminer l'image de x par f, on multiplie x par a, puis on ajoute b.
On peut donc écrire $f(x) = ax + b$.

Exemple
On donne $f : x \mapsto 7x - 8$. f est une fonction affine de la forme $f : x \mapsto ax + b$, avec $a = 7$ et $b = -8$.

Cas particuliers
- Si $b = 0$, alors $f(x) = ax$. f est une **fonction linéaire**.
- Si $a = 0$, alors $f(x) = b$. f est une **fonction constante**.

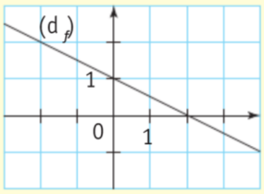
Exemples
- $g : x \mapsto 9x$ est une fonction linéaire, donc affine avec $a = 9$ et $b = 0$.
- $h : x \mapsto -4$ est une fonction constante, donc affine avec $a = 0$ et $b = -4$.

2 Représentation graphique

Propriété
Dans un repère, la représentation graphique d'une fonction affine est une droite.

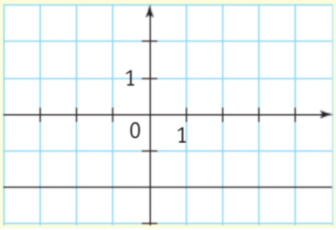
Définitions
- Le nombre a est appelé le **coefficient directeur** de la droite.
- Le nombre b est appelé l'**ordonnée à l'origine** de la droite.

Exemple
La droite (d_f) est la représentation graphique de la fonction
$f : x \mapsto -\frac{1}{2}x + 1$.
Le coefficient directeur est égal à $-\frac{1}{2}$.
L'ordonnée à l'origine est égale à 1.



Cas particulier
La représentation d'une fonction constante est une droite parallèle à l'axe des abscisses.

Exemple
La représentation graphique de la fonction constante
$h : x \mapsto -2$
est la droite ci-contre.



3 Proportionnalité des accroissements

Propriété
Soit f une fonction affine telle que $f(x) = ax + b$, avec a et b deux nombres donnés.
Pour tous nombres x_1 et x_2 distincts, on a :

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

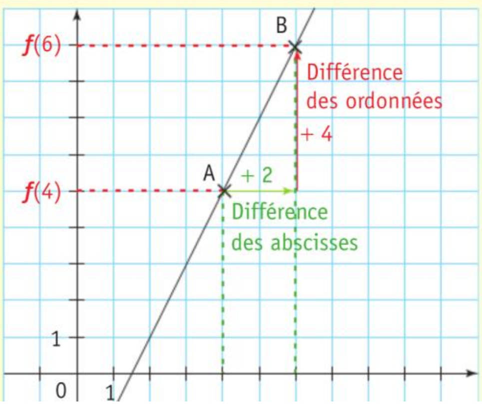
Graphiquement, on lit : $\dfrac{\text{différence des ordonnées}}{\text{différence des abscisses}}$.

Exemple
Soit f une fonction affine telle que $f(4) = 5$ et $f(6) = 9$.
Elle est du type : $f(x) = ax + b$.

$a = \dfrac{f(6) - f(4)}{6 - 4}$

$a = \dfrac{9 - 5}{6 - 4}$

$a = 2$



Regarder cette vidéo : https://youtu.be/n5_pRx4ozIg

Méthode H1 Calculer l'image ou l'antécédent d'un nombre par une fonction linéaire ou affine

Exercice 1

Soit f la fonction linéaire définie par $f : x \mapsto -2x$.

1. Déterminer l'image de 3 par la fonction f.

2. Déterminer l'antécédent de 6 par la fonction f.

Exercice 2

Soit g la fonction affine définie par $g : x \mapsto 3x - 7$.

1. Déterminer $g(-2)$.

2. Déterminer l'antécédent de 8 par la fonction g.

Solution 1

1.

étape 1 — Je remplace x par 3 dans $f(x) = -2x$.

$f(3) = -2 \times 3$

$f(3) = -6$

étape 2 — Je traduis l'égalité $f(3) = -6$.

L'image de 3 par la fonction f est -6.

2.

étape 1 — Je cherche le nombre dont l'image par f est 6. Je résous ainsi l'équation $f(x) = 6$.

$-2x = 6$

$\frac{-2x}{-2} = \frac{6}{-2}$

$x = -3$

étape 2 — Je traduis le résultat.

L'antécédent de 6 par la fonction f est -3.

Solution 2

1. Je remplace x par -2 dans $g(x) = 3x - 7$.

$g(-2) = 3 \times (-2) - 7$

$g(-2) = -6 - 7$

$g(-2) = -13$

2.

étape 1 — Je cherche le nombre dont l'image par g est 8. Je résous ainsi l'équation $g(x) = 8$.

$3x - 7 = 8$

$3x = 8 + 7$

$3x = 15$

$\frac{3x}{3} = \frac{15}{3}$

$x = 5$

étape 2 — Je traduis le résultat.

L'antécédent de 8 par la fonction g est 5.

Méthode H2 — Représenter graphiquement une fonction linéaire ou affine

Exercice 1 Dans un repère, tracer la représentation graphique de la fonction : $f : x \mapsto -3x$.

Exercice 2 Dans un repère, tracer la représentation graphique de la fonction : $g : x \mapsto 2x - 1$.

Solution 1

étape 1 Je détermine le type de la fonction f et je cite la propriété du cours qui convient.

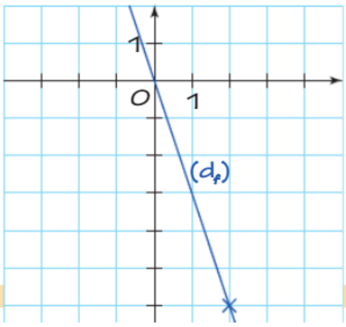
La fonction f est une fonction linéaire. Dans un repère, la représentation d'une fonction linéaire est une droite passant par l'origine du repère.

étape 2 Je calcule l'image par f d'un nombre de mon choix, par exemple 2.

$f(2) = -3 \times 2 = -6$

étape 3 Je place dans un repère le point de coordonnées (2 ; – 6) et je trace la droite passant par ce point et l'origine.

La droite (d_f), est la représentation graphique de la fonction f.



Solution 2

étape 1 Je détermine le type de la fonction g et je cite la propriété du cours qui convient.

La fonction g est une fonction affine. Dans un repère, la représentation d'une fonction affine est une droite.

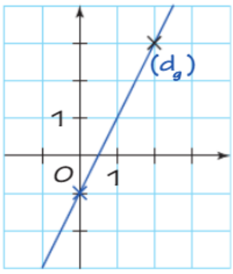
étape 2 Je calcule l'image par g de deux nombres de mon choix, par exemple 0 et 2.

$g(0) = 2 \times 0 - 1 = 0 - 1 = -1$

$g(2) = 2 \times 2 - 1 = 4 - 1 = 3$

étape 3 Je place dans un repère les points de coordonnées (0 ; – 1) et (2 ; 3) et je trace la droite passant par ces deux points.

La droite (d_g), est la représentation graphique de g.



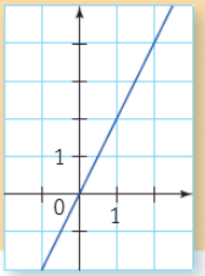
Regarder cette vidéo : https://youtu.be/OQ37ZFZnqZg

EXERCICES

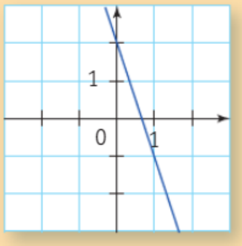
- ☐ **Faire les exercices 1 à 10 p 46-47 du cahier de compétences**
- ☐ **Faire les exercices 12 à 20 p 48-49 du cahier de compétences**

Méthode H3 Déterminer graphiquement une fonction linéaire ou affine

Exercice 1 Déterminer la fonction linéaire f représentée ci-contre.



Exercice 2 Déterminer la fonction affine g représentée ci-contre.



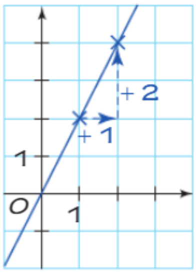
Solution 1

étape 1 J'utilise la définition d'une fonction linéaire.

f est une fonction linéaire : f est donc de la forme $f : x \mapsto ax$, avec a un nombre à déterminer.

étape 2 Je choisis deux points de la droite, à coordonnées entières, et je détermine a en utilisant la propriété :

$$a = \frac{\text{différence des ordonnées}}{\text{différence des abscisses}}.$$



$a = \frac{2}{1}$

$a = 2$

étape 3 Je conclus.

f est définie par $f(x) = 2x$.

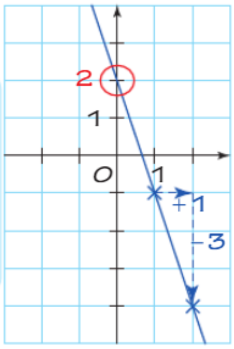
Solution 2

étape 1 J'utilise la définition d'une fonction affine.

g est une fonction affine : g est donc de la forme $g : x \mapsto ax + b$, avec a et b deux nombres à déterminer.

étape 2 Je choisis deux points de la droite, à coordonnées entières, et je détermine a en utilisant la propriété :

$$a = \frac{\text{différence des ordonnées}}{\text{différence des abscisses}}.$$



$a = \frac{-3}{1}$

$a = -3$

étape 3 Je détermine b.

L'ordonnée du point d'intersection de la droite avec l'axe des ordonnées est 2, donc $b = 2$.

étape 4 Je conclus.

g est définie par $g(x) = -3x + 2$.

Méthode H4 Déterminer par le calcul une fonction linéaire ou affine

Exercice 1 Déterminer la fonction linéaire f telle que $f(-4) = 10$.

Solution 1

étape 1 J'utilise la définition d'une fonction linéaire.

f est une fonction linéaire, donc f est de la forme $f : x \mapsto ax$, avec a un nombre à déterminer.

étape 2 J'écris $f(x) = ax$ en remplaçant x par -4.

$f(-4) = a \times (-4)$

d'où $10 = a \times (-4)$.

étape 3 Je résous l'équation obtenue.

$a \times (-4) = 10$

$\dfrac{a \times (-4)}{-4} = \dfrac{10}{-4}$

$a = -\dfrac{10}{4}$

$a = -\dfrac{5}{2}$

étape 4 Je conclus.

$f(x) = -\dfrac{5}{2}x$

Exercice 2 Déterminer la fonction affine g telle que $g(-5) = 14$ et $g(3) = -2$.

Solution 2

étape 1 J'utilise la définition d'une fonction affine.

g est une fonction affine : donc g est de la forme $g : x \mapsto ax + b$, avec a et b deux nombres à déterminer.

étape 2 Je détermine a en utilisant la formule du cours.

$a = \dfrac{g(x_2) - g(x_1)}{x_2 - x_1}$

En posant $x_1 = -5$ et $x_2 = 3$, j'obtiens :

$a = \dfrac{g(3) - g(-5)}{3 - (-5)} = \dfrac{-2 - 14}{3 - (-5)} = \dfrac{-16}{8} = -2$

Ainsi, g est de la forme $g(x) = -2x + b$.

étape 3 Je détermine b en utilisant $g(-5) = 14$. J'écris $g(x) = -2x + b$ en remplaçant x par -5.

On peut aussi utiliser $g(3) = -2$.

$g(-5) = -2 \times (-5) + b$

d'où $14 = -2 \times (-5) + b$

étape 4 Je résous l'équation obtenue.

$-2 \times (-5) + b = 14$

$10 + b = 14$

$b = 14 - 10$

$b = 4$

En utilisant ce résultat, on peut vérifier que $g(-5) = 14$ et $g(3) = -2$.

étape 5 Je conclus.

$g(x) = -2x + 4$

Regarder cette vidéo : https://youtu.be/cXl6snfEJbg

Exercice bilan

Pour des raisons de santé, il est conseillé de limiter ses efforts durant des activités sportives afin de ne pas dépasser un certain rythme cardiaque.
La fréquence cardiaque est donnée en pulsations/minute.
L'âge est donné en année.
Autrefois, la relation entre l'âge x d'une personne et f (x) la fréquence cardiaque maximale recommandée était décrite par la formule suivante : f (x) = 220 − x.
Des recherches récentes ont montré que cette formule devait être légèrement modifiée.
La nouvelle formule est : g(x) = 208 − 0,7x.

1. a. Avec la formule f (x), quelle est la fréquence cardiaque maximale recommandée pour un enfant de 5 ans ?

b. Avec la formule g(x), quelle est la fréquence cardiaque maximale recommandée pour un enfant de 5 ans ?

2. a. Compléter le tableau de valeurs ci-desous :

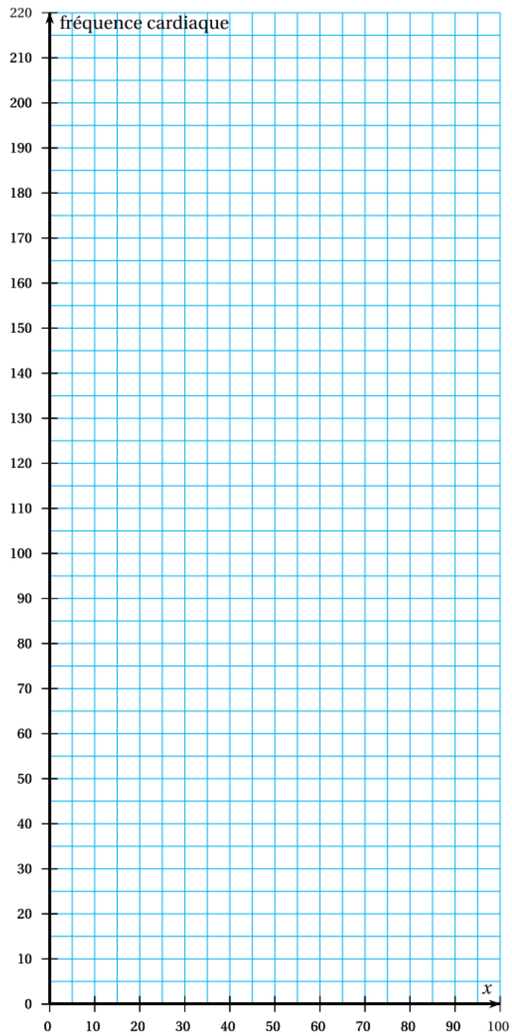
b. Tracer la droite d représentant la fonction f dans le repère tracé.

c. Sur le même repère, tracer la droite d ' représentant la fonction g.

3. Un journal commente : « Une des conséquences de l'utilisation de la nouvelle formule au lieu de l'ancienne est que la fréquence cardiaque maximale recommandée diminue légèrement pour les jeunes et augmente légèrement pour les personnes âgées. »
Selon la nouvelle formule, à partir de quel âge la fréquence cardiaque maximale recommandée est-elle supérieure ou égale à celle calculée avec l'ancienne formule ? Justifier.

4. Des recherches ont démontré que l'exercice physique est le plus efficace lorsque la fréquence cardiaque atteint 80 % de la fréquence cardiaque maximale recommandée donnée par la nouvelle formule.

Calculer pour une personne de 30 ans la fréquence cardiaque, en pulsations/minute, pour que l'exercice physique soit le plus efficace.



x	5	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$f(x)$											
$g(x)$											

CORRECTION

page suivante ...

CORRECTION

1. **a.** Avec la formule $f(x) = 220 - x$, on remplace x par 5.

   $220 - 5 = 215$. La fréquence cardiaque maximale recommandée pour un enfant de 5 ans est de 215 pulsations/minute.

   b. Avec la formule $g(x) = 208 - 0,7x$, on remplace x par 5.

   $208 - 0,7 \times 5 = 208 - 3,5 = 204,5$. La fréquence cardiaque maximale recommandée pour un enfant de 5 ans est de 204 pulsations/minute (on ne compte pas de demi-pulsation !).

2. **a.** Sur l'annexe 2, on complète le tableau de valeurs comme ci-dessous :

x	5	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$f(x)$	215	210	200	190	180	170	160	150	140	130	120
$g(x)$	204,5	201	194	187	180	173	166	159	152	145	138

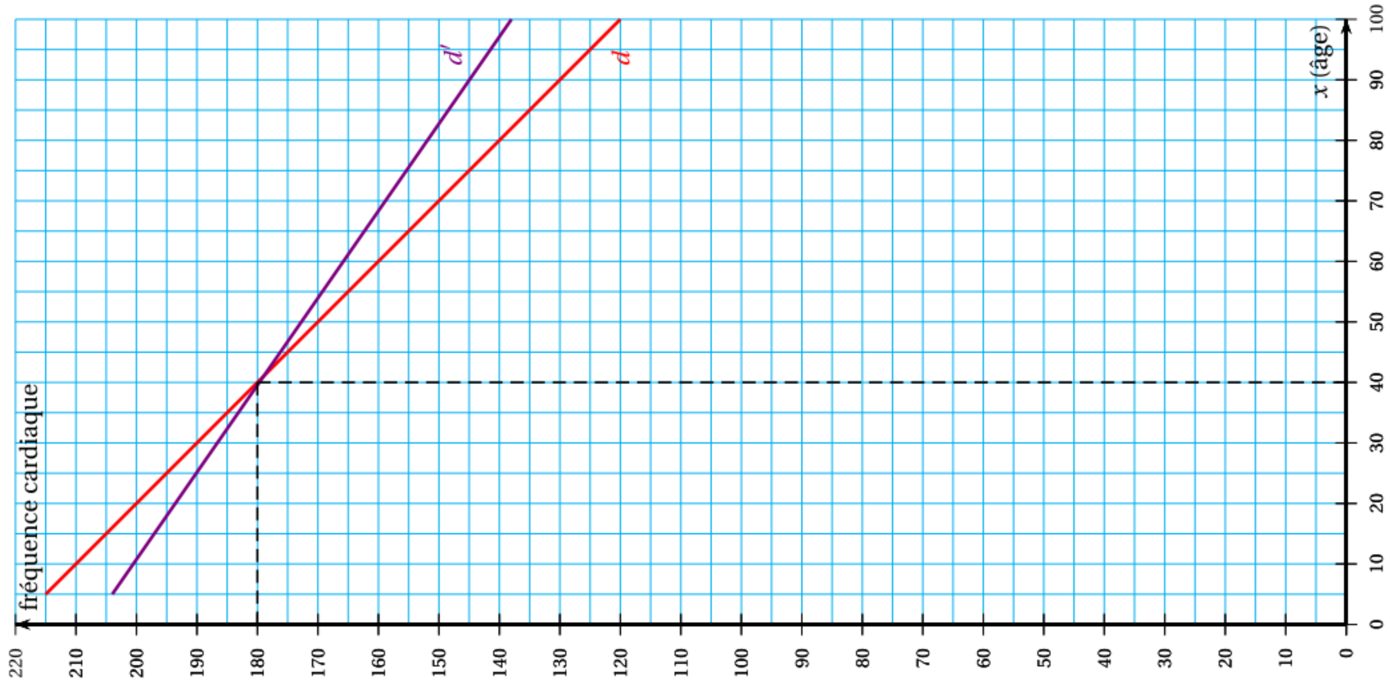
   b. Sur l'annexe 2, on a tracé en rouge la droite d représentant la fonction f dans le repère tracé.

   c. Sur le même repère, on a tracé en violet la droite d' représentant la fonction g.

3. Selon la nouvelle formule, à partir de 40 ans la fréquence cardiaque maximale recommandée est supérieure ou égale à celle calculée avec l'ancienne formule. Ceci se voit dans le tableau : avant la colonne correspondant à 40 ans, $f(x)$ est supérieur à $g(x)$ et après cette colonne, $f(x)$ est inférieur à $g(x)$.

   Ceci se voit aussi sur la représentation graphique : avant le point d'intersection de d et d' correspondant à 40 ans, d est au-dessus de d' et après ce point, d est en-dessous de d'.

4. L'exercice physique, pour une personne de 30 ans, est le plus efficace lorsque la fréquence cardiaque atteint 80 % de 187 pulsations/minute.
   $\dfrac{80}{100} \times 187 = 149,6$
   Pour que l'exercice physique soit le plus efficace pour une personne de 30 ans, la fréquence cardiaque doit être de 149 pulsations/minute (on ne compte pas 6 dixièmes de pulsation !).



VIDEO Regarder cette vidéo : https://youtu.be/XOwoyupaPx0

EXERCICES

- ☐ Faire les exercices 33, 34 p 53 du cahier de compétences
- ☐ Faire les exercices 35 à 37 p 54-55 du cahier de compétences

LES FONCTIONS

Fonction linéaire

Représentation graphique

C'est une droite qui **passe par l'origine** du repère.

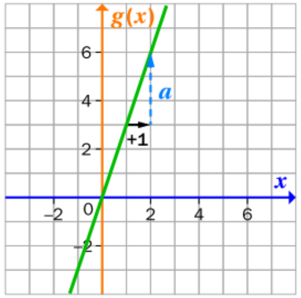


Tableau de valeurs

C'est un tableau de **proportionnalité** de coefficient a (ici $a = 3$).

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3
$g(x)$	−12	−9	−6	−3	0	3	6	9

× a

Forme algébrique

$g(x) = ax$

Les images sont **proportionnelles** aux antécédents.

Exemple

$g(x) = 3x$

Fonction affine

Représentation graphique

C'est une droite qui **ne passe pas par l'origine** du repère.

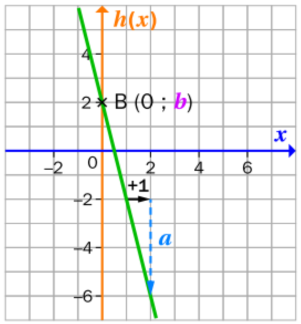


Tableau de valeurs

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3
$h(x)$	18	14	10	6	2	−2	−6	−10

+ 1

+ a

$h(0) = b$

Forme algébrique

$h(x) = ax + b$

Les images **ne sont pas proportionnelles** aux antécédents.

Exemple

$h(x) = -4x + 2$

Cas général

Forme algébrique

C'est la formule.

$\underset{\text{antécédent}}{x} \longmapsto \underset{\text{image}}{f(x)}$

Notation : $f(x) = x^3 + 2x^2 - 6x - 7$
ou
$f : x \mapsto x^3 + 2x^2 - 6x - 7$

Exemple

$f(\mathbf{1}) = \mathbf{1}^3 + 2 \times \mathbf{1}^2 - 6 \times \mathbf{1} - 7$
$= 1 + 2 - 6 - 7 = -10$

Tableau de valeurs

x	−4	−3	−2	−1	0	**1**	2	3	← antécédents
$f(x)$	−15	2	5	0	−7	**−10**	−3	20	← images

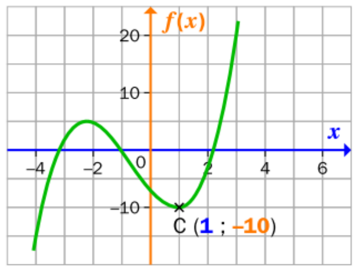
Exemple

$f(1) = -10$

Représentation graphique

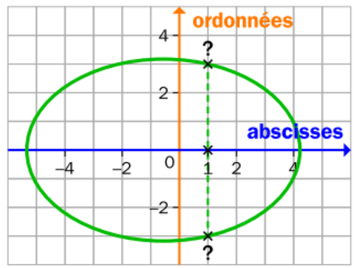
Un nombre a **une seule image**.

Exemples



C'est une fonction.

- L'**antécédent** se lit sur l'axe des abscisses, et l'**image** sur l'axe des ordonnées. L'image de 1 est −10.
- Une **image** peut avoir plusieurs **antécédents**. Ici, 0 a trois antécédents : environ −3,2 ; −1 et 2,2.



Ceci n'est pas une fonction.

On ne peut pas déterminer l'image de 1.