

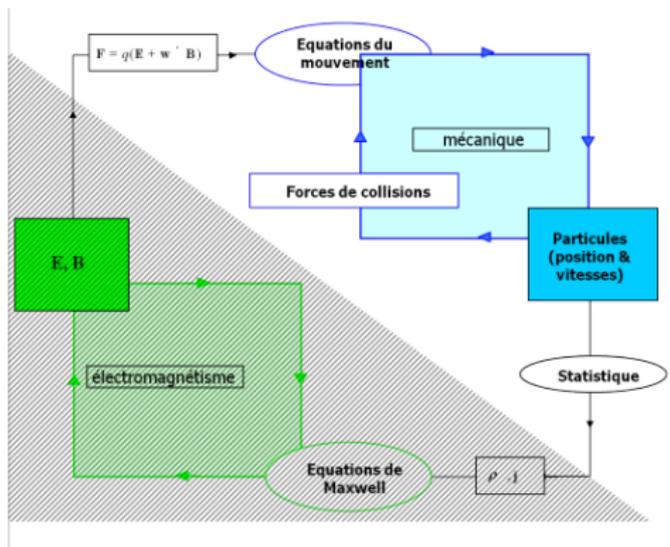
# Magnétohydrodynamique

## Une introduction

30 mars 2020

# Couplage électromécanique dans un plasma

Au chapitre précédent, on ne s'est intéressé qu'à la moitié supérieure du diagramme ci-dessous : action d'un champ  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  sur le mouvement d'une particule individuelle :



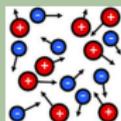
Il faut maintenant tenir compte du retour du mouvement des particules sur la génération du champ  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  pour obtenir une description auto-consistante.

# Description MHD d'un plasma

Dans certaines situations, un plasma se comporte comme un fluide unique en interaction avec un champ magnétique. Son comportement est alors décrit par un jeu d'équations simples issu de l'hydrodynamique et de l'électromagnétisme du vide. C'est le cadre de la *magnétohydrodynamique* (MHD).

Cette description n'est valable que si

- on peut assimiler le plasma à un fluide, c'est-à-dire qu'on peut définir en tout point de l'espace, une densité, une vitesse, une pression, une température...



Une particule fluide contient un très grand nombre de particules individuelles (notion de moyenne statistique ait un sens) mais reste petite à l'échelle macroscopique.

- Les grandeurs locales ainsi définies varient de manière **très lente** par rapport aux échelles temporelles microscopiques ( $\omega_c, \omega_p, \dots$ ) et sur des échelles spatiales **très grandes** par rapport aux longueurs microscopiques ( $\rho_L, \lambda_D, \dots$ ).
- Le plasma reste toujours voisin de l'**électronéutralité** :  $\rho_{el} \simeq 0$  mais  $\text{div } \mathbf{E} \neq 0 !!$
- Le plasma est un milieu conducteur dans lequel il existe une relation instantanée entre le champ électrique  $\mathbf{E}^*$  et la densité de courant  $\mathbf{j}$  sous la forme d'une **loi d'Ohm** :  $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}^*$ . La conductivité  $\sigma$  est liée à la présence de **collisions** entre particules.

# MHD : équations liées au fluide

Le plasma est assimilé à un fluide unique de densité  $\rho$  et de vitesse  $\mathbf{V}$ .

- Conservation de la masse = équation de continuité

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0$$

- Equation du mouvement = équation de Navier-Stokes appliquée à l'unité de volume de particule fluide

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} \right] = -\nabla P + \mathbf{F}_{\text{MHD}} + \mu \Delta \mathbf{V} + \rho \mathbf{g}$$

- $\mathbf{F}_{\text{MHD}} d\tau = \sum_{i \in d\tau} q_i (\mathbf{E} + \mathbf{v}_i \wedge \mathbf{B})$  est la force électromagnétique qui s'applique à l'ensemble des particules individuelles contenues dans la particule fluide de volume  $d\tau$ .

La première somme correspond à la densité de charge :  $\rho_{el} d\tau = \sum_{i \in d\tau} q_i \simeq 0$ .

La seconde somme correspond à la densité de courant :  $\mathbf{J} d\tau = \sum_{i \in d\tau} q_i \mathbf{v}_i$ .

Donc  $\mathbf{F}_{\text{MHD}} = \mathbf{J} \wedge \mathbf{B}$ .

- En pratique la viscosité  $\mu$  du plasma (gaz dilué) est très faible et on néglige ce terme en MHD. De même, on ne tient pas compte des forces de pesanteur sauf exception...

# MHD : équations liées au fluide II

La pression du plasma doit être déterminée par une équation d'état ou une équation de comportement du système. C'est souvent là que le bât blesse dans les descriptions fluides car il n'est pas toujours facile de justifier une relation entre pression et densité comme dans un gaz parfait par exemple.

Souvent, on a recours à deux hypothèses simples :

- plasma "froid" :  $P = 0$  (justifié si  $\|\nabla P\| \ll \|\mathbf{J} \wedge \mathbf{B}\|$ )
- plasma polytropique :  $P/\rho^\gamma = \text{cste}$  comme dans un gaz parfait, mais l'exposant  $\gamma$  peut être ajusté suivant les modèles ( $\gamma = 1$  si isotherme,  $\gamma = 5/3$  si adiabatique).

# MHD : équations liées au champ magnétique

Ce sont les équations de Maxwell !

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_{el}}{\epsilon_0} \simeq 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \wedge \mathbf{E} \quad \nabla \wedge \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

En pratique, si le phénomène étudié à une vitesse caractéristique  $V$ , un temps caractéristique  $\tau$  et une longueur typique  $L = V\tau$ , il est facile de montrer que dans l'hypothèse non relativiste ( $V \ll c$ ) le courant de déplacement peut être ignoré (vérifiez le à titre d'exercice).

Si Maxwell-Ampère permet d'obtenir, à partir de  $\mathbf{B}$ , le courant  $\mathbf{J}$  nécessaire à la résolution de l'équation du mouvement et si Maxwell-Faraday permet de déduire le champ magnétique  $\mathbf{B}$  à partir du champ électrique, comment est déterminé le champ électrique ?

Réponse : la loi d'Ohm !

Dans le référentiel du plasma  $\mathcal{R}^*$  dans lequel  $\mathbf{V} = 0$ , la loi d'Ohm s'écrit  $\mathbf{J}^* = \sigma \mathbf{E}^*$  en supposant que la conductivité  $\sigma$  est constante.

Dans le référentiel  $\mathcal{R}$  où le plasma est animé d'une vitesse  $\mathbf{V}$ , on a

$$\begin{aligned}\mathbf{J} &= \mathbf{J}^* + \rho_{el} \mathbf{V} \simeq \mathbf{J}^* \\ \mathbf{E} &= \mathbf{E}^* - \mathbf{V} \wedge \mathbf{B}\end{aligned}$$

donc la loi d'ohm prend la forme  $\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{V} \wedge \mathbf{B})$  ou en inversant

$$\mathbf{E} = \eta \mathbf{J} - \mathbf{V} \wedge \mathbf{B}.$$

$\eta = 1/\sigma$  est la **résistivité** du plasma

En réalité, la loi d'Ohm est un peu plus complexe car d'autres termes plus petits interviennent mais on se contentera de cette version cette année.

# Résumé : équations MHD

- Plasma = un seul fluide conducteur
- Variables primaires :  $\rho$ ,  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{B}$  and  $P$
- Variables secondaires :  $\mathbf{J}$ ,  $\mathbf{E}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) &= 0 \\ \rho \left[ \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} \right] &= -\nabla P + \mathbf{J} \wedge \mathbf{B} = -\nabla P + [\nabla \wedge \mathbf{B}] \wedge \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \nabla \wedge (\mathbf{V} \wedge \mathbf{B}) + \frac{\eta}{\mu_0} \overrightarrow{\Delta \mathbf{B}} \\ \frac{P}{\rho^\gamma} &= \text{cste}\end{aligned}$$

- La seconde et troisième équations relient  $\mathbf{V}$  and  $\mathbf{B}$  entre elles : couplage magnétodynamique.
- Validité du système : phénomènes de grande échelle spatio-temporelle par rapport aux grandeurs microscopiques ( $\lambda_D, \rho_L, \omega_c, \omega_p$ ) + collisions non négligeables

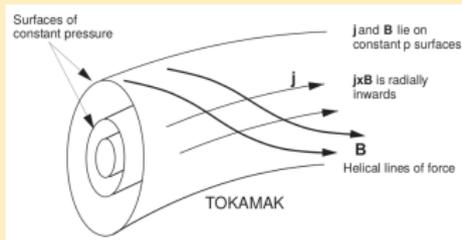
# Magnétostatique

Un problème récurrent des plasmas de laboratoire est la recherche d'un équilibre statique du plasma dans un champ magnétique et de sa stabilité (confinement).

Equation de base de la magnéto-  
statique :

$$\nabla P = \mathbf{J} \wedge \mathbf{B} = 0$$

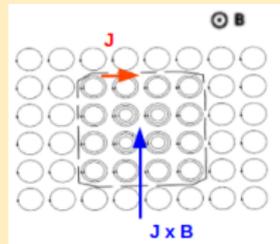
Les lignes de courant et de champ  
sont contenues dans des surfaces à  
pression constante ( $\perp$  à  $\nabla P$ )



Le courant nécessaire pour maintenir l'équi-  
libre peut s'obtenir en prenant le produit  
vectoriel de l'équation précédente :

$$\mathbf{J} = \frac{\mathbf{B} \wedge \nabla P}{B^2}$$

Ce courant porte le nom de courant diama-  
gnétique. Il ne se traduit pas par un dépla-  
cement réel des centre-guides mais par un  
pur effet fluide comme le montre le schéma  
ci-contre.



En suivant le contour en pointillés, davantage  
de protons tournent dans le sens horaire que  
l'inverse d'où l'apparition d'un courant macro-  
scopique  $\mathbf{J}$  et de la force centripète  $\mathbf{J} \wedge \mathbf{B}$  dans  
le même sens que  $\nabla n$ .

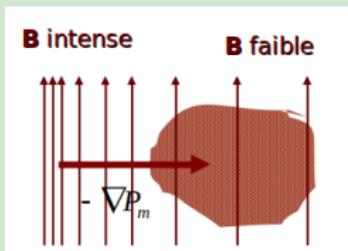
# Pression magnétique

Une formule d'analyse vectorielle permet de transformer la force magnétique en :

$$\mathbf{J} \wedge \mathbf{B} = \frac{(\nabla \wedge \mathbf{B}) \wedge \mathbf{B}}{\mu_0} = -\nabla \left( \frac{B^2}{2\mu_0} \right) + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{B}}{\mu_0}$$

Le premier terme est analogue à un gradient de pression qui vient s'ajouter au  $-\nabla P$ . La quantité  $P_m = B^2/(2\mu_0)$  (homogène à une densité volumique d'énergie) s'appelle la **pression magnétique**.

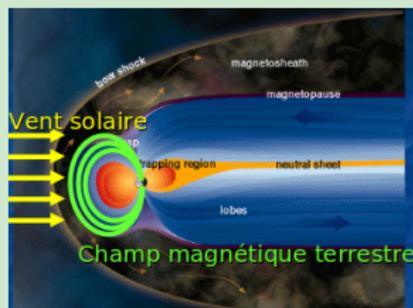
Un champ magnétique intense "pousse" le plasma vers les régions de champ magnétique plus faible



Cas d'une tâche solaire :

# Application : position du "nez" de la magnétopause

Magnétopause = équilibre des pressions vent solaire / magnétosphère



$$P_{SW} = \rho_{SW} V_{SW}^2$$

$$P_{MS} = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{B_T^2}{2\mu_0} \left( \frac{R_T}{r_{MP}} \right)^6$$

- Pression du vent solaire : dynamique liée au mouvement d'ensemble du plasma
- Pression de la magnétosphère : magnétique liée au champ dipolaire terrestre
- Position du point subsolaire de la magnétopause

$$r_{MP} = R_T \left( \frac{B_T^2}{2\mu_0 \rho_{SW} V_{SW}^2} \right)^{1/6}$$

- Pour la Terre, le calcul donne  $r_{MP} = 7,5 R_T$  alors qu'on mesure plutôt  $r_{MP} \sim 10 R_T$ .
- On a en fait oublié en le courant circulant à la magnétopause et qui renforce le champ magnétosphérique...

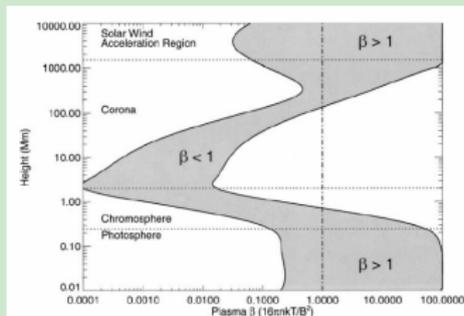
# Paramètre beta

Quantifie l'importance de la pression thermique par rapport à la pression magnétique  
⇒ identifie l'acteur principal de la dynamique du plasma

$$\beta = \frac{P_{th}}{P_m} = \frac{\text{énergie thermique du plasma}}{\text{énergie magnétique}}$$

- Plasmas à faible  $\beta$  sont dominés par les forces magnétiques (approximation plasma "froid")
- Plasmas à  $\beta$  élevé sont dominés par les forces de pression thermique, analogue aux fluides neutres. Le champ magnétique est induit par les mouvements du plasma (rôle passif).

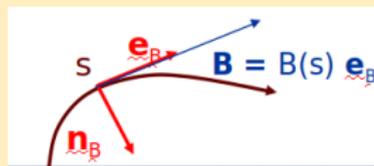
## Variation de $\beta$ dans l'atmosphère solaire



# Tension magnétique

L'autre terme dans la force magnétique est équivalent à une force de tension magnétique.

Pour le voir, paramétrisons une ligne de champ par son abscisse curviligne  $s$  :



$$(\mathbf{B} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} = \frac{B}{\mu_0} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{B^2}{2\mu_0} \right) \mathbf{e}_B + \frac{B^2}{\mu_0} \frac{\partial \mathbf{e}_B}{\partial s} = \frac{\partial P_m}{\partial s} \mathbf{e}_B + \frac{2P_m}{R_c} \mathbf{n}_B$$

Le premier terme vient compenser le gradient de pression magnétique parallèle (la force magnétique est forcément  $\perp$  à  $\mathbf{B}$ ).

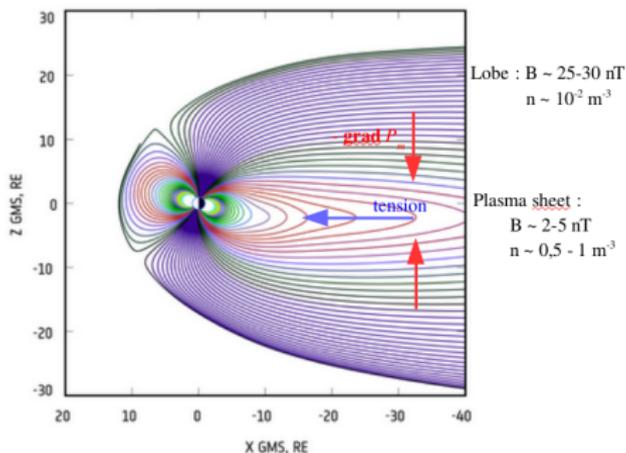
Le second terme porte le nom de **tension magnétique**, il est proportionnel à la courbure de la ligne de champ ( $R_c =$  rayon de courbure).

Une ligne de champ courbe se comporte comme un fil élastique qui expulse le plasma vers l'intérieur de la courbure.

Expression complète de la force magnétique

$$\mathbf{J} \wedge \mathbf{B} = -\nabla_{\perp} P_m + \frac{2P_m}{R_c} \mathbf{n}_B \quad \perp \mathbf{B}$$

# Application : équilibre de la queue magnétosphérique



Le plasma est confiné dans un mince feuillet au cause de la pression magnétique des lobes (action comme un étai).

Dans la direction  $z$  on a  $P_{th}(z) + P_m(z) = \text{cste}$ .

La tension magnétique des lignes de champ courbes est compensée par un gradient de pression thermique dirigé vers la Terre (gradient de densité).

Mais dans la queue lointaine, de nouvelles lignes de champs très étirées sont créés suite au phénomène de reconnexion magnétique. La tension n'est pas contrebalancée par un gradient de pression  $\Rightarrow$  le plasma est propulsé vers la Terre à grande vitesse (bursty bulk flows).

# Transport du champ magnétique : diffusion

Equation d'évolution du champ magnétique :

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \underbrace{\nabla \wedge (\mathbf{V} \wedge \mathbf{B})}_{\text{convection}} + \underbrace{\frac{\eta}{\mu_0} \Delta \mathbf{B}}_{\text{diffusion}}$$

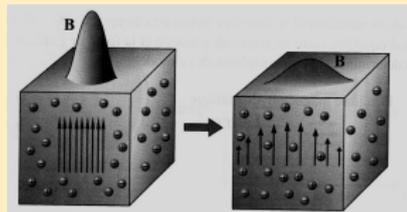
## Diffusion du champ magnétique

Si le plasma est au repos ( $\mathbf{V} = 0$ ), le champ magnétique obéit à une équation de diffusion où le terme  $D_m = \eta/\mu_0$  est la **diffusivité magnétique**. Ce sont les **collisions** dans le plasma qui dissipent l'énergie magnétique (ou le courant générateur du champ  $\mathbf{B}$ ).

Par analogie avec la goutte d'encre qui s'étale sur un buvard, le champ magnétique dans un plasma résistif s'étale sur une échelle  $L$  après une durée  $\tau$  telle que  $L = \sqrt{D_m \tau}$ .

Ordre de grandeurs :

- tokamak :  $\tau \sim 10$  s
- couronne solaire :  $\tau \sim 10^7$  an



# Transport du champ magnétique : convection

Nombre de Reynolds magnétique  $\Leftrightarrow$  nombre de Reynolds hydrodynamique

$$\mathcal{R}_m = \frac{\|\nabla(\mathbf{V} \wedge \mathbf{B})\|}{\frac{\eta}{\mu_0} \|\overrightarrow{\Delta \mathbf{B}}\|} \propto \mu_0 \frac{VL}{\eta}$$

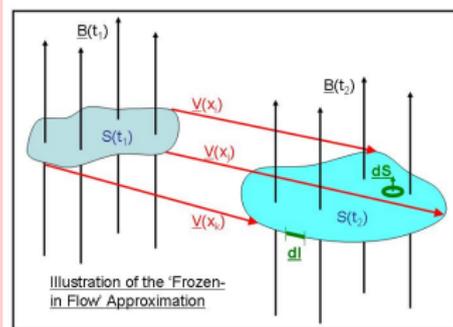
- Si  $\mathcal{R}_m \ll 1$ , le terme de **diffusion** domine. Le champ magnétique s'évanouit s'il n'est pas recréé de manière permanente.
- Si  $\mathcal{R}_m \gg 1$ , le terme de **convection** domine : le champ est alors "gelé" dans le plasma (frozen-in field).

## Théorème d'Alfvén ou théorème du gel

En MHD idéale, i.e. lorsque  $\mathbf{E} = -\mathbf{V} \wedge \mathbf{B}$ , le flux magnétique à travers toute surface en *mouvement* avec le plasma demeure constant.

$$\Phi = \int_{S_1} \mathbf{B}(t_1) \cdot d\vec{S} = \int_{S_2} \mathbf{B}(t_2) \cdot d\vec{S}$$

Cette propriété est fondamentale pour les plasmas sans collisions et implique une très relation très forte entre la dynamique du plasma et l'évolution du champ magnétique.



# Gel du champ magnétique : quelques conséquences

L'identité d'une ligne de champ est préservée

Les particules situées sur une même ligne de champ restent sur **la même ligne** qui est entraînée ou déformée par le mouvement du plasma.

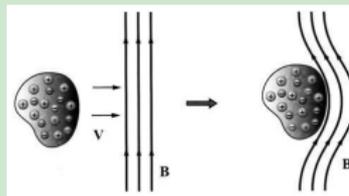
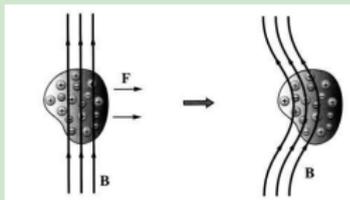
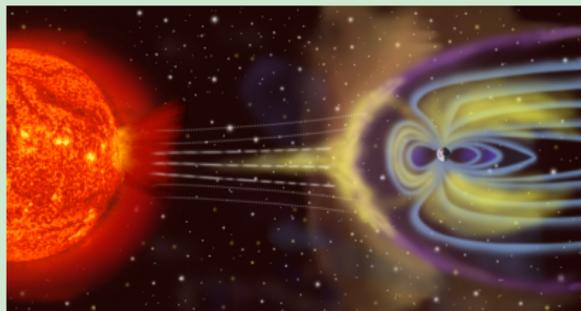


Illustration : le plasma du vent solaire ne peut pas pénétrer le champ magnétique terrestre pour cette raison et il le contourne pour former la magnétosphère. Mais en certains points de la magnétopause la condition de gel n'est pas respectée et du plasma peut entrer dans le système.

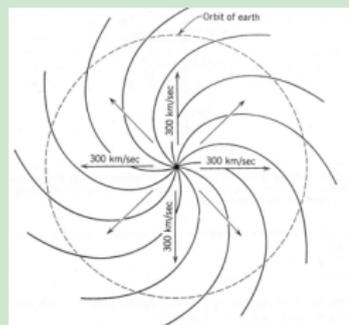
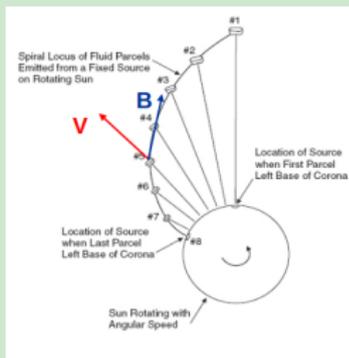


# Gel du champ magnétique : quelques conséquences (II)

Le champ magnétique interplanétaire est convecté par le vent solaire  
⇒ **Spirale de Parker**

Dans le vent solaire, le nombre de Reynolds magnétique est estimé à  $10^{13}$ - $10^{14}$  donc très largement supérieur à 1. Le champ magnétique est gelé dans le plasma.

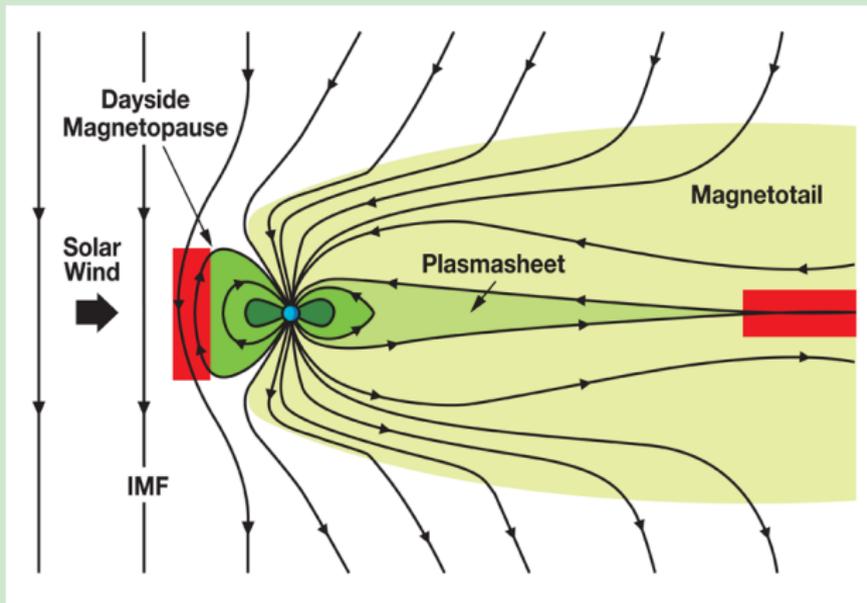
- expansion radiale du plasma émis par le Soleil
- les particules restent toujours sur la **même** ligne de champ
- ligne de champ = ligne d'émission du vent solaire = trajectoire des particules dans le référentiel tournant avec le Soleil
- analogie avec un arroseur de jardin



# Gel du champ magnétique : quelques conséquences (III)

## Convection magnétosphérique

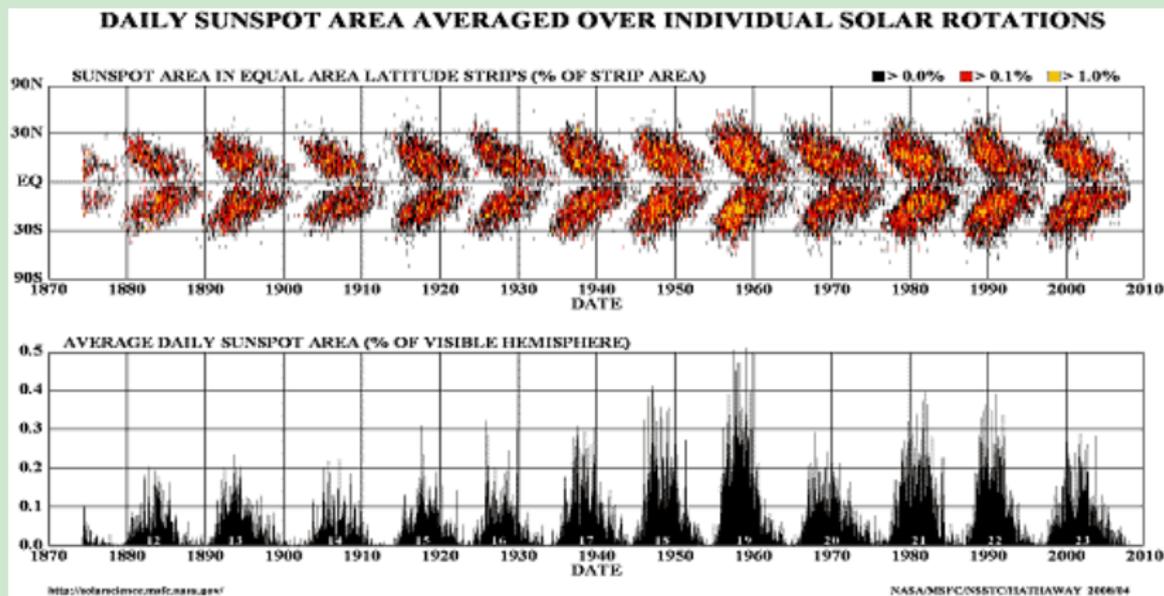
La magnétopause est une couche frontière de faible épaisseur  $L \sim 1000$  km à l'intérieur de laquelle  $\mathcal{R}_m$  chute (la vitesse du plasma est plus faible que dans le vent solaire). En certains points, l'intégrité des lignes de champ n'est plus respectée : il y a modification de la connectivité des lignes de champ. C'est le phénomène de reconnexion magnétique.



# Gel du champ magnétique : quelques conséquences (IV)

## Solar dynamo and cycle

Sunspot number varies according to a 11 year-cycle. Sunspots migrate towards equator during the cycle (butterfly diagram) :



# Gel du champ magnétique : quelques conséquences (V)

## Solar dynamo and cycle

Solar magnetic field reverses periodically (11 years) :

