Correction du devoir N°1

Exercice N° 1

NB :Les questions 1. ;2. et 3.sont indépendants

1. 311 est –il premier ? justifier (0.75)
   On a : $\sqrt{311} = 17, \ldots$***.l'ensemble des nombres 1er inferieur ou égale à 17 est*** $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17\}$ ***comme 311 n'est divisible par aucun de ces nombres donc il est 1er***
2. a) Déterminer les diviseurs de 12. (0.5)
   L'ensemble des diviseurs de 12 est : $D_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

   b) *Déterminer tous les valeurs de n pour que :* $\frac{12}{n-1} \in \mathbb{N}$

   $\frac{12}{n-1} \in \mathbb{N}$ ***équivalente à*** $n - 1$ $divise$ 12 ***, donc*** $n - 1 \in D_{12}$

   Donc $\begin{cases} n-1=1 \\ ou \\ n-1=2 \\ ou \\ n-1=3 \\ ou \\ n-1=4 \\ ou \\ n-1=6 \\ ou \\ n-1=12 \end{cases}$ ***équivalent à*** $\begin{cases} n=2 \\ ou \\ n=3 \\ ou \\ n=4 \\ ou \\ n=5 \\ ou \\ n=7 \\ ou \\ n=13 \end{cases}$ ***c.à.d.*** $n \epsilon \{2, 3, 4, 5, 7, 13\}$

   c) En déduire les valeurs de n pour que : $\frac{2n+10}{n-1} \epsilon \mathbb{N}$ ***(0.5)***

   On a : $\frac{2n+10}{n-1} = \frac{2(n-1)+12}{n-1} = 2 + \frac{12}{n-1} \epsilon \mathbb{N}$ ***si et seulement si*** $\frac{12}{n-1} \epsilon \mathbb{N}$ ***donc :*** $n \epsilon \{2, 3, 4, 5, 7, 13\}$
3. a) Déterminer l'ensemble de diviseurs de 60 ***(0.5)***
   L'ensemble des diviseur de 60 est :
   $D_{12} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$

   b) *Trouver les couples d'entiers naturels* (a, b) *tels que : ab=60 et* $PGCD(a, b) = 2$ (0 .5)

   On a : $ab = 60$ **donc** $a \epsilon \mathbf{D_{12}}$ **et** $b \epsilon \mathbf{D_{12}}$

   Et $pgcd(a, b) = 2$ **donc 2 divise a et b donc a pair et b pair**

   En conséquence a et $b \epsilon \{2, 4, 6, 10, 12, 20, 30, 60\}$

   donc : $\begin{cases} a = 2 \\ et \\ b = 30 \end{cases}$ ou $\begin{cases} a = 30 \\ et \\ b = 2 \end{cases}$ ou $\begin{cases} a = 6 \\ et \\ b = 10 \end{cases}$ ou $\begin{cases} a = 10 \\ et \\ b = 6 \end{cases}$ **les couples sont :(2,30),(30,2),(6,10)(10,6)**

   c) En déduire $PPCM(a, b)$ (0.25)
   On a :

$$ppcm(a, b) = \frac{a \times b}{2} = \frac{60}{2} = 30$$

Correction du devoir N°1

Exercice N°2

Soit , $n\epsilon\mathbb{N}$. On pose : $A = 6^{n+2} - 6^n$

1. *Montrer que : A est divisible par 5 pout tout entier naturel n* ***.*** ***(0.75)***

On a $A = 6^{n+2} - 6^n = 6^n 6^2 - 6^n = 6^n(6^2 - 1) = 6^n \times 35$ ***Donc divisible par 5***

2. Déterminer le reste de la division euclidienne du nombre B=A+2014 , par 5 (01)

On a : $B = A + 2014 = 6^n \times 35 + 2014 = 6^n \times 7 \times 5 + 2014$

$$B = 6^n \times 7 \times 5 + 402 \times 5 + 4 = 5(6^n \times 7 + 402) + 4$$

Donc le reste de la division de B est 4 (car $4 < 5$***))***

3. Soit $n\epsilon\mathbb{N}$

a) *Vérifier que : $n^2 + 3n + 5 = (n+1)(n+2) + 3$* ***(0.25)***

On a : $(n+1)(n+2) + 3 = n^2 + n + 2n + 2 + 3 = n^2 + 3n + 5$ ***c.q.f.d.***

b) Déterminer alors $PGCD(n^2 + 3n + 2 \,, n+1)$ (0.1)

On a : $(n+1)(n+2) + 3 = n^2 + 3n + 5$

Donc : $(n+1)(n+2) = n^2 + 3n + 5 - 3 = n^2 + 3n + 2$

Donc : $PGCD(n^2 + 3n + 2, n+1) = PGCD\big((n+1)(n+2), n+1\big) = n+1$

Car :n+1 divise (n+1)(n+2) et n+2 ne divise pas n+1(ils sont successifs)

c) En déduire le $PGCD(10302{,}101)$ (01)

ON a : $10302 = 102 \times 101 = (100+2)(100+1)$ ***d'après 3.b)***

$$PGCD(10302, 101) = 101$$

Exercice N°3

Correction du devoir N°1

On pose $x = 3 + 2\sqrt{2}$ et $y = 3 - 2\sqrt{2}$

1. *Montrer que x et y sont inverses* **: (01)**

   On a : $\boldsymbol{x \times y = (3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2}) = 3^2 - (2\sqrt{2})^2 = 1}$ ***donc x et y sont inverses***

2. **Calculer :** $\boldsymbol{S = xy^2 - yx^2}$ **(1.25)**

On a : $\boldsymbol{S = xy^2 - yx^2 = xy(y-x) = y - x = 3 - 2\sqrt{2} - (3+2\sqrt{2}) = -4\sqrt{2}}$

3. *a) Développer :* $(\sqrt{2}-1)^2$ *et* $(\sqrt{2}+1)^2$ *(0.5)*

   On a : $\boldsymbol{(\sqrt{2}-1)^2 = \sqrt{2}^2 + 1^2 - 2\sqrt{2} = 2 + 1 - 2\sqrt{2} = 3 - 2\sqrt{2} = y}$
   Et :
   $\boldsymbol{(\sqrt{2}+1)^2 = \sqrt{2}^2 + 1^2 + 2\sqrt{2} = 2 + 1 + 2\sqrt{2} = 3 + 2\sqrt{2} = x}$

   b) en déduire : $\sqrt{x}$ *et* $\sqrt{y}$ (0.5)

$$\boldsymbol{\sqrt{x} = \sqrt{(\sqrt{2}+1)^2} = \sqrt{2} + 1}$$

$$\boldsymbol{\sqrt{y} = \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} = \sqrt{2} - 1}$$ ***; Car*** $\boldsymbol{(\sqrt{2} > 1)}$

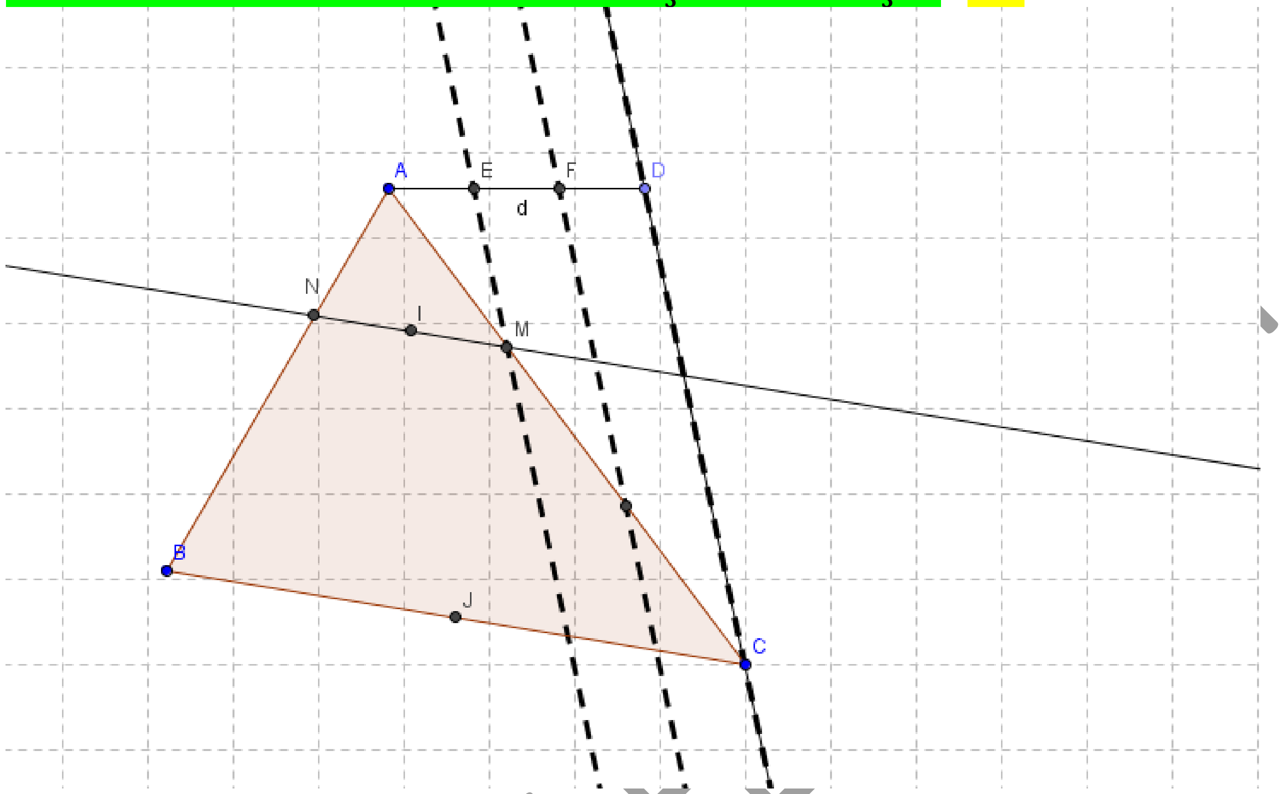
   c) *Montrer que :* $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{2}}$ *est un entier naturel (01)*

   On a : $\boldsymbol{\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+1+\sqrt{2}-1}{2} = 2 \epsilon \mathbb{N}}$

Correction du devoir N°1

Soit ABC un triangle

1. ***Construire les points M et N tel que : $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$*** ***(01)***



2. ***Montrer que : $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires*** ***(0.5)***

: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\right) = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

Donc $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires

3. ***Soient les points I et J les milieux respectifs de [MN] et [BC]***

a) Exprimer $\overrightarrow{AI}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ***(0.5)***

On a : $2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

Donc : $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$

b) Exprimer $\overrightarrow{AJ}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ***(0.5)***

On a : $2\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

Donc : $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

c) ***Montrer que A , I, et J sont alignés*** ***(01.5)***

On a : $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$ donc : $6\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

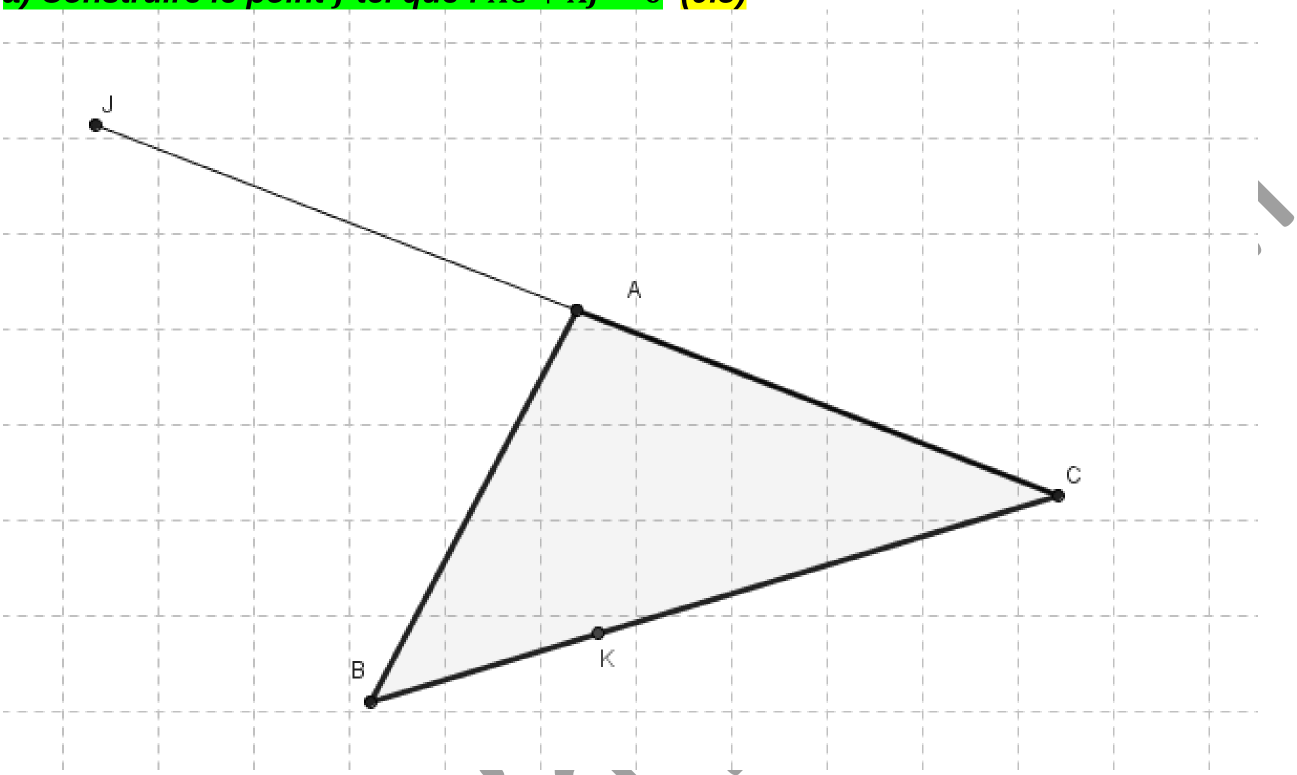
Et : $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ donc : $2\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

En conséquence : $6\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AJ}$ ***Donc : $\overrightarrow{AJ} = 3\overrightarrow{AI}$*** ***donc les points : A , I, et J sont alignés***

Correction du devoir N°1

ABC est un triangle ; I est le milieu de [AB].

1. a) Construire le point J tel que : $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AJ}=\vec{0}$ (0.5)



b) En déduire que $2\overrightarrow{IJ}=-\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$ (01)

On a : $2\overrightarrow{IJ}=2\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AJ}\right)=\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{CA}=-\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$

2. On note par K le point tel que : $2\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}=\vec{0}$ (0.1)

a) Montrer que : $\overrightarrow{BK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$, puis construire K

On a : $2\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}=2\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{BC}=\vec{0}$

Donc : $3\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{BC}=\vec{0}$ ***Ainsi : :*** $\overrightarrow{BK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

b) En déduire que : $3\overrightarrow{IK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ ***(01)***

On a : $3\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{BC}=3\left(\overrightarrow{KI}+\overrightarrow{IB}\right)+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

$3\overrightarrow{KI}+3\times\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

Donc : $3\overrightarrow{IK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

c) Que peut-on dire des points I, J et K (0.5)

On a : $3\overrightarrow{IK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ ***et :*** $-\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

Donc : $-\overrightarrow{IJ}=3\overrightarrow{IK}$ ***Alors :*** $\overrightarrow{IJ}=-3\overrightarrow{IK}$ ***donc : les points I, J et K***