Chapitre 2 : les transformations du plan

Définition et isométries connues

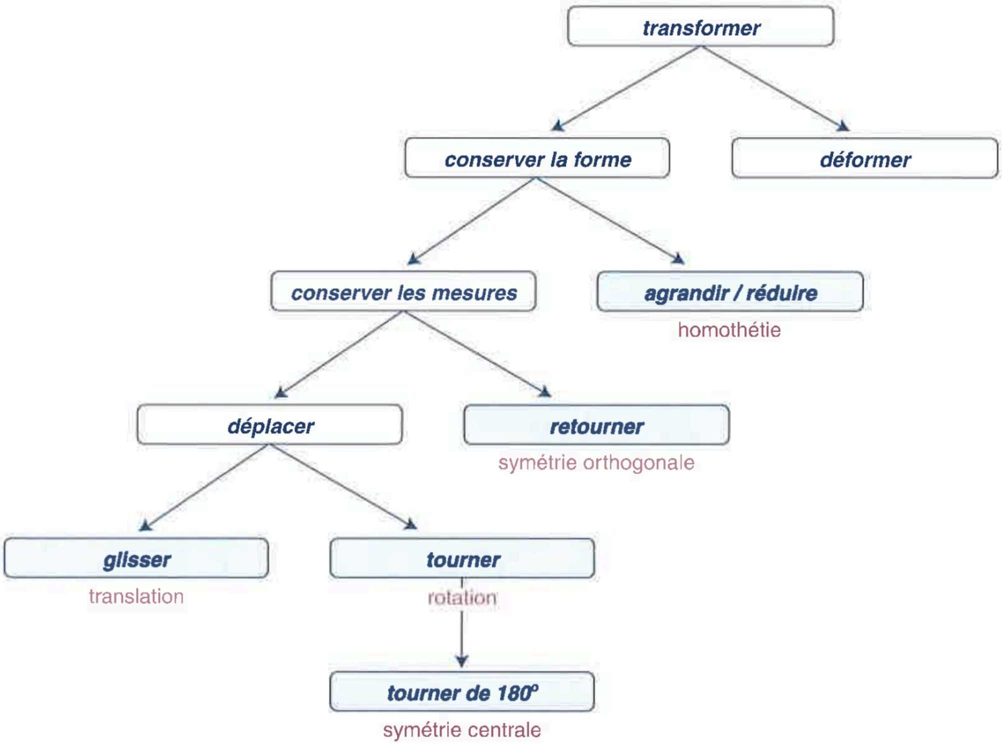
Définition :

Une isométrie est une transformation du plan qui conserve les mesures.

Isométries connues :

1. La **symétrie orthogonale** qui **retourne** les figures.
2. La **translation** qui fait **glisser** les figures.
3. La **rotation** qui fait **tourner** les figures.
4. La **symétrie centrale** qui fait **tourner** les figures de **180°**.

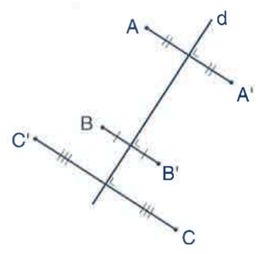
Introduction



Symétrie orthogonale

1. Définitions :

« Le point A’ est l’image du point A par la symétrie orthogonale d’axe d » signifie que d est la médiatrice du segment $[A\ A']$.



2. Écriture et lecture :

S_d (A) = A’ peut se lire de deux manières différentes.

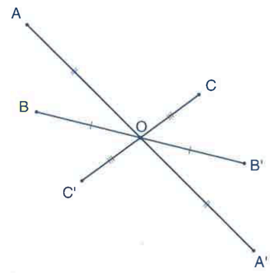
a) Par la symétrie orthogonale d’axe d, l’image du point A est le point A’.

b) Le point A’ est l’image du point A par la symétrie orthogonale d’axe d.

3. Point fixe :

Tout point de l’axe d’une symétrie orthogonale est sa propre image par cette symétrie. Une symétrie orthogonale admet donc une infinité de points fixes : les points de l’axe.

Symétrie centrale

1. **Définitions :** « Le point A' est l'image du point A par la symétrie centrale de centre O » signifie que O est le milieu du segment $[A\ A']$.	

2. Écriture et lecture :

S_O (A) = A' peut se lire de deux manières différentes.

a) Par la symétrie centrale de centre O, l'image du point A est le point A'.

b) Le point A' est l'image du point A par la symétrie centrale de centre O.

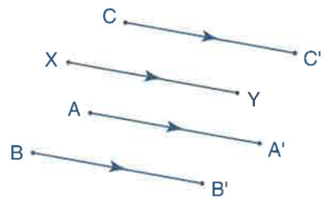
3. Point fixe :

Seul, le centre d'une symétrie centrale est sa propre image par cette symétrie.
Une symétrie centrale n'admet donc qu'un seul point fixe : son centre.

Translation

1. Définitions :

« Le point A’ est l’image du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{XY}$» signifie que $[XY\ et[AA'$ ont même direction et même sens et que $[XY]$ et $[AA']$ ont même longueur.



2. Écriture et lecture :

$t_{\overrightarrow{XY}}$ (A) = A’ peut se lire de deux manières différentes.

c) Par la translation de vecteur $\overrightarrow{XY}$, l’image du point A est le point A’.
d) Le point A’ est l’image du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{XY}$.

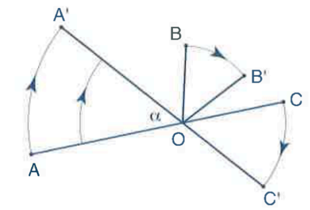
3. Point fixe :

Une translation non nulle n’admet pas de point fixe.

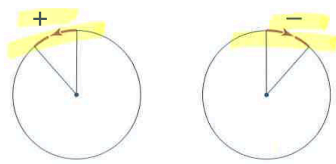
Rotation

1. Définition dynamique :

Une rotation est une transformation du plan qui fait tourner tout point
-autour du centre, en restant à une même distance de celui-ci (arc de cercle),
-d'une même amplitude,
-dans le même sens.



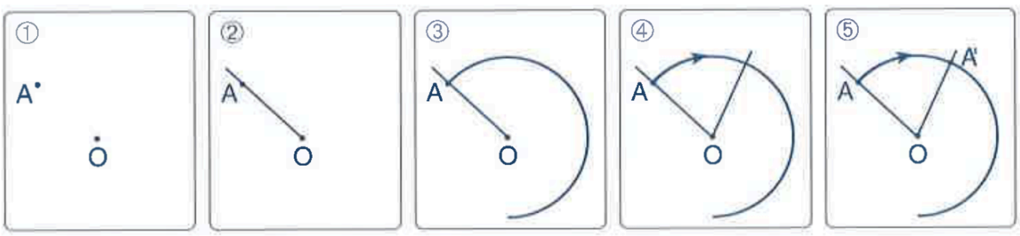
2. Sens d'une rotation



3. Définition :

« Le point A' est l'image du point A par la rotation de centre O et d'amplitude α.

4. Film de la construction de l'image d'un point A par $r_{O}\,\alpha$



Rotation (suite)

5. Écriture et lecture :

$r_{O\,\alpha}(A) = A'$ peut se lire de deux manières différentes.

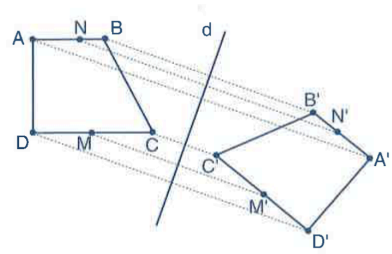
a) Par la rotation de centre O et d'amplitude α, l'image du point A est le point A'.
b) Le point A' est l'image du point A par la rotation de centre O et d'amplitude α.

6. Point fixe :

Seul le centre d'une rotation d'amplitude non nulle est sa propre image par cette rotation.
Une rotation d'amplitude non nulle n'admet donc qu'un seul point fixe : son centre.

Invariants

1. Invariants communs aux isométries

a) Les isométries conservent : -l'alignement des points, -l'amplitude des angles, -la longueur des segments, -le parallélisme des droites, -la perpendicularité des droites, -le milieu d'un segment, -le périmètre et l'aire des figures Les isométries conservent donc la forme et la grandeur des figures.	

Invariants

Les propriétés citées **ci-dessous et aux pages suivantes** sont valables pour les symétries orthogonales, les symétries centrales, les translations et les rotations.

Ici, j'ai indiqué celles relatives aux symétries orthogonales.

L'alignement des points

Par une symétrie orthogonale, trois points alignés ont pour image trois points alignés.

A, N et B sont alignés

$S_d(A) = A'$
$S_d(N) = N'$
$S_d(B) = B'$

⇨ A', N' et B' sont alignés

Invariants

L'amplitude des angles

Par une symétrie orthogonale, un angle a pour image un angle de même amplitude.
$S_d(\hat{A}) = \hat{A}'$ → $|\hat{A}| = |\hat{A}'|$

La longueur des segments

Par une symétrie orthogonale, un segment a pour image un segment de même longueur.
$S_d([AB]) = [A'B']$ → $|AB| = |A'B'|$

Invariants

Le parallélisme des droites

Par une symétrie orthogonale, deux droites parallèles ont pour images deux droites parallèles.

AB // DC
S_d(AB) = A'B'
S_d(DC) = D'C'

⇨ A'B' // D'C'

La perpendicularité des droites

Par une symétrie orthogonale, deux droites perpendiculaires ont pour images deux droites perpendiculaires.

AB   AD
S_d(AB) = A'B'
S_d(DC) = D'C'

⇨ A'B'   D'C'

Invariants

Le milieu d'un segment

Par une symétrie orthogonale, le milieu d'un segment a pour image le milieu du segment image.

M est le milieu de $[DC]$
S_d(D) = D'
S_d(M) = M'
S_d(C) = C'

⇨ M' est le milieu de $[D'C']$

Le périmètre et l'aire des figures

Par une symétrie orthogonale, une figure a pour image une figure de même périmètre et de même aire.

S_d(ABCD) = A'B'C'D' ⇨ périmètre ABCD = périmètre A'B'C'D'
⇨ aire ABCD = aire A'B'C'D'

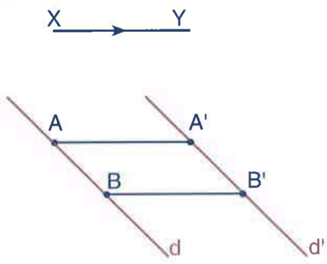
Invariants

2. Propriétés propres à certaines isométries

Translation

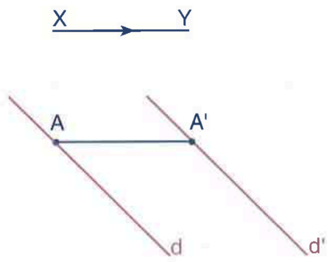
Par une translation, l'image d'une droite est une droite parallèle.

Illustration



$t_{\overrightarrow{XY}}(d) = d' \Rightarrow d \, // \, d'$

Construction « à l'économie »



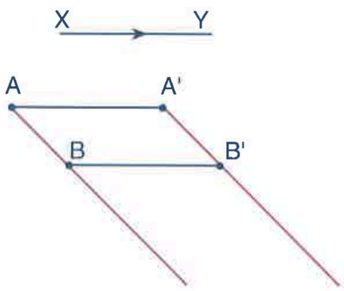
Nomme A un point quelconque de la droite d.

Construis $t_{\overrightarrow{XY}}(A) = A'$.

Par A', trace d' // d.

Par une translation, l'image d'une demi-droite est une demi-droite parallèle et de même sens.

Illustration



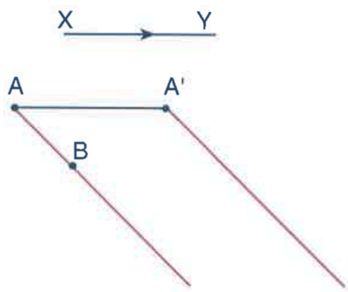
$t_{\overrightarrow{XY}}([AB) = [A'B'$

$\Downarrow$

[AB // [A'B' et

[AB et [A'B' ont le même sens.

Construction « à l'économie »



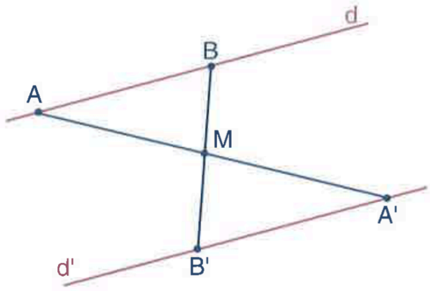
Construis $t_{\overrightarrow{XY}}(A) = A'$.

Par A', trace la demi-droite parallèle et de même sens à la demi-droite [AB.

Symétrie centrale

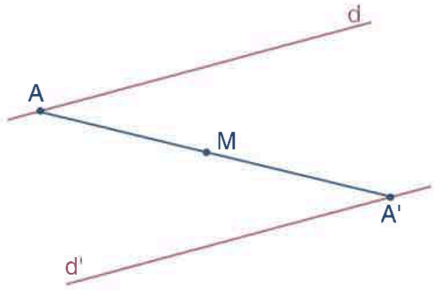
Par une symétrie centrale, l'image d'une droite est une droite parallèle.

Illustration



s_M (d) = d' $\Rightarrow$ d // d'

Construction « à l'économie »



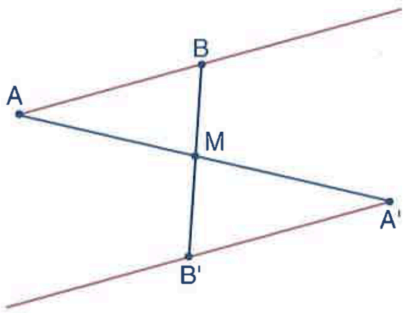
Nomme A un point quelconque de la droite d.

Construis s_M (A) = A'.

Par A', trace d // d'.

Par une symétrie centrale, l'image d'une demi-droite est une demi-droite parallèle et de sens contraire.

Illustration



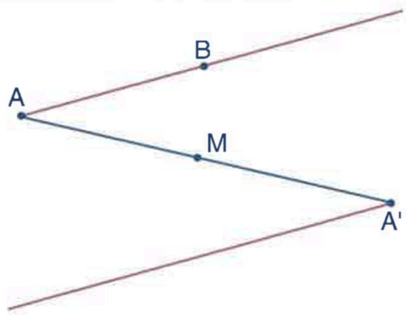
s_M ([AB) = [A'B'

$\Downarrow$

[AB // [A'B' et

[AB et [A'B' sont de sens contraires.

Construction « à l'économie »



Construis s_M (A) = A'.

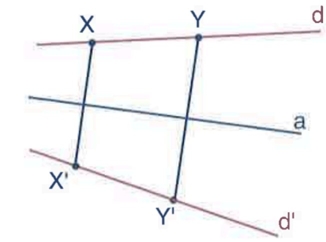
Par A', trace la demi-droite parallèle et de sens contraire à la demi-droite [AB.

Invariants

Symétrie orthogonale

- En général, par une symétrie orthogonale, l'image d'une droite est une droite sécante.
  Pour construire l'image d'une droite par une symétrie orthogonale, il faut donc construire les images de deux de ses points.

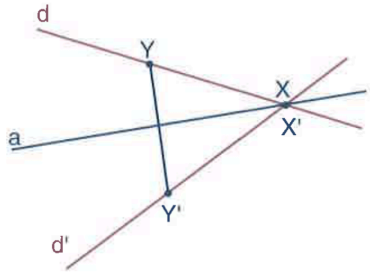
Cas généraux



Nomme X et Y deux points quelconques de la droite d.

Construis s_a (X) = X' et s_a (Y) = Y'.

Trace d' = X'Y'.



Nomme X le point d'intersection de la droite d et de l'axe a.

Comme X est un point fixe, X = X'.

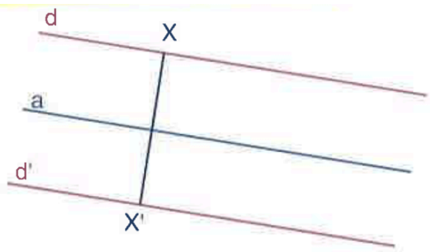
Nomme Y un point quelconque de la droite d.

Construis s_a (Y) = Y'.

Trace d' = X'Y'

CAS PARTICULIERS :

- Par une symétrie orthogonale, l'image d'une droite parallèle à l'axe est une droite parallèle à celui-ci.

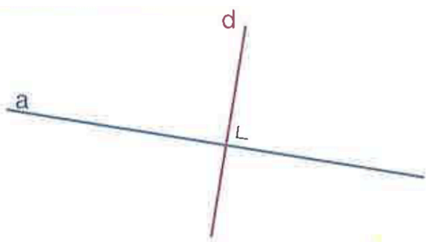


Nomme X un point quelconque de la droite d.

Construis s_a (X) = X'.

Par X', trace d' // d.

- Par une symétrie orthogonale, l'image d'une droite perpendiculaire à l'axe est la droite elle-même.



Par la symétrie orthogonale d'axe a, tout point de la droite d a pour image un point de la droite d; donc s_a (d) = d.

Invariants

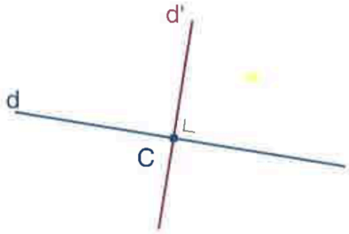
Rotation

Par une rotation d’amplitude +90° ou -90°, l’image est une droite perpendiculaire.

Illustrations

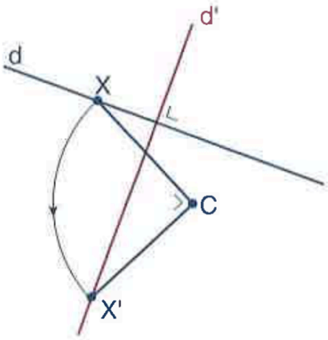
Construction « à l'économie »

$C \in d$



Par C, trace $d' \perp d$.

$C \notin d$



Nomme X un point quelconque de la droite d.

Construis $r_{C,\,-90°}(X) = X'$.

Par X', trace $d' \perp d$.

Effets de certaines transformations sur les coordonnées

Les transformations du plan présentés sur cette page et les suivantes s'effectuent dans un repère cartésien d'axes x et y perpendiculaires en O.

1. Effet d'une symétrie orthogonale sur les coordonnées d'un point

-Par la symétrie orthogonale d'axe x, un point et son image ont la même abscisse et des ordonnées opposées.

Règle de transformation de la symétrie orthogonale d'axe x :

$$(x\ ;\ y) \rightarrow (x\ ;\ -y)$$

-Par la symétrie orthogonale d'axe y, un point et son image ont des abscisses opposées et la même ordonnée.

Règle de transformation de la symétrie orthogonale d'axe y :

$$(x\ ;\ y) \rightarrow (-x\ ;\ y)$$

Effets de certaines transformations sur les coordonnées

2. Effet d'une symétrie centrale sur les coordonnées d'un point

-Par la symétrie centrale de centre O, un point et son image ont des abscisses et des ordonnées opposées.

Règle de transformation de la symétrie centrale de centre O :

$$(x \,;\, y) \rightarrow (-x \,;\, -y)$$

Effets de certaines transformations sur les coordonnées

3. Effet d'une translation sur les coordonnées d'un point

Pour trouver les coordonnées de l'image d'un point par la translation qui applique O (0 ; 0) sur P (a ; b), il suffit d'ajouter a à l'abscisse du point initial et b à son ordonnée.

Règle de transformation de la translation qui applique O (0 ;0) sur P (a ; b) :

$$(x\ ;\ y) \rightarrow (x + a\ ;\ y + b)$$

Effets de certaines transformations sur les coordonnées

4. Effet d'une rotation de centre 0 et d'amplitude $\pm$ 90° sur les coordonnées d'un point

-Par la rotation de centre O et d'amplitude 90°, l'image d'un point a pour abscisse l'opposé de l'ordonnée de ce point et pour ordonnée son abscisse.

Règle de transformation de la rotation de centre O et d'amplitude 90° :

$$(x \,;\, y) \rightarrow (-y \,;\, x)$$

-Par la rotation de centre O et d'amplitude -90°, l'image d'un point a pour abscisse l'ordonnée de ce point et pour ordonnée l'opposé son abscisse.

Règle de transformation de la rotation de centre O et d'amplitude -90° :

$$(x \,;\, y) \rightarrow (y \,;\, -x)$$