

LES MATHÉMATIQUES ET LA LOGIQUE

Article publié dans la *Revue de Métaphysique et de
Morale*,
Années 1905, p. 815-835, 1906, p. 17-38, et p. 294-317.

par
Henri Poincaré
Membre de l'Institut

Alain.Blachair@ac-nancy-metz.fr

Cliquez sur le lien ci-dessus pour signaler des erreurs.

Premier article.....	4
I.....	4
II.....	4
III.....	6
IV. Définitions et axiomes.....	6
V.....	8
VI.....	9
VII. La pasigraphie.....	9
VIII.....	11
IX.....	12
X. La logique de Russell.....	13
XI.....	15
XII.....	16
XIII. Le nombre cardinal.....	17
XIV.....	17
XV.....	18
XVI. L'arithmétique.....	18
XVII.....	20
Deuxième article.....	22
XVIII. La logique de Hilbert.....	22
XIX.....	23
XX.....	24
XXI.....	25
XXII.....	25
XXIII.....	26
XXIV.....	27
XXV.....	28
XXVI. Le nombre infini.....	30
XXVII.....	32
XXVIII. La géométrie.....	33
XXIX. Conclusion.....	33
XII.....	35
XXXI.....	36
Troisième article.....	37
I. La définition du nombre.....	37
II. L'infailibilité de la logistique.....	37
III. La liberté de la contradiction.....	39
IV.....	41
V. La seconde objection.....	42
VI.....	44
VII. Les antinomies cantorienne.....	44
VIII. Zigzag-theory et noclass-theory.....	46
IX. La vraie solution.....	48
X. Les démonstrations du principe d'induction.....	48

XI.....	49
XII.....	51
XIII. L'axiome de Zermelo.....	51
XIV. Théorème de bernstein.....	53
XV. Conclusions.....	55

Premier article

I

Dans ces dernières années de nombreux travaux ont été publiés sur les mathématiques pures et la philosophie des mathématiques, en vue de dégager et d'isoler les éléments logiques du raisonnement mathématique. Ces travaux ont été analysés et exposés très clairement ici-même par M. Couturat dans une série d'articles intitulés les principes des Mathématiques.

Je citerai en première ligne les écrits de Hilbert et de ses disciples, ceux de Whitehead, de B. Russell, ceux de Peano et de son école. On ne s'étonnera pas que je ne nomme pas ici M. Veronese ; bien qu'il se soit rencontré sur bien des points avec M. Hilbert, il se place à un point de vue tout différent et il est constamment préoccupé au contraire de conserver à l'intuition sa place légitime.

J'ai eu dernièrement l'occasion de faire l'éloge du livre de M. Hilbert et d'en faire ressortir toute la portée, et en général tous ces travaux me semblent présenter un très grand intérêt. On devra désormais en tenir grand compte dans toutes les recherches de ce genre, et il y a lieu de se demander s'ils ne remettent pas en question quelques-unes des conclusions que certains philosophes croyaient acquises.

Pour M. Couturat, la question n'est pas douteuse ; ces travaux nouveaux ont définitivement tranché le débat, depuis si longtemps pendant entre Leibnitz et Kant. Ils ont montré qu'il n'y a pas de jugement synthétique *a priori*, que les mathématiques sont entièrement réductibles à la logique et que l'intuition n'y joue aucun rôle.

C'est ce que M. Couturat a exposé dans les articles que je viens de citer ; c'est ce qu'il a dit plus nettement encore à son discours du jubilé de Kant, si bien que j'ai entendu mon voisin dire à demi-voix : « On voit bien que c'est le centenaire de la *mort* de Kant ».

Pouvons-nous souscrire à cette condamnation définitive ? Je ne le crois pas et je vais essayer de montrer pourquoi.

II

Ce qui nous frappe d'abord dans la nouvelle mathématique, c'est son caractère purement formel : « Pensons, dit Hilbert, trois sortes de *choses* que nous appellerons points, droites et plans, convenons qu'une droite sera déterminée par deux points et qu'au lieu de dire que cette droite est déterminée par ces deux points,

nous pourrions dire qu'elle passe par ces deux points ou que ces deux points sont situés sur cette droite. » Que sont ces *choses*, non seulement nous n'en savons rien, mais nous ne devons pas chercher à le savoir. Nous n'en avons pas besoin, et quelqu'un, qui n'aurait jamais vu ni point, ni droite, ni plan pourrait faire de la géométrie tout aussi bien que nous. Que le mot *passer par*, ou le mot *être situé sur* ne provoquent en nous aucune image, le premier est simplement synonyme de *être déterminé* et le second de *déterminer*.

Ainsi c'est bien entendu, pour démontrer un théorème, il n'est pas nécessaire ni même utile de savoir ce qu'il veut dire. On pourrait remplacer le géomètre par le *piano à raisonner* imaginé par Stanley Jevons ; ou, si l'on aime mieux, on pourrait imaginer une machine où l'on introduirait les axiomes par un bout pendant qu'on recueillerait les théorèmes à l'autre bout, comme cette machine légendaire de Chicago où les porcs entrent vivants et d'où ils sortent transformés en jambons et en saucisses. Pas plus que ces machines, le mathématicien n'a besoin de comprendre ce qu'il fait.

Ce caractère formel de sa géométrie, je n'en fais pas un reproche à Hilbert. C'était là qu'il devait tendre, étant donné le problème qu'il se posait. Il voulait réduire au minimum le nombre des axiomes fondamentaux de la géométrie et en faire l'énumération complète ; or dans les raisonnements où notre esprit reste actif, dans ceux où l'intuition joue encore un rôle, dans les raisonnements vivants, pour ainsi dire, il est difficile de ne pas introduire un axiome ou un postulat qui passe inaperçu. Ce n'est donc qu'après avoir ramené tous les raisonnements géométriques à une forme purement mécanique, qu'il a pu être certain d'avoir réussi dans son dessein et d'avoir achevé son œuvre.

Ce que Hilbert avait fait pour la géométrie, d'autres ont voulu le faire pour l'arithmétique et pour l'analyse. Si même ils y avaient entièrement réussi, les Kantiens seraient-ils définitivement condamnés au silence ? Peut-être pas, car en réduisant la pensée mathématique à une forme vide, il est certain qu'on la mutile. Admettons même que l'on ait établi que tous les théorèmes peuvent se déduire par des procédés purement analytiques, par de simples combinaisons logiques d'un nombre fini d'axiomes, et que ces axiomes ne sont que des conventions. Le philosophe conserverait le droit de rechercher les origines de ces conventions, de voir pourquoi elles ont été jugées préférables aux conventions contraires.

Et puis la correction logique des raisonnements qui mènent des axiomes aux théorèmes n'est pas la seule chose dont nous devons nous préoccuper. Les règles de la parfaite logique sont-elles toute la mathématique ? Autant dire que tout l'art du joueur d'échecs se réduit aux règles de la marche des pièces. Parmi toutes les constructions que l'on peut combiner avec les matériaux fournis par la logique, il faut faire un choix ; le vrai géomètre fait ce choix judicieusement parce qu'il est

guidé par un sûr instinct, ou par quelque vague conscience de je ne sais quelle géométrie plus profonde, et plus cachée, qui seule fait le prix de l'édifice construit.

Chercher l'origine de cet instinct, étudier les lois de cette géométrie profonde qui se sentent et ne s'énoncent pas, ce-serait encore une belle tâche pour les philosophes qui ne veulent pas que la logique soit tout. Mais ce n'est pas à ce point de vue que je veux me placer, ce n'est pas ainsi que je veux poser la question. Cet instinct dont nous venons de parler est nécessaire à l'inventeur, mais il semble d'abord qu'on pourrait s'en passer pour étudier la science une fois créée. Eh bien, ce que je veux rechercher, c'est s'il est vrai qu'une fois admis les principes de la logique, on peut je ne dis pas découvrir, mais démontrer toutes les vérités mathématiques sans faire de nouveau appel à l'intuition.

III

A cette question, j'avais autrefois répondu que non ; notre réponse doit-elle être modifiée par les travaux récents ? Si j'avais répondu non, c'est parce que « le principe d'induction complète » me paraissait à la fois nécessaire au mathématicien et irréductible à la logique. On sait quel est l'énoncé de ce principe :

« Si une propriété est vraie du nombre 1, et si l'on établit qu'elle est vraie de $n + 1$ pourvu qu'elle le soit de n , elle sera vraie de tous les nombres entiers. » J'y voyais le raisonnement mathématique par excellence. Je ne voulais pas dire, comme on l'a cru, que tous les raisonnements mathématiques peuvent se réduire à une application de ce principe. En examinant ces raisonnements d'un peu près, on y verrait appliqués beaucoup d'autres principes analogues, présentant les mêmes caractères essentiels. Dans cette catégorie de principes, celui de l'induction complète est seulement le plus simple de tous et c'est pour cela que je l'ai choisi pour type.

IV. Définitions et axiomes.

L'existence de pareils principes est une difficulté pour les logiciens intransigeants ; comment prétendent-ils s'en tirer ? Le principe d'induction complète, disent-ils, n'est pas un axiome proprement dit ou un jugement synthétique *a priori* ; c'est tout simplement la définition du nombre entier. C'est donc une simple convention. Pour discuter cette manière de voir, il nous faut examiner d'un peu près les relations entre les définitions et les axiomes.

Reportons-nous d'abord à un article de M. Couturat sur les définitions mathématiques, qui a paru dans *l'Enseignement mathématique*, revue publiée chez

Gauthier-Villars et chez Georg à Genève. Nous y verrons une distinction entre la *définition directe* et la *définition par postulats*.

« La définition par postulats, dit M. Couturat, s'applique, non à une seule notion, mais à un système de notions ; elle consiste à énumérer les relations fondamentales qui les unissent et qui permettent de démontrer toutes leurs autres propriétés ; ces relations sont des postulats... »

Si l'on a défini préalablement toutes ces notions, sauf une, alors cette dernière sera par définition l'objet qui vérifie ces postulats.

Ainsi certains axiomes indémonstrables des mathématiques ne seraient que des définitions déguisées. Ce point de vue est souvent légitime ; et je l'ai admis moi-même en ce qui concerne par exemple le postulat d'Euclide.

Les autres axiomes de la géométrie ne suffisent pas pour définir complètement la distance ; la distance sera alors, par définition, parmi toutes les grandeurs qui satisfont à ces autres axiomes, celle qui est telle que le postulat d'Euclide soit vrai.

Eh bien, les logiciens admettent pour le principe d'induction complète, ce que j'admets pour le postulat d'Euclide, ils ne veulent y voir qu'une définition déguisée.

Mais pour qu'on ait ce droit, il y a deux conditions à remplir. Stuart Mill disait que toute définition implique un axiome, celui par lequel on affirme l'existence de l'objet défini. A ce compte, ce ne serait plus l'axiome qui pourrait être une définition déguisée, ce serait au contraire la définition qui serait un axiome déguisé. Stuart Mill entendait le mot existence dans un sens matériel et empirique ; il voulait dire qu'en définissant le cercle, on affirme qu'il y a des choses rondes dans la nature.

Sous cette forme, son opinion est inadmissible. Les mathématiques sont indépendantes de l'existence des objets matériels ; en mathématiques le mot exister ne peut avoir qu'un sens, il signifie exempt de contradiction. Ainsi rectifiée, la pensée de Stuart Mill devient exacte ; en définissant un objet, on affirme que la définition n'implique pas contradiction.

Si nous avons donc un système de postulats, et si nous pouvons démontrer que ces postulats n'impliquent pas contradiction, nous aurons le droit de les considérer comme représentant la définition de l'une des notions qui y figurent. Si nous ne pouvons pas démontrer cela, il faut que nous l'admettions sans démonstration et cela sera alors un axiome ; de sorte que si nous voulions chercher la définition sous le postulat, nous retrouverions encore l'axiome sous la définition.

Le plus souvent, pour démontrer qu'une définition n'implique pas contradiction, on procède par l'exemple, on cherche à former un exemple d'un objet satisfaisant à la définition. Prenons le cas d'une définition par postulats ; nous voulons définir une notion A, et nous disons que, par définition, un A, c'est tout

objet pour lequel certains postulats sont vrais. Si nous pouvons démontrer directement que tous ces postulats sont vrais d'un certain objet B, la définition sera justifiée ; l'objet B sera un *exemple* d'un A. Nous serons certains que les postulats ne sont pas contradictoires, puisqu'il y a des cas où ils sont vrais tous à la fois.

Mais une pareille démonstration directe par l'exemple n'est pas toujours possible.

Pour établir que les postulats n'impliquent pas contradiction, il faut alors envisager toutes les propositions que l'on peut dédire de ces postulats considérés comme prémisses et montrer que, parmi ces propositions, il n'y en a pas deux dont l'une soit la contradictoire de l'autre. Si ces propositions sont en nombre fini, une vérification directe est possible. Ce cas est peu fréquent et d'ailleurs peu intéressant.

Si ces propositions sont en nombre infini, on ne peut plus faire cette vérification directe ; il faut recourir à des procédés de démonstration où en général on sera forcé d'invoquer ce principe d'induction complète qu'il s'agit précisément de vérifier.

Nous venons d'expliquer l'une des conditions auxquelles les logiciens devaient satisfaire et *nous verrons plus loin qu'ils ne l'ont pas fait.*

V

Il y en a une seconde. Quand nous donnons une définition, c'est pour nous en servir.

Nous retrouverons donc dans la suite du discours le mot défini ; avons-nous le droit d'affirmer, de l'objet représenté par ce mot, le postulat qui a servi de définition ? Oui, évidemment, si le mot a conservé son sens, si nous ne lui attribuons pas implicitement un sens différent. Or c'est ce qui arrive quelquefois et il est le plus souvent difficile de s'en apercevoir ; il faut voir comment ce mot s'est introduit dans notre discours, et si la porte par laquelle il est entré n'implique pas en réalité une autre définition que celle qu'on a énoncée.

Cette difficulté se présente dans toutes les applications des mathématiques. La notion mathématique a reçu une définition très épurée et très rigoureuse ; et pour le mathématicien pur toute hésitation a disparu ; mais si on veut l'appliquer aux sciences physiques par exemple, ce n'est plus à cette notion pure que l'on a affaire, mais à un objet concret qui n'en est souvent qu'une image grossière. Dire que cet objet satisfait, au moins approximativement, à la définition, c'est énoncer une vérité nouvelle, que l'expérience peut seule mettre hors de doute, et qui n'a plus le caractère d'un postulat conventionnel.

Mais, sans sortir des mathématiques pures, on rencontre encore la même difficulté.

Vous donnez du nombre une définition subtile ; puis, une fois cette définition donnée, vous n'y pensez plus ; parce qu'en réalité, ce n'est pas elle qui vous a appris ce que c'était que le nombre, vous le saviez depuis longtemps, et quand le mot nombre se retrouve plus loin sous votre plume, vous y attachez le même sens que le premier venu ; pour savoir quel est ce sens et s'il est bien le même dans telle phrase ou dans telle autre, il faut voir comment vous avez été amené à parler de nombre et à introduire ce mot dans ces deux phrases. Je ne m'explique pas davantage sur ce point pour le moment, car nous aurons l'occasion d'y revenir.

Ainsi voici un mot dont nous avons donné explicitement une définition A ; nous en faisons ensuite dans le discours un usage qui suppose implicitement une autre définition B. Il est possible que ces deux définitions désignent un même objet. Mais qu'il en soit ainsi, c'est une vérité nouvelle, qu'il faut, ou bien démontrer, ou bien admettre comme un axiome indépendant.

Nous verrons plus loin que les logiciens n'ont pas mieux rempli la seconde condition que la première.

VI

Les définitions du nombre sont très nombreuses et très diverses ; je renonce à énumérer même les noms de leurs auteurs. Nous ne devons pas nous étonner qu'il y en ait tant. Si l'une d'elles était satisfaisante, on n'en donnerait plus de nouvelle. Si chaque nouveau philosophe qui s'est occupé de cette question a cru devoir en inventer une autre, c'est qu'il n'était pas satisfait de celles de ses devanciers, et s'il n'en était pas satisfait, c'est qu'il croyait y apercevoir une pétition de principe.

J'ai toujours éprouvé, en lisant les écrits consacrés à ce problème, un profond sentiment de malaise ; je m'attendais toujours à me heurter à une pétition de principe et, quand je ne l'apercevais pas tout de suite, j'avais la crainte d'avoir mal regardé.

C'est qu'il est impossible de donner une définition sans énoncer une phrase, et difficile d'énoncer une phrase sans y mettre un nom de nombre, ou au moins le mot plusieurs, ou au moins un mot au pluriel. Et alors la pente est glissante et à chaque instant on risque de tomber dans la pétition de principe.

Je ne m'attacherai dans la suite qu'à celles de ces définitions où la pétition de principe est, ou évitée, ou habilement dissimulée.

VII. La pasigraphie.

Le langage symbolique créé par M. Peano joue un très grand rôle dans ces nouvelles recherches. Il est susceptible de rendre de grands services, mais il me semble que M. Couturat y attache une importance exagérée et qui a dû étonner M. Peano lui-même.

L'élément essentiel de ce langage, ce sont certains signes algébriques qui représentent les différentes conjonctions : si, et, ou, donc. Que ces signes soient commodes, c'est possible ; mais qu'ils soient destinés à renouveler toute la philosophie, c'est une autre affaire. Il est difficile d'admettre que le mot si acquiert, quand on l'écrit \mathfrak{D} , une vertu qu'il n'avait pas quand on l'écrivait si.

Cette invention de M. Peano s'est appelée d'abord la pasigraphie, c'est-à-dire l'art d'écrire un traité de mathématiques sans employer un seul mot de la langue usuelle. Ce nom en définissait très exactement la portée. Depuis on l'a élevée à une dignité plus éminente, en lui conférant le titre de *logistique*. Ce mot est, paraît-il, employé à l'École de Guerre pour désigner l'art du maréchal des logis, l'art de faire marcher et de cantonner les troupes ; mais ici aucune confusion n'est à craindre et on voit tout de suite que ce nom nouveau implique le dessein de révolutionner la logique.

Nous pouvons voir la nouvelle méthode à l'œuvre dans un mémoire mathématique de M. Burali-Forti, intitulé : *Una Questione sui numeri transfiniti*, et inséré dans le tome XI des *Rendiconti del circolo matematico di Palermo*.

Je commence par dire que ce mémoire est très intéressant, et si je le prends ici pour exemple, c'est précisément parce qu'il est le plus important de tous ceux qui sont écrits dans le nouveau langage. D'ailleurs les profanes peuvent le lire grâce à une traduction interlinéaire italienne.

Ce qui fait l'importance de ce mémoire, c'est qu'il a donné le premier exemple de ces antinomies que l'on rencontre dans l'étude des nombres transfinis et qui font depuis quelques années le désespoir des mathématiciens. Le but de cette note, dit M. Burali-Forti, c'est de montrer qu'il peut y avoir deux nombres transfinis (ordinaux), a et b , tel que a ne soit ni égal à b , ni plus grand, ni plus petit.

Que le lecteur se rassure, pour comprendre les considérations qui vont suivre, il n'a pas besoin de savoir ce que c'est qu'un nombre ordinal transfini.

Or Cantor avait précisément démontré qu'entre deux nombres transfinis, il ne peut y avoir d'autre relation que l'égalité, ou l'inégalité dans un sens ou dans l'autre. Mais ce n'est pas du fond de ce mémoire que je veux parler ici ; cela m'entraînerait beaucoup trop loin de mon sujet ; je veux seulement m'occuper de la forme, et précisément je me demande si cette forme lui fait beaucoup gagner en rigueur et si elle compense par là les efforts qu'elle impose à l'écrivain et au lecteur.

Nous voyons d'abord M. Burali-Forti définir le nombre 1 de la manière suivante :

$$1 = \{ T \cap \{ K_0 \cap (u, h) \ni (u \in U_n) \}$$

définition éminemment propre à donner une idée du nombre 1 aux personnes qui n'en auraient jamais entendu parler.

J'entends trop mal le Péanien pour oser risquer une critique, mais je crains bien que cette définition ne contienne une pétition de principe, attendu que j'aperçois 1 en chiffre dans le premier membre et Un en toutes lettres dans le second.

Quoi qu'il en soit, M. Burali-Forti part de cette définition et, après un court calcul, il arrive à l'équation :

$$(27) \quad 1 \in N_0$$

qui nous apprend que Un est un nombre.

Et puisque nous en sommes à ces définitions des premiers nombres, rappelons que M. Couturat a défini également 0 et 1.

Qu'est-ce que zéro ? c'est le nombre des éléments de la classe nulle ; et qu'est-ce que la classe nulle ? c'est celle qui ne contient aucun élément.

Définir zéro par nul, et nul par aucun, c'est vraiment abuser de la richesse de la langue française ; aussi M. Couturat a-t-il introduit un perfectionnement dans sa définition, en écrivant :

$$0 = \iota \Lambda : \varphi x = \Lambda. \varnothing. \Lambda = (x \in \varphi x)$$

ce qui veut dire en français : zéro est le nombre des objets qui satisfont à une condition qui n'est jamais remplie.

Mais comme jamais signifie en aucun cas je ne vois pas que le progrès soit considérable.

Je me hâte d'ajouter que la définition que M. Couturat donne du nombre 1 est plus satisfaisante.

Un, dit-il en substance, est le nombre des éléments d'une classe dont deux éléments quelconques sont identiques.

Elle est plus satisfaisante, ai-je dit, en ce sens que pour définir 1, il ne se sert pas du mot un ; en revanche, il se sert du mot deux. Mais j'ai peur que si on demandait à M. Couturat ce que c'est que deux, il ne soit obligé de se servir du mot un.

VIII

Mais revenons au mémoire de M. Burali-Forti ; j'ai dit que ses conclusions sont en opposition directe avec celles de Cantor. Or un jour, je reçus la visite de M. Hadamard et la conversation tomba sur cette antinomie.

« Le raisonnement de Burali-Forti, lui disais-je, ne vous semble-t-il pas irréprochable ?

- Non, et au contraire je ne trouve rien à objecter à celui de Cantor. D'ailleurs Burali-Forti n'avait pas le droit de parler de l'ensemble de *tous* les nombres ordinaux.

- Pardon, il avait ce droit, puisqu'il pouvait toujours poser

$$\Omega = \mathbf{T}'(N_0, \bar{\varepsilon} >)$$

Je voudrais bien savoir qui aurait pu l'en empêcher, et peut-on dire qu'un objet n'existe pas, quand on l'a appelé ? »

Ce fut en vain, je ne pus le convaincre (ce qui d'ailleurs eût été fâcheux, puisqu'il avait raison). Était-ce seulement parce que je ne parlais pas le péanien avec assez d'éloquence ? peut-être ; mais entre nous je ne le crois pas.

Ainsi, malgré tout cet appareil pasigraphique, la question n'était pas résolue. Qu'est-ce que cela prouve ? Tant qu'il s'agit seulement de démontrer que un est un nombre, la pasigraphie suffit, mais si une difficulté se présente, s'il y a une antinomie à résoudre, la pasigraphie devient impuissante.

IX

Quels services peut donc nous rendre la pasigraphie ? Si la thèse des logiciens est vraie, tous les raisonnements mathématiques ne sont que des combinaisons mécaniques des règles de la logique. Je ne veux pas dire que les mathématiques pourraient être créées par un être absolument inintelligent. Mais le rôle de l'intelligence se borne à choisir dans un arsenal limité de règles posées d'avance, sans avoir le droit d'en inventer de nouvelles. Dans ce cas, tous ces raisonnements peuvent être pasigraphiés. Par conséquent la pasigraphie peut nous fournir un critérium pour décider la question qui nous occupe. Si tout traité de mathématiques peut être traduit dans le langage péanien, ce sont les logiciens qui ont raison. Si cette traduction est impossible, ou si on ne peut la faire qu'en introduisant des prémisses irréductibles à la logique, les Kantiens triomphent.

Encore convient-il d'examiner de près la traduction. Il ne suffit pas qu'on nous présente une page où il n'y a que des formules et pas un seul mot de la langue vulgaire pour que nous devions nous incliner. L'aventure de M. Burali-Forti suffit pour nous avertir de la nécessité d'être circonspect. Burali-Forti et Cantor sont arrivés à des conclusions contradictoires ; donc l'un ou l'autre se trompe. Le premier a employé la pasigraphie ; le second aurait pu en faire autant au moins aussi facilement, et d'ailleurs au fond c'est lui qui a raison. Donc la pasigraphie ne nous préserve pas de l'erreur. Pourquoi ? Est-ce parce que les règles de la logique sont trompeuses ? Évidemment non ; c'est parce qu'on a fait un appel à l'intuition et qu'on l'a fait à faux. Cet appel a eu lieu, sans quoi on ne se serait pas trompé ; et il a

été dissimulé, sans quoi on n'aurait pas pu employer le langage péanien. Il est donc possible, même quand on parle ce langage couramment, d'en appeler à l'intuition sans s'en apercevoir. Aussi sera-t-il nécessaire quand on sera en présence d'un raisonnement pasigraphié, même quand ce raisonnement sera correct, d'examiner si un semblable appel n'est pas caché dans quelque coin.

X. La logique de Russell.

M. Russell commence par développer les principes fondamentaux de la logique, et c'est aussi par là que M. Couturat commence son exposé. Il semble qu'il n'y ait rien à écrire de nouveau sur la logique formelle et qu'Aristote en ait vu le fond. Mais le champ que M. Russell attribue à la logique est infiniment plus étendu que celui de la logique classique et il a trouvé moyen d'émettre sur ce sujet les vues les plus originales et les plus justes.

D'abord, tandis que la logique d'Aristote était avant tout la logique des classes et prenait pour point de départ la relation de sujet à prédicat, M. Russell subordonne la logique des classes à celle des propositions. Le syllogisme classique « Socrate est un homme », etc., fait place au syllogisme hypothétique : Si A est vrai, B est vrai, or si B est vrai C est vrai, etc. Et c'est là, à mon sens, une idée des plus heureuses, car le syllogisme classique est facile à ramener au syllogisme hypothétique, tandis que la transformation inverse ne se fait pas sans difficulté.

Et puis ce n'est pas tout : la logique des propositions de M. Russell est l'étude des lois suivant lesquelles se combinent les conjonctions *si*, *et*, *ou*, et la négation *ne pas*. C'est une extension considérable de l'ancienne logique. Les propriétés du syllogisme classique s'étendent sans peine au syllogisme hypothétique et, dans les formes de ce dernier, on reconnaît aisément les formes scolastiques; on retrouve ce qu'il y a d'essentiel dans la logique classique. Mais la théorie du syllogisme n'est encore que la syntaxe de la conjonction *si* et peut-être de la négation.

En y adjoignant deux autres conjonctions *et* et *ou*, M. Russell ouvre à la logique un domaine nouveau. Les signes *et*, *ou* suivent les mêmes lois que les deux signes \times et $+$, c'est-à-dire les lois commutative, associative et distributive. Ainsi *et* représente la multiplication logique, tandis que *ou* représente l'addition logique. Cela aussi est très intéressant.

M. B. Russell arrive à cette conclusion qu'une proposition fausse quelconque implique toutes les autres propositions vraies ou fausses. M. Couturat dit que cette conclusion semblera paradoxale au premier abord. Il suffit cependant d'avoir corrigé une mauvaise thèse de mathématique, pour reconnaître combien M. Russell a vu juste. Le candidat se donne souvent beaucoup de mal pour trouver la première équation fausse ; mais dès qu'il l'a obtenue, ce n'est plus qu'un jeu pour lui

d'accumuler les résultats les plus surprenants, dont quelques-uns même peuvent être exacts.

Une autre invention heureuse est celle de la fonction propositionnelle ; on appelle ainsi toute proposition qui dépend de quelque chose de variable, et on la désigne par $\varphi(x)$, x étant la variable. La proposition $\varphi(x)$ peut être vraie ou fausse. Il peut arriver qu'elle soit vraie pour certains choix de x et fausse pour certains autres, et c'est là l'origine de la notion de classe et de la logique des classes ; car $\varphi(x)$ définit la classe des x pour lesquels la proposition $\varphi(x)$ est vraie. Et d'ailleurs toute classe peut être définie de cette façon, car la classe homme, par exemple, c'est la classe des x pour lesquels la proposition « x est homme » est vraie, et cette proposition est une fonction propositionnelle de x .

Il peut arriver aussi que la proposition $\varphi(x)$ soit vraie, pour tous les choix de x , ou du moins pour tous les x qui appartiennent à une classe donnée, par exemple à la classe définie par la fonction propositionnelle $\varphi(x)$. On a alors

Si $\varphi(x)$, $\psi(x)$.

C'est le genre de propositions que les scolastiques désignaient par A.

Ou bien encore il peut arriver que la proposition $\varphi(x)$ soit vraie *au moins* pour un des x de la classe $\psi(x)$. On a alors une proposition du genre de celles que les scolastiques désignaient par I.

Mais, ce que je voudrais faire remarquer, c'est la relation entre ces propositions de la forme A et de la forme I avec la multiplication et l'addition logiques.

Si, en effet, la classe $\psi(x)$ comprend par exemple quatre éléments x_1, x_2, x_3, x_4 , la proposition

Si $\varphi(x)$, $\psi(x)$ quel que soit x (forme A)

signifie :

$\varphi(x_1)$ et $\varphi(x_2)$ et $\varphi(x_3)$ et $\varphi(x_4)$ (multiplication logique)

et la proposition

Si $\varphi(x)$, $\psi(x)$ au moins pour un x (forme I)

signifie

$\varphi(x_1)$ ou $\varphi(x_2)$ ou $\varphi(x_3)$ ou $\varphi(x_4)$ (addition logique)

Et cela peut nous fournir le moyen d'appliquer "addition ou la multiplication logiques à un nombre infini de propositions.

On peut envisager aussi des fonctions propositionnelles de deux variables x et y ; c'est ce que fait M. Russell et il construit ainsi la logique des *relations*, mais il écrit $x R y$ au lieu de $\varphi(x, y)$. Ici aussi nous pouvons imaginer que $\varphi(x, y)$ soit vrai pour tous les choix de x et de y , ou bien pour au moins un couple de valeurs de x et de y , ou bien encore que, quel que soit x , on puisse trouver un y pour lequel la proposition soit vraie.

Il n'y a pas de raison pour ne pas envisager de fonctions propositionnelles de trois variables, et c'est au fond ce que fait M. Russell quand il parle de *classes de relations*, car alors R varie, et $x R y$ est une fonction propositionnelle qui dépend de trois variables, x , y et R .

XI

On voit combien la nouvelle logique est plus riche que la logique classique ; les symboles se sont multipliés et permettent des combinaisons variées *qui ne sont plus en nombre limité*. A-t-on le droit de donner cette extension au sens du mot *logique* ? Il serait oiseux d'examiner cette question, et de chercher à M. Russell une simple querelle de mots. Accordons-lui ce qu'il demande ; mais ne nous étonnons pas si certaines vérités, que l'on avait déclarées irréductibles à la logique, au sens ancien du mot, se trouvent être devenues réductibles à la logique, au sens nouveau, qui est tout différent.

Nous avons introduit un grand nombre de notions nouvelles ; et ce n'étaient pas de simples combinaisons des anciennes ; M. Russell ne s'y est d'ailleurs pas trompé, et non seulement au début du premier chapitre, c'est-à-dire de la logique des propositions, mais au début du second et du troisième, c'est-à-dire de la logique des classes et des relations, il introduit des mots nouveaux qu'il déclare indéfinissables.

Et ce n'est pas tout, il introduit également des principes qu'il déclare indémontrables. Mais ces principes indémontrables, ce sont des appels à l'intuition, des jugements synthétiques *a priori*. Nous les regardions comme intuitifs quand nous les rencontrions, plus ou moins explicitement énoncés, dans les traités de mathématiques ; ont-ils changé de caractère parce que le sens du mot logique s'est élargi et que nous les trouvons maintenant dans un livre intitulé *Traité de logique* ? *Ils n'ont pas changé de nature ; ils ont seulement changé de place.*

Ces principes pourraient-ils être considérés comme des définitions déguisées ? pour cela il faudrait que l'on eût le moyen de démontrer qu'ils n'impliquent pas contradiction. Il faudrait établir que, quelque loin qu'on poursuive la série des déductions, on ne sera jamais exposé à se contredire. Sans doute on verrait facilement qu'une opération nouvelle ne peut introduire de contradiction, s'il ne s'en est pas produit aux étapes précédentes. Mais, conclure de là qu'il n'y en aura jamais, ce serait faire de l'induction complète ; et, *le principe d'induction complète, rappelons-le bien, nous ne le connaissons pas encore.*

Nous n'avons donc pas le droit de regarder ces axiomes comme des définitions déguisées et il ne nous reste qu'une ressource, il faut pour chacun d'eux admettre un

nouvel acte d'intuition. C'est bien d'ailleurs, à ce que je crois, la pensée de M. Russell et de M. Couturat.

« On définit d'une manière analogue, dit par exemple M. Couturat, la somme et le produit logiques, non plus de deux relations, mais des relations de toute une classe : ces nouvelles définitions sont nécessaires, parce que les précédentes ne pourraient s'étendre (par induction complète) qu'à une classe finie de relations, tandis que les nouvelles valent pour une classe quelconque, infinie aussi bien que finie.

« On est obligé de postuler, par des axiomes spéciaux, l'existence de la somme et du produit logiques ainsi définis pour toute une classe de relations. »

Ainsi, chacune des neuf notions indéfinissables et des vingt propositions indémonstrables (je crois bien que si c'était moi qui avais compté, j'en aurais trouvé quelques-unes de plus) qui font le fondement de la logique nouvelle, de la logique au sens large, suppose un acte nouveau et indépendant de notre intuition et, pourquoi ne pas le dire, un véritable jugement synthétique *a priori*. Sur ce point tout le monde semble d'accord, mais ce que M. Russell prétend, et *ce qui me paraît douteux, c'est qu'après ces appels à l'intuition, ce sera fini ; on n'aura plus à en faire d'autres et on pourra constituer la mathématique tout entière sans faire intervenir aucun élément nouveau.*

XII

M. Couturat répète souvent que cette logique nouvelle est tout à fait indépendante de l'idée de nombre. Je ne m'amuserai pas à compter combien son exposé contient d'adjectifs numériques, tant cardinaux qu'ordinaux, ou d'adjectifs indéfinis, tels que plusieurs. Citons cependant quelques exemples :

« Le produit logique de *deux* ou *plusieurs* propositions est » ;

« Toutes les propositions sont susceptibles de *deux* valeurs seulement, le vrai et le faux » ;

« Le produit relatif de *deux* relations est une relation » ;

« Une relation a lieu entre *deux* termes, » etc., etc.

Quelquefois cet inconvénient ne serait pas impossible à éviter, mais quelquefois aussi il est essentiel. Une relation est incompréhensible sans deux termes ; il est impossible d'avoir l'intuition de la relation, sans avoir en même temps celle de ses deux termes, et sans remarquer qu'ils sont deux, car pour que la relation soit concevable, il faut qu'ils soient deux et deux seulement.

XIII. Le nombre cardinal.

Entrons maintenant dans le domaine de l'arithmétique ; nous rencontrons d'abord ce que M. Couturat appelle la définition cardinale du nombre. Elle repose sur l'idée de *correspondance*. Deux classes ont même nombre cardinal quand on peut établir entre leurs éléments une correspondance bi-uniforme. Je n'examinerai pas si l'idée de correspondance constitue une notion nouvelle ; M. P. Boutroux a étudié la question au congrès de Genève (cf. également *Revue de Métaphysique*, juillet 1905), et la discussion à laquelle sa communication a donné lieu prouve au moins que la chose n'est pas aussi claire que le croient les logiciens.

Viennent ensuite les définitions de l'addition et de la multiplication. Si deux classes n'ont, aucun élément commun, la somme des nombres cardinaux de ces deux classes sera le nombre cardinal de leur somme logique. Soient maintenant (x) et (y) deux fonctions propositionnelles définissant deux classes ; alors le produit logique de ces deux propositions $[(x) \text{ et } (y)]$ pourra être regardé comme une fonction propositionnelle où la variable est représentée par le couple x, y ; cette fonction propositionnelle définit alors une classe ; et, *si les deux variables sont indépendantes*, le nombre cardinal de cette classe est le produit des nombres cardinaux des deux classes (x) et (y) .

Je n'examinerai pas ici la question de savoir si la notion de l'indépendance des deux variables, est susceptible de définition. Nous pouvons l'admettre.

L'addition et la multiplication arithmétiques se déduisent ainsi de l'addition et de la multiplication logiques, et si les opérations, symbolisées par les signes $+$ et \times , satisfont aux lois commutative, associative et distributive, c'est tout simplement parce qu'il en est ainsi de l'addition et de la multiplication logiques, caractérisées par les signes *ou* et *et* .

XIV

Ces définitions et ces démonstrations présentent un avantage important, elles s'appliquent aux nombres cardinaux infinis aussi bien qu'aux nombres cardinaux finis. Ce sont d'ailleurs les démonstrations mêmes de Cantor. Ce sont également, à y regarder de près, celles qu'on trouve dans les traités élémentaires d'arithmétique. Et cependant, quand j'ai étudié autrefois cette question dans mon article *Sur la Nature du Raisonnement* mathématique, j'avais cru devoir les rejeter ou tout au moins les laisser de côté.

Pourquoi cela ? parce qu'elles me semblaient exiger un appel trop direct et trop évident à l'intuition. Aujourd'hui elles nous reviennent et elles sont envisagées

comme le type de la démonstration purement logique ; qu'y a-t-il donc de changé en elles ?

Pourquoi ce jugement synthétique qui nous semblait nécessaire a-t-il cessé de l'être? Tout simplement, *parce qu'on l'a déjà fait une fois*, dans le chapitre intitulé Logique, et qu'il est inutile de le recommencer.

Et c'est bien le même : qu'est-ce qui distingue en effet l'intuition de l'addition logique de celle de l'addition arithmétique ? Dans cette dernière les éléments à additionner sont considérés simplement comme des individus, dépouillés par abstraction de toutes leurs différences qualitatives. Dans l'addition logique on se dispense de cette abstraction ; l'acte d'intuition est donc plus complexe, mais à part cela, c'est bien le même.

Je sais bien qu'on m'objectera que M. Russell, à l'inverse de ce qu'on fait d'ordinaire, se place d'abord au point de vue de la compréhension, et ensuite seulement au point de vue de l'extension. Et c'est là assurément une innovation très importante. Mais pour passer d'un point de vue à l'autre, un acte d'intuition est encore nécessaire.

XV

Jusqu'ici les logisticiens ont réussi à éviter sinon tout appel à l'intuition (ils les ont au contraire multipliés), du moins tout recours au principe de l'induction complète. Mais la question est de savoir s'ils pourront aller plus loin ; ils croient que oui, je crois que non, et c'est là le point qui nous divise. *C'est donc ici seulement que le vrai débat commence.*

Il est certain que si l'on ne pouvait aller plus loin, les mathématiques seraient bien réduites. Quelques identités algébriques et, en dehors de cela, aucun théorème général, et ce serait tout. Ce serait à grand'peine qu'on pourrait montrer par un exemple que tous les nombres ne sont pas égaux entre eux. Mais ni théorie des nombres, ni analyse, ni géométrie. A ce compte les traités de mathématiques seraient beaucoup moins gros et on pourrait réduire considérablement les programmes de l'enseignement secondaire.

XVI. L'arithmétique.

J'arrive à ce que M. Couturat appelle la théorie ordinale et qui est le fondement de l'arithmétique proprement dite. M. Couturat commence par énoncer les cinq axiomes de Peano, qui sont indépendants, comme l'ont démontré MM. Peano et Padoa.

1. Zéro est un nombre entier.
2. Zéro n'est le suivant d'aucun nombre entier.
3. Le suivant d'un entier est un entier auquel il conviendrait d'ajouter tout entier a un suivant.
4. Deux nombres entiers sont égaux, si leurs suivants le sont.
5. Si s est une classe telle qu'elle contient 0, et que, si elle contient l'entier x , elle contient le suivant de x , alors elle contient tous les nombres entiers.

Ce 5^e axiome est le principe d'induction complète.

M. Couturat considère ces axiomes comme des définitions déguisées ; ils constituent la définition par postulats de zéro, du « suivant », et du nombre entier.

Mais nous avons vu que pour qu'une définition par postulats puisse être acceptée, il faut que l'on puisse établir qu'elle n'implique pas contradiction.

Est-ce le cas ici ? Pas le moins du monde.

La démonstration ne peut se faire *par l'exemple*. On ne peut choisir une partie des nombres entiers, par exemple les trois premiers, et démontrer qu'ils satisfont à la définition.

Si je prends la série 0, 1, 2, je vois bien qu'elle satisfait aux axiomes 1, 2, 4 et 5 ; mais, pour qu'elle satisfasse à l'axiome 3, il faut encore que 3 soit un entier, et par conséquent que la série 0, 1, 2, 3 satisfasse aux axiomes ; on vérifierait qu'elle satisfait aux axiomes 1, 2, 4, 5, mais l'axiome 3 exige en outre que soit un entier et que la série 0, 1, 2, 3, 4 satisfasse aux axiomes, et ainsi de suite.

Il est donc impossible de démontrer les axiomes pour quelques nombres entiers sans les démontrer pour tous, il faut renoncer à la démonstration par l'exemple.

Il faut alors prendre toutes les conséquences de nos axiomes et voir si elles ne contiennent pas de contradiction. Si ces conséquences étaient en nombre fini, cela serait facile ; mais elles sont en nombre infini, c'est toutes les mathématiques, ou au moins toute l'arithmétique.

Alors que faire ? Peut-être à la rigueur pourrait-on trouver un moyen de montrer qu'un raisonnement nouveau ne pourra pas introduire de contradiction, pourvu que l'on suppose que, dans la suite des raisonnements antérieurs, nous n'en ayons pas rencontré jusqu'ici.

S'il en était ainsi, nous serions certains que nous n'aurions jamais à craindre de contradiction.

Mais *cela c'est faire de l'induction complète*, et c'est précisément le principe d'induction complète qu'il s'agirait de justifier.

Et qu'on n'aille pas dire : il s'agit de vérifier que le principe d'induction complète n'entraîne pas de conséquences contradictoires ; je dois donc étudier les

conséquences de ce principe et par conséquent j'ai le droit de lui faire jouer un rôle dans mes raisonnements.

Cela serait un paralogisme et pour deux raisons :

1° Si je m'appuie sur le principe lui-même pour montrer qu'il n'implique pas contradiction, je démontre seulement que s'il est vrai, il n'est pas contradictoire ; et cela ne nous apprend rien. Il ne suffit pas de comparer *certaines* conséquences du principe, il faudrait les comparer *toutes*.

2° Le principe n'aurait pas le même sens dans l'énoncé, et dans l'application que nous en ferions. Dans l'énoncé, il signifie : il y a des nombres qui satisfont au principe, et ces nombres, par définition, je les appelle entiers. Et dans l'application qu'est-ce que je fais ? Je dis que quel que soit le nombre de mes raisonnements successifs, je ne serai pas conduit à des conclusions contradictoires parce que ce nombre étant entier, satisfait au principe. Mais comment saurais-je que le nombre de mes raisonnements est un nombre entier ? Si je donne à ce mot le sens vulgaire, cela ne sera pas difficile ; mais si je le définis comme je viens de le faire, comment saurais-je que le nombre de mes raisonnements est un de ceux qui satisfont au principe ?

XVII

J'examinerai plus loin les tentatives que fait Hilbert pour sortir de ces difficultés ; mais j'aurais voulu d'abord réfuter la démonstration de M. Russell et Couturat. Ce qui m'en empêche c'est que cette démonstration n'existe pas.

« Cette définition, dit simplement M. Couturat, n'assure ni l'existence, ni l'unicité de l'objet défini. C'est surtout l'unicité qui ne paraît pas évidente. » Suivent de longues considérations sur l'unicité et de l'existence il n'est pas question.

Et alors un problème psychologique se pose : comment deux logiciens aussi avisés ne se sont-ils pas aperçus de cette lacune ?

C'est d'abord que M. Couturat a suivi M. Russell pas à pas ; mais il reste à expliquer ce qui est arrivé à M. Russell. Peut-être trouverons-nous cette explication dans un autre de ses écrits. « The principle of mathematical induction, dit-il quelque part (*Mind*, juillet 1905), says not merely that the addition of 1 will always give a number, but that every natural number can be obtained by such additions starting from 0. » Mais ce n'est pas cela du tout, le principe d'induction ne signifie pas que tout nombre entier peut être obtenu par additions successives ; il signifie que pour tous les nombres que l'on peut obtenir par additions successives, on peut démontrer une propriété quelconque par voie de récurrence.

Un nombre peut être défini par récurrence ; sur ce nombre on peut raisonner par récurrence ; ce sont deux propositions distinctes. Le principe d'induction ne

nous apprend pas que la première est vraie, il nous apprend que la première implique la seconde.

Voilà la confusion qu'a faite M. Russell, et voilà qui explique comment il a pu sans s'en apercevoir avancer une définition qu'il était incapable de justifier en démontrant qu'elle était exempte de contradiction.

H. POINCARÉ.

Deuxième article

XVIII. La logique de Hilbert.

J'arrive maintenant au travail capital de M. Hilbert qu'il a communiqué au Congrès des Mathématiciens à Heidelberg, et dont une traduction française due à M. Pierre Boutroux a paru dans *l'Enseignement Mathématique*, pendant qu'une traduction anglaise due à M. Halsted paraissait dans *The Monist*. Dans ce travail, où l'on trouvera les pensées les plus profondes, l'auteur poursuit un but analogue à celui de M. Russell, mais sur bien des points il s'écarte de son devancier.

« Cependant, dit-il, si nous y regardons de près, nous constatons que dans les principes logiques, tels qu'on a coutume de les présenter, se trouvent impliquées déjà certaines notions arithmétiques, par exemple la notion d'Ensemble, et dans une certaine mesure, la notion de Nombre. Ainsi nous nous trouvons pris dans un cercle et c'est pourquoi, afin d'éviter tout paradoxe, il me paraît nécessaire de développer simultanément les principes de la Logique et ceux de l'Arithmétique. »

Nous avons vu plus haut, que ce que dit M. Hilbert des principes de la Logique *tels qu'on a coutume de les présenter*, s'applique également à la logique de M. Russell. Ainsi, pour M. Russell, la logique est antérieure à l'Arithmétique ; pour M. Hilbert, elles sont « simultanées ». Il convient d'observer que c'est en partie parce que M. Hilbert considère comme arithmétique la notion d'ensemble que M. Russell appelle la notion de classe et qu'il regarde comme logique. Nous trouverons plus loin d'autres différences plus profondes encore. Mais nous les signalerons à mesure qu'elles se présenteront ; je préfère suivre pas à pas le développement de la pensée de Hilbert, en citant textuellement les passages les plus importants.

« Prenons tout d'abord en considération l'objet 1. » Remarquons qu'en agissant ainsi nous n'impliquons nullement la notion de nombre, car il est bien entendu que 1 n'est ici qu'un symbole et que nous ne nous préoccupons nullement d'en connaître la signification. « Les groupes formés avec cet objet, deux, trois ou plusieurs fois répété... » Ah, cette fois-ci, il n'en est plus de même, si nous introduisons les mots deux, trois et surtout plusieurs, nous introduisons la notion de nombre ; et alors la définition du nombre entier fini que nous trouverons tout à l'heure, arrivera bien tard. L'auteur était beaucoup trop avisé pour ne pas s'apercevoir de cette pétition de principe. Aussi, à la fin de son travail, cherche-t-il à procéder à un *replâtrage*, dont nous aurons à examiner la valeur.

Hilbert introduit ensuite deux objets simples 1 et = et envisage toutes les combinaisons de ces deux objets, toutes les combinaisons de leurs combinaisons,

etc. Il va sans dire qu'il faut oublier la signification habituelle de ces deux signes et ne leur en attribuer aucune. Il répartit ensuite ces combinaisons en deux classes, celle des êtres et celle des non-êtres et jusqu'à nouvel ordre cette répartition est entièrement arbitraire ; toute proposition affirmative nous apprend qu'une combinaison appartient à la classe des êtres ; toute proposition négative nous apprend qu'une certaine combinaison appartient à celle des non-êtres.

Nous voyons ensuite s'introduire, comme chez M. Russell, les conjonctions *si*, *et*, *ou*, c'est-à-dire l'addition et la multiplication logique. Nous retrouvons également la fonction propositionnelle ; mais ici une différence importante est à signaler. Pour Russell la variable x est absolument indéterminée, pour Hilbert c'est l'une des combinaisons formées avec 1 et =.

XIX

Cette différence est de la plus haute importance. Hilbert formule d'ailleurs sa pensée de la façon la plus nette ; et je crois devoir reproduire *in extenso* son énoncé. « Les indéterminées qui figurent dans les axiomes (en place du quelconque ou du tous de la logique ordinaire) représentent exclusivement l'ensemble des objets et des combinaisons qui nous sont déjà acquis en l'état actuel de la théorie, ou que nous sommes en train d'introduire. Lors donc qu'on déduira des propositions des axiomes considérés, ce sont ces objets et ces combinaisons seules que l'on sera en droit de substituer aux indéterminées. Il ne faudra pas non plus oublier que, lorsque nous augmentons le nombre des objets fondamentaux, les axiomes acquièrent du même coup une extension nouvelle et doivent, par suite, être de nouveau mis à l'épreuve et au besoin modifiés. »

Le contraste est complet avec la manière de voir de M. Russell. Pour ce dernier philosophe, nous pouvons substituer à la place de x non seulement des objets déjà connus, mais n'importe quoi. Russell est fidèle à son point de vue, qui est celui de la compréhension. Il part de l'idée générale d'être et l'enrichit de plus en plus tout en la restreignant, en y ajoutant des qualités nouvelles. Hilbert ne reconnaît au contraire comme êtres possibles que des combinaisons d'objets déjà connus ; de sorte que (en ne regardant qu'un des côtés de sa pensée) on pourrait dire qu'il se place au point de vue de l'extension.

Pourquoi maintenant Hilbert est-il amené à se mettre ainsi en opposition avec Russell ? Pour le comprendre, il faut rappeler ce qu'il a dit au début, en le soulignant.

« Frege se trouve désarmé devant les paradoxes de la théorie des Ensembles, paradoxes dont la considération de l'Ensemble de tous les Ensembles nous fournit un exemple et qui établissent, selon moi, que les notions et les méthodes de la

logique usuelle n'ont pas encore la précision et la rigueur réclamées par la théorie des Ensembles. Or, ce devrait être, au contraire, l'un des objets principaux poursuivis de prime abord, par celui qui étudie le concept de nombre, que d'échapper à ces contradictions et d'éclaircir ces paradoxes. ».

Et à la fin « Les principes II (celui que nous avons énoncé un peu plus haut) et III permettent d'échapper aux Paradoxes mentionnés au début de cet article... »

Ainsi, aux yeux de Hilbert, se placer, comme le fait M. Russell, au point de vue de la compréhension d'une façon intransigeante, c'est manquer de précision et de rigueur, c'est s'exposer à la contradiction.

Qui a raison ? Je ne veux pas l'examiner ici ; la discussion approfondie de cette question, si intéressante qu'elle soit, nous entraînerait beaucoup trop loin. Ce qui nous inclinerait pourtant à donner raison à M. Hilbert, c'est l'exemple de M. Burali-Forti, dont nous avons parlé plus haut à propos de la Pasigraphie.

M. Burali-Forti a précisément raisonné, sans se conformer au principe II de Hilbert, et il semble qu'il s'est trompé ; heureuse erreur d'ailleurs, et particulièrement instructive.

En tout cas, entre Hilbert et Russell, la logique est hors d'état de décider.

XX

Poursuivons l'exposé des idées de Hilbert. Il introduit les deux axiomes suivants :

$$(1) x=x$$

$$(2) \text{ Si } x=y \text{ et } (x), w(y)$$

Il les considère comme représentant la définition par postulats du symbole = jusqu'ici vierge de toute signification. Mais pour justifier cette définition, il faut montrer que ces deux axiomes ne conduisent à aucune contradiction.

Et, en effet, dit M. Hilbert, toutes les propositions qu'on en peut déduire sont de la forme = (ce sont ce que dans le langage vulgaire on appellerait des identités), ces propositions ne peuvent donc être contradictoires.

Mais comment verra-t-on que toutes ces propositions sont des identités ? Considérons une série de conséquences déduites de nos axiomes, et arrêtons-nous à un certain stade dans cette série ; si à ce stade, nous n'avons encore obtenu que des identités, nous pourrions vérifier qu'en appliquant à ces identités l'une quelconque des opérations permises par la logique, on n'en pourra déduire que de nouvelles identités.

On en conclura qu'à aucun moment on ne pourra obtenir autre chose que des identités ; *mais raisonner ainsi, c'est faire de l'induction complète.*

XXI

M. Hilbert introduit ensuite trois symboles nouveaux $u, f,$ et f' qu'il définit par trois axiomes

$$\begin{aligned}(3) f(ux) &= u(f'x) \\ (4) f(ux) &= f(uy) \mid ux = uy \\ (5) \overline{f(ux)=u1}\end{aligned}$$

Ces axiomes ne sont autre chose que les axiomes 3, 4 et 2 de Peano (voir ci-dessus, n° XVI). L'auteur fait bien de nous en avertir, car cela aurait pu échapper à quelques lecteurs. Ainsi l'axiome 5 est laissé de côté ; l'axiome 1 manquerait également, mais il doit être regardé comme sous-entendu, ou comme impliqué par la dernière de nos équations.

Quoi qu'il en soit, il faut justifier cette définition en montrant que ces équations ne peuvent conduire à une contradiction. Et pour cela, M. Hilbert entreprend de démontrer que les deux premières équations ne peuvent conduire qu'à des *propositions homogènes*, c'est-à-dire à des égalités dont les deux membres contiennent un même nombre de lettres ; et en effet, dit-il, la première équation, quand on y remplace x par un objet quelconque, ne donne que des égalités homogènes ; et il en est encore ainsi de la seconde, *à condition que la prémisse soit elle-même une égalité homogène.*

C'est encore là de l'induction complète ; le membre de phrase que je viens de souligner le montre suffisamment. Ainsi encore ici *M. Hilbert est obligé d'avoir recours au principe d'induction complète.*

XXII

Vient ensuite une phrase tout à fait énigmatique :

« Nous pouvons maintenant poursuivre notre synthèse. Expriment toujours dans le même langage les axiomes bien connus relatifs à l'induction complète, nous constatons que ces axiomes peuvent être sans contradiction adjoints aux précédents. » Comment le constate-t-on ? Cela reste mystérieux ; il y a bien un renvoi à une communication faite au Congrès de Paris, mais si l'on se reporte à cette communication, on n'y voit pas que le problème soit résolu, mais simple ment qu'il serait fort désirable qu'il le fût.

D'ailleurs, quand même M. Hilbert serait parvenu à justifier le principe d'induction complète, *cette justification serait bien tardive, puisque l'on a déjà appliqué ce principe deux fois.*

La lecture des lignes suivantes ne fait qu'augmenter notre perplexité.

« Il n'y a aucune difficulté à fonder le concept de nombre ordinal fini... » ; puis vient l'énoncé d'un axiome analogue à l'axiome 5 de Peano, et on montre par un « exemple » qu'il n'implique pas contradiction.

Est-ce là le début de la démonstration annoncée, on pourrait le croire ; l'auteur, pense-t-on, ayant défini le nombre ordinal fini, et montré que sa définition est exempte de contradiction, va démontrer que tout nombre ordinal fini a un suivant qui est aussi un nombre ordinal fini, et il s'élèvera ainsi jusqu'à la notion du type ordinal de l'ensemble des nombres entiers, c'est-à-dire du *plus petit infini*.

Mais pas du tout ; au contraire, M. Hilbert ajoute : « Après quoi nous pourrions prouver, *en nous appuyant sur l'existence du plus petit infini*, qu'étant donné un nombre ordinal fini quelconque, il existe un nombre ordinal qui lui est supérieur ».

Ainsi donc la notion du plus petit infini n'est pas déduite de celle du nombre ordinal fini, elle lui est au contraire antérieure ; et nous devons considérer cette phrase. « Nous constatons que ces axiomes (ceux de l'induction complète) peuvent être adjoints aux autres sans contradiction, ce qui établit l'existence du plus petit infini », nous devons, dis-je, considérer cette phrase et surtout ces deux mots : nous constatons, comme constituant toute la démonstration.

Eh bien, non, ce n'est pas encore cela ; car, à un stade antérieur de son raisonnement, M. Hilbert dit : « Pour donner une démonstration complète, il faudrait faire appel au concept de nombre ordinal fini... » Est-ce alors que ce dernier concept est antérieur à l'autre ? On ne sait à quoi s'arrêter.

Qu'est-ce à dire ? *Au moment de démontrer que la définition du nombre entier par l'axiome d'induction complète n'implique pas contradiction, M. Hilbert se dérobe, comme se sont dérobés MM. Russell et Couturat, parce que la difficulté est trop grande.*

XXIII

Mais admettons même que le principe ait été justifié, s'ensuivrait-il qu'on aurait le droit d'en faire l'usage qu'on en fait ? Comme l'expose M. Hilbert, le processus est toujours le même ; pour introduire une proposition nouvelle, on cherche à montrer que cette introduction ne conduit pas à une contradiction. Dès que l'on a fait cette preuve, le nouvel axiome est regardé comme légitime.

Mais comment faire-cette preuve ? Il faut, d'après Hilbert, ou bien montrer que, s'il y avait contradiction à un moment donné, cette contradiction devrait déjà s'être manifestée à un stade antérieur de la théorie (cela, c'est l'application directe du principe d'induction) ; ou bien on procédera par l'absurde (ce qui entraînera en général une application indirecte de ce même principe).

Ainsi on envisage une série de raisonnements se succédant les uns aux autres et on applique à cette succession, regardée comme un type ordinal, un principe qui est vrai pour certains types ordinaux, appelés nombres ordinaux finis, et qui est vrai pour ces types, précisément parce que ces types sont par définition ceux pour lesquels il est vrai.

Mais qu'est-ce qui me prouve que le type ordinal, qui correspond à la succession de nos raisonnements, est précisément l'un des « nombres ordinaux finis » ainsi définis ? Est-ce que nous avons démontré que ce type répond à cette définition ? Non ; et, si nous l'avions fait, le principe d'induction ne serait plus un postulat servant de définition, ce serait un théorème comme les autres, susceptible de démonstration et tout ce détour deviendrait inutile.

Est-ce que cette succession n'a d'existence que par une convention arbitraire, auquel cas nous serions libres de choisir telle définition que nous voudrions ? En d'autres termes, est-ce que nous avons besoin, pour concevoir cette succession, de la définition du « nombre ordinal fini » ou du « plus petit infini » ?

Pas du tout, et la preuve c'est que M. Hilbert a déjà appliqué deux fois le principe d'induction longtemps avant d'avoir parlé ni du « nombre ordinal fini », ni du « plus petit infini ».

Il avait donc, dès ce moment, l'intuition directe de cette succession de raisonnements et du type ordinal correspondant ; tandis que ce qu'il définit ensuite n'est qu'une combinaison de symboles vides, dont nous savons seulement qu'ils doivent satisfaire à certaines conditions. De quel droit appliquerions-nous à cela ce qui est démontré pour ceci ?

Ainsi quand même on serait arrivé à justifier le principe d'induction, l'application qu'on en ferait demeurerait illégitime, parce que le principe qu'on appliquerait serait autre chose que celui qu'on aurait justifié. Les mêmes mots y auraient un autre sens.

M. Hilbert, pas plus que ses devanciers du reste, n'a pas mieux satisfait à la seconde condition, celle du n° IV, qu'à la première, celle du n° V.

XXIV

J'arrive ensuite, en suivant M. Hilbert, à un point qui est un peu en dehors de mon sujet, mais dont je dirai quelques mots à cause de son importance. Il s'agit de la façon dont Hilbert conçoit la relation d'ensemble à élément ; contrairement à l'usage établi, dit-il, nous regardons la notion d'élément comme postérieure à la notion d'ensemble.

Il semble donc que M. Hilbert considère le genre comme antérieur et non comme postérieur à l'espèce, et que par conséquent il se place, comme M. Russell,

au point de vue de la compréhension et non pas au point de vue de l'extension. Mais cette manière de voir ne serait qu'à demi exacte.

M. Hilbert pour définir un ensemble introduit, suivant sa méthode constante, un symbole nouveau m , qui est d'abord vide de sens. Ensuite étant donné un objet quelconque x , il forme la combinaison mx qui est destinée à caractériser la relation de l'objet x avec l'ensemble m . Il pose alors à titre d'axiome constituant une définition par postulats.

$$mx = x$$

toutes les fois que le vulgaire dirait que l'objet x appartient à l'ensemble m , et

$$mx = a$$

dans le cas contraire, a étant un objet choisi une fois pour toutes d'une façon quelconque parmi ceux qui appartiennent à l'ensemble m .

Ainsi l'ensemble m n'est ni antérieur, ni postérieur aux objets x qui peuvent en être les éléments ; ils sont *simultanés* puisque d'abord cet élément et ces objets ne sont que des symboles vides de sens et indépendants les uns des autres ; leur dépendance mutuelle ne date que du moment où on pose les axiomes, elle est postérieure.

Ainsi l'ensemble n'est pas antérieur à ses éléments, il est antérieur seulement à mx , c'est-à-dire à sa relation avec ces éléments.

Ce n'est donc pas tout à fait le point de vue de M. Russell, et le contraste est d'autant plus frappant que, pour le philosophe anglais, les objets sont susceptibles d'être classés, justement parce qu'ils sont doués de qualités, tandis que, pour le savant allemand, ce ne sont que des combinaisons de symboles que l'on enrégimente arbitrairement.

Nous retrouvons toutefois dans Hilbert un souvenir de la logique de Russell ; il introduit en effet une fonction propositionnelle $a(x)$, qui intervient dans la définition de l'ensemble m , de telle façon que m soit l'ensemble des objets x pour lesquels la proposition $a(x)$ est vraie. Mais nous devons nous rappeler que les propositions de Hilbert ne sont jamais que des combinaisons de symboles.

XXV

Je terminerai l'exposé de ce remarquable mémoire, si plein de vues originales et intéressantes, en disant quelques mots de ce que j'ai appelé plus haut la *tentative de replâtrage*. Ce n'est pas à un homme comme M. Hilbert que les difficultés signalées plus haut pouvaient échapper ; à la fin de son article, il est donc pris de scrupules et il cherche à se tirer d'affaire par quelques lignes que je crois devoir citer in extenso :

« Lorsque dans les pages précédentes il était question de *plusieurs* objets ou combinaisons, de *plusieurs* indéterminées, de combinaisons *multiples*, ces mots s'appliquaient toujours à un nombre limité de choses. Après avoir défini le « nombre fini » nous sommes en état de leur donner le sens général qu'ils comportent. De même, en nous appuyant sur la définition du nombre fini, nous pourrons, conformément au principe de l'Induction complète, définir explicitement à l'aide d'une méthode récurrente ce qu'il faut entendre par « Proposition déduite *quelconque* » ou par « Proposition *différent* de toutes les propositions d'une certaine espèce ». En particulier nous pourrons compléter la démonstration donnée plus haut, laquelle tendait à prouver que la proposition

$$(6) f(ux^0) = u1$$

diffère de toute proposition qui se laisserait déduire des axiomes (1), (2), (3), (4) (cf. n^{os} XX et XXI) à l'aide d'un nombre fini d'opérations. A cet effet, nous regarderons la démonstration elle-même comme une notion mathématique : c'est un ensemble fini dont les éléments sont reliés par des propositions lesquelles affirment que ladite démonstration permet de conclure des axiomes (1), (2), (3), (4) à la proposition (6), Tout revient alors à montrer qu'une semblable démonstration implique contradiction et ne saurait par suite, selon nos conventions, être considérée comme existante. »

Tout cela est bien peu satisfaisant. Ainsi le mot *plusieurs*, au début du travail, n'avait pas le sens général qu'il comporte, il ne signifiait pas un « nombre fini » *aussi grand que l'on veut*, mais un « nombre limité », par exemple 4 ou 5. Mais alors que signifiaient les démonstrations. Elles pouvaient nous montrer qu'après 4 ou 5 syllogismes, les axiomes ne conduisaient pas à une contradiction. Mais ce n'était pas de cela qu'il s'agissait.

Il fallait montrer qu'on n'en rencontrerait pas davantage, *quelque loin* que l'on poursuive la chaîne des raisonnements ; c'est à ce prix seulement qu'il était permis d'affirmer que les axiomes ne sont pas contradictoires.

Et ce n'est pas tout, la démonstration fondamentale avait besoin d'être « complétée » et pour la compléter il fallait « s'appuyer sur la définition du nombre fini ». Or cette définition elle-même reposait sur celle du plus petit infini, et celle-ci à son tour sur la démonstration en litige. Mais cela s'appelle un cercle vicieux.

Et comment raccorder tout cela. C'est en regardant « la démonstration elle-même comme une notion mathématique », c'est-à-dire dans le langage de Hilbert comme un symbole qui n'est défini que par un certain nombre de relations avec d'autres symboles. Le mot démonstration perd son sens et n'est plus défini que par des postulats. Mais on n'échappe pas au dilemme :

Ou bien, vous saviez d'avance ce que c'est qu'une démonstration, et comment une démonstration peut conduire à des contradictions, et alors vous n'aviez pas besoin de cette définition par postulats. Rien ne vous garantit d'ailleurs que cette

démonstration, dont vous saviez d'avance ce que c'était, est bien la même chose que ce symbole vide, que vous convenez d'appeler démonstration, mais qui, par définition, n'est autre chose que ce qui satisfait à une certaine formule ;

Ou bien vous ne le saviez pas d'avance, et alors la question que vous vous posiez au début : « Une démonstration fondée sur ces axiomes peut-elle me conduire à des contradictions ? » était absolument dépourvue de sens. Et alors pourquoi vous la posiez-vous ? Il vous sera difficile de l'expliquer.

Quand vous disiez très justement : « pour qu'une définition conventionnelle soit acceptable, il faut qu'elle n'implique pas contradiction », le sens de cette règle elle-même n'était nullement conventionnel.

XXVI. Le nombre infini.

Le principe d'induction, dit M. Couturat, caractérise les nombres finis ; de sorte que tous les raisonnements fondés sur ce principe ne valent que pour les nombres finis. D'où il conclut que ce principe, bon tout au plus pour les arithméticiens qui ne s'élèvent pas jusqu'à l'idée d'infini, ne peut être d'aucun usage dans la théorie du nombre infini. « La théorie des nombres cardinaux peut donc être constituée tout entière d'une manière directe et indépendante, sur des bases purement logiques, sans faire appel à l'idée d'ordre, sans même invoquer la distinction des nombres finis et infinis, ni par suite le principe d'induction. » Cela, c'est ce que nous allons voir.

Quel est le théorème fondamental de la théorie des nombres cardinaux infinis ? C'est le théorème de Bernstein dont je rappelle l'énoncé.

Considérons deux ensembles A et B ; si l'on peut faire correspondre les éléments de ces deux ensembles de telle façon que, à tout élément de l'un corresponde un élément et un seul de l'autre, on dit que ces deux ensembles ont même *nombre cardinal* et on écrit :

$$A \equiv B$$

C'est la définition du nombre cardinal. On dira d'autre part qu'un ensemble A', est une partie de l'ensemble A, si A contient tous les éléments de A' et que A' ne contiennent pas tous ceux de A.

Alors le théorème de Bernstein nous apprend que si l'on a :

$$A_0 \equiv B_1 \text{ et } A_1 \equiv B_0$$

A₁ étant une partie de A₀, et B₁ une partie de B₀, on aura également

$$A_0 \equiv B_0$$

Voyons la démonstration. La relation $A_0 \equiv B_1$ nous apprend qu'à tout élément de A₀ correspond un élément de B₁, et comme A₁ est une partie de B₀, aux divers

éléments de A_1 correspondront des éléments de B_1 dont l'ensemble B_2 sera une partie de B_1 et on aura $A_1 \equiv B_2$, et $A_0 - A_1 \equiv B_1 - B_2$.

On définira de même un ensemble A_2 qui sera une partie de A_1 , et qui sera tel que l'on ait $B_1 \equiv A_2$ et $A_0 - A_1 \equiv B_1 - B_2$.

Maintenant comme on a $A_1 \equiv B_2$ et que A_2 est une partie de A_1 , on trouvera de même un ensemble B_3 qui sera une partie de B_2 et satisfera aux conditions :

$$A_2 \equiv B_3 \quad A_1 - A_2 \equiv B_2 - B_3.$$

On définirait de même A_3 et ainsi de suite, de sorte qu'on aurait une suite d'ensembles $A_0, A_1, \dots, A_n, \dots, B_0, B_1, \dots, B_n$, tels que A_{n+1} soit une partie de A_n et B_{n+1} une partie de B_n et que l'on ait :

$$A_n \equiv B_{n+1} \quad A_{n-1} - A_n \equiv B_n - B_{n+1}.$$

$$B_n \equiv A_{n+1} \quad B_{n-1} - B_n \equiv A_n - A_{n+1}.$$

Soit maintenant C l'ensemble de tous les éléments communs aux divers ensembles $A_0, A_1, \dots, A_n, \dots$; et D l'ensemble de tous les éléments communs aux divers ensemble $B_0, B_1, \dots, B_n, \dots$; on aura :

$$A_0 = \sum (A_n - A_{n+1}) + C, \quad B_0 = \sum (B_n - B_{n+1}) + D$$

Car lorsque, dans une série indéfinie d'ensembles, chacun est une partie du précédent, le premier est formé de tous les éléments qui appartiennent à tous ces ensembles et de tous ceux qui appartiennent à l'un d'eux sans appartenir au suivant.

Ce principe que je viens de souligner est bien évident ; mais il semble qu'il suppose un appel spécial à l'intuition ; je n'insiste pas sur ce point. Montrons maintenant que :

$$C \equiv D$$

En effet à un élément de C , faisant partie de A_0 , correspondra un élément de B_1 , en vertu de la correspondance définie par la relation :

$$A_0 \equiv B_1$$

Comme cet élément fait partie de A_n et que la correspondance définie par $A_0 \equiv B_1$ est la même que celle qui est définie par $A_n \equiv B_{n+1}$, l'élément correspondant fera partie de B_{n+1} ; il fait donc partie de tous les B et par conséquent de D ; inversement à tout élément de D correspondra un élément β de A_0 en vertu de cette même correspondance ; et comme cet élément fait partie de B_{n+1} , l'élément fera partie de A_n et de tous les A_n , et par conséquent de C ; on a donc :

$$C \equiv D$$

et en rapprochant toutes nos équations :

$$A_0 \equiv B_0$$

C. Q. F. D.

J'ai souligné plus haut les mots *et ainsi de suite* afin de mettre en évidence l'application du principe d'induction. Nos ensembles A_n , et B_n sont définis *par récurrence* et on raisonne sur eux *par récurrence*.

Si M. Couturat connaît une autre démonstration du théorème de Bernstein, qu'il se hâte de la publier, cela sera une découverte mathématique importante. Mais s'il n'en connaît pas, qu'il cesse de dire que la théorie des nombres infinis peut se constituer sans le principe d'induction. Qu'il n'écrive pas que MM. Russell et Whitehead ont pu démontrer formellement, en partant de principes purement logiques, toutes les propositions de cette théorie et la purger de tout postulat et de tout appel à l'intuition. S'ils avaient pu en même temps la purger de toute contradiction, ils nous auraient rendu un service signalé ; hélas ! sur cette théorie les mathématiciens discutent encore, sans être près de s'entendre.

XXVII

Ce qui précède doit nous donner à réfléchir. Nous avons à démontrer un théorème dans la démonstration duquel nous faisons intervenir un postulat qui est la définition d'un objet A. Alors de deux choses l'une :

Ou bien le nom de l'objet A figure dans l'énoncé du théorème ; dans ce cas il est clair que la définition de cet objet doit figurer parmi nos prémisses ; sans elle, non seulement il serait impossible de démontrer le théorème, mais il n'aurait aucun sens ;

Ou bien, au contraire, le nom de A ne figure pas dans l'énoncé. On peut alors démontrer le théorème sans faire intervenir le postulat qui définit cet objet ; il suffit, toutes les fois qu'on rencontrera dans la démonstration le nom de A, de le remplacer par sa définition. Ainsi ce nom ne figurera plus nulle part dans la démonstration qui deviendra indépendante de la définition. Cette définition ne sera plus une de nos prémisses.

Or dans le cas du théorème de Bernstein, qu'arrive-t-il ? On s'appuie sur le principe d'induction qui d'après les logisticiens serait la définition du nombre fini. D'autre part, dans l'énoncé du théorème, il n'est pas question de nombres finis, mais seulement de nombres infinis. Nous devrions donc pouvoir démontrer le théorème sans nous appuyer sur le principe.

Or cela est impossible ; c'est donc que ce principe n'est pas la définition de l'entier fini qui figure dans la démonstration, c'est-à-dire de l'indice n de l'ensemble A_n ; et, en effet, si nous recherchons de quelle manière on a été amené à parler de cet indice, nous verrons que ce principe n'y était pour rien.

XXVIII. La géométrie.

La géométrie, dit M. Couturat, est un vaste corps de doctrine où le principe d'induction complète n'intervient pas. Cela est vrai dans une certaine mesure, on ne peut pas dire qu'il n'intervient pas, mais il intervient peu. Si l'on se reporte à la *Rational Geometry* de M. Halsted (New-York, John Wiley and Sons, 1904) établie d'après les principes de M. Hilbert, on voit intervenir le principe d'induction pour la première fois à la page 114 (à moins que j'aie mal cherché, ce qui est bien possible).

Ainsi la géométrie, qui, il y a quelques années à peine, semblait le domaine où le règne de l'intuition était incontesté, est aujourd'hui celui où les logisticiens semblent triompher. Rien ne saurait mieux faire mesurer l'importance des travaux géométriques de M. Hilbert et la profonde empreinte qu'ils ont laissée sur nos conceptions.

Mais il ne faut pas s'y tromper. *Quel est en somme le théorème fondamental de la Géométrie ? C'est que les axiomes de la Géométrie n'impliquent pas contradiction et, cela, on ne peut pas le démontrer sans le principe d'induction.*

Comment Hilbert démontre-t-il ce point essentiel ? C'est en s'appuyant sur l'Analyse et par elle sur l'Arithmétique, et par elle sur le principe d'induction.

Et si jamais on invente une autre démonstration, il faudra encore s'appuyer sur ce principe, puisque les conséquences possibles des axiomes, dont il faut montrer qu'elles ne sont pas contradictoires, sont en nombre infini.

XXIX. Conclusion.

Notre conclusion, c'est d'abord que *le principe d'induction ne peut pas être regardé comme la définition déguisée du nombre entier.*

Voici trois vérités :

Le principe d'induction complète ;

Le postulatum d'Euclide ;

La loi physique d'après laquelle le phosphore fond à 44° (citée par M. Le Roy).

On dit : Ce sont trois définitions déguisées, la première, celle du nombre entier, la seconde, celle de la ligne droite, la troisième, celle du phosphore.

Je l'admets pour la seconde, je ne l'admets pas pour les deux autres, il faut que j'explique la raison de cette apparente inconséquence.

D'abord nous avons vu qu'une définition n'est acceptable que s'il est établi qu'elle n'implique pas contradiction. Nous avons montré également que, pour la

première définition, cette démonstration est impossible ; au contraire, nous venons de rappeler que pour la seconde Hilbert avait donné une démonstration complète.

En ce qui concerne la troisième, il est clair qu'elle n'implique pas contradiction ; mais cela veut-il dire que cette définition garantit, comme il le faudrait, l'existence de l'objet défini ? Nous ne sommes plus ici dans les sciences mathématiques, mais dans les sciences physiques, et le mot existence n'a plus le même sens, il ne signifie plus absence de contradiction, il signifie existence objective.

Et voilà déjà une première raison de la distinction que je fais entre les trois cas ; il y en a une seconde. Dans les applications que nous avons à faire de ces trois notions, se présentent-elles à nous comme définies par ces trois postulats ?

Les applications possibles du principe d'induction sont innombrables ; prenons pour exemple l'une de celles que nous avons exposées plus haut, et où on cherche à établir qu'un ensemble d'axiomes ne peut conduire à une contradiction. Pour cela on considère l'une des séries de syllogismes que l'on peut poursuivre en partant de ces axiomes comme prémisses.

Quand on a fini le n^{e} syllogisme, on voit qu'on peut en faire encore un autre et c'est le $n + 1^{\text{e}}$; ainsi le nombre n sert à compter une série d'opérations successives, c'est un nombre qui peut être obtenu par additions successives. Ainsi donc la façon dont nous avons été amenés à considérer ce nombre n implique une définition du nombre entier et cette définition est la suivante : *un nombre entier est celui qui peut être obtenu par additions successives, c'est celui que l'on peut définir par récurrence.*

Cela posé, qu'est-ce que nous faisons ? Nous montrons que s'il n'y a pas eu de contradiction au n^{e} syllogisme, il n'y en aura pas davantage au $n + 1^{\text{e}}$ et nous concluons qu'il n'y en aura jamais. Vous dites : j'ai le droit de conclure ainsi, parce que les nombres entiers sont par définition ceux pour lesquels un pareil raisonnement est légitime ; mais cela implique une autre définition du nombre entier et qui est la suivante : *un nombre entier est celui sur lequel on peut raisonner par récurrence* ; dans l'espèce c'est celui dont on peut dire que, si l'absence de contradiction au moment d'un syllogisme dont le numéro est un nombre entier entraîne l'absence de contradiction au moment d'un syllogisme dont le numéro est l'entier suivant, on n'aura à craindre aucune contradiction pour aucun des syllogismes dont le numéro est entier.

Les deux définitions ne sont pas identiques ; elles sont équivalentes sans doute, mais elles le sont en vertu d'un jugement synthétique *a priori* ; on ne peut pas passer de l'une à l'autre par des procédés purement logiques. Par conséquent nous n'avons pas le droit d'adopter la seconde, après avoir introduit le nombre entier par un chemin qui suppose la première.

Au contraire qu'arrive-t-il pour la ligne droite ? Je l'ai déjà expliqué si souvent que j'hésite à me répéter une fois de plus : je me borne à résumer brièvement ma pensée.

Nous n'avons pas deux définitions équivalentes sans être, ou identiques, ou réductibles logiquement l'une à l'autre. Tout ce qu'on pourrait dire, c'est que nous avons l'intuition de la ligne droite, sans savoir la définir, c'est-à-dire que nous nous représentons la ligne droite. Tout d'abord nous ne pouvons nous la représenter dans l'espace géométrique, mais seulement dans l'espace représentatif, et puis nous pouvons nous représenter tout aussi bien les objets qui possèdent les autres propriétés de la ligne droite, sauf celle de satisfaire au postulatum d'Euclide. Ces objets sont les « droites non-euclidiennes » qui à un certain point de vue ne sont pas des entités vides de sens, mais des cercles (de vrais cercles du vrai espace) orthogonaux à une certaine sphère. Si parmi ces objets également susceptibles de représentation ce sont les premiers (les droites euclidiennes) que nous appelons droites, et non pas les derniers (les droites non-euclidiennes), c'est bien par définition.

Et si nous arrivons enfin au troisième exemple, à la définition du phosphore, nous voyons que la vraie définition serait : Le phosphore, c'est ce morceau de matière que je vois là dans tel flacon.

XII

Et puisque je suis sur ce sujet, encore un mot. Pour l'exemple du phosphore j'ai dit : « Cette proposition est une véritable loi physique vérifiable, car elle signifie : tous les corps qui possèdent toutes les autres propriétés du phosphore, sauf son point de fusion, fondent comme lui à 44° ». Et on m'a répondu : « Non, cette loi n'est pas vérifiable, car si l'on venait à vérifier que deux corps ressemblant au phosphore fondent l'un à 44° et l'autre à 50° , on pourrait toujours dire qu'il y a sans doute, outre le point de fusion, quelque autre propriété inconnue par laquelle ils diffèrent ».

Ce n'était pas tout à fait cela-que j'avais voulu dire ; j'aurais dû écrire : Tous les corps qui possèdent telles et telles propriétés en nombre fini (à savoir les propriétés du phosphore qui sont énoncées dans les traités de Chimie, le point de fusion excepté) fondent à 44° .

Et pour mettre mieux en évidence la différence entre le cas de la droite et celui du phosphore, faisons encore une remarque. La droite possède dans la nature plusieurs images plus ou moins imparfaites, dont les principales sont le rayon lumineux et l'axe de rotation d'un corps solide. Je suppose que l'on constate que le rayon lumineux ne satisfait pas au postulatum d'Euclide (par exemple en montrant

qu'une étoile a une parallaxe négative), que ferons-nous ? Concluons-nous que la droite étant par définition la trajectoire de la lumière ne satisfait pas au postulat, ou bien au contraire que la droite satisfaisant par définition au postulat, le rayon lumineux n'est pas rectiligne ?

Assurément nous sommes libres d'adopter l'une ou l'autre définition et par conséquent l'une ou l'autre conclusion ; mais adopter la première ce serait stupide, parce que le rayon lumineux ne satisfait probablement que d'une façon imparfaite non seulement au postulat d'Euclide, mais aux autres propriétés de la ligne droite ; que s'il s'écarte de la droite euclidienne, il ne s'écarte pas moins de l'axe de rotation des corps solides qui est une autre image imparfaite de la ligne droite ; qu'enfin il est sans doute sujet au changement, de sorte que telle ligne qui était droite hier, cessera de l'être demain si quelque circonstance physique a changé.

Supposons, maintenant que l'on vienne à découvrir que le phosphore ne fond pas à 44° , mais à $43^{\circ},9$. Concluons-nous que le phosphore étant par définition ce qui fond à 44° , ce corps que nous appelions phosphore n'est pas du vrai phosphore, ou au contraire que le phosphore fond à $43^{\circ},9$? Ici encore nous sommes libres d'adopter l'une ou l'autre définition et par conséquent l'une ou l'autre conclusion ; mais adopter la première, ce serait stupide parce qu'on ne peut pas changer le nom d'un corps toutes les fois qu'on détermine une nouvelle décimale de son point de fusion.

XXXI

En résumé, MM. Russell et Hilbert ont fait l'un et l'autre un vigoureux effort ; ils ont écrit l'un et l'autre un livre plein de vues originales, profondes et souvent très justes. Ces deux livres nous donneront beaucoup à réfléchir et nous avons beaucoup à y apprendre. Parmi leurs résultats, quelques-uns, beaucoup même, sont solides et destinés à demeurer.

Mais dire qu'ils ont définitivement tranché le débat entre Kant et Leibnitz et ruiné la théorie kantienne des mathématiques, c'est évidemment inexact. Je ne sais si réellement ils ont cru l'avoir fait, mais s'ils l'ont cru, ils se sont trompés.

H. POINCARÉ.

Troisième article

I. La définition du nombre.

Depuis mon dernier travail sur-les rapports des Mathématiques et de la Logique plusieurs articles ont été publiés sur cette question. Nous avons d'abord les articles de M. Pieri et de M. Couturat dans le numéro de mars de la *Revue de Métaphysique*, et qui ont directement pour but de répondre à mes critiques.

Il y a ensuite un important écrit de M. Russell « On some Difficulties in the Theory of Transfinite Numbers and Order Types » dans les *Proceedings of the London Mathematical Society*, 7 mars 1906. Enfin j'ai reçu une lettre de M. Zermelo.

Je voudrais répondre aux objections de MM. Couturat et Pieri et examiner si les nouvelles études de M. Russell ne vont pas nous amener à changer la position de la question. Je m'occuperai d'abord de l'article de M. Couturat, mais on m'excusera de ne pas m'arrêter longtemps sur la première partie de cet article et en particulier sur ce qui concerne les définitions des nombres entiers. J'ai en effet trop de choses à dire au sujet du point essentiel du débat pour m'attarder à des questions qui me semblent moins importantes.

Je persiste à penser que M. Couturat définit le clair par l'obscur et qu'on ne peut poser x et y sans penser *deux* ; mais il y a peut-être des lecteurs qui veulent bien suivre cette discussion avec intérêt et je ne veux pas leur infliger le fastidieux spectacle d'une interminable guerre de guérillas. J'accorderai donc à M. Couturat sans discussion :

1° Que *toujours faux*, ce n'est pas la même chose que *jamais vrai*.

2° Qu'avant les travaux de M. Burali-Forti, il était permis de douter que un fût un nombre, du moins ordinal.

3° Que l'idée d'unité n'implique pas le nombre un.

Et je passerai tout de suite aux deux questions les plus importantes à mon sens ; les règles de la Logistique ont-elles fait leurs preuves de fécondité et d'infaillibilité ? Est-il vrai qu'elles permettent de démontrer le principe d'induction complète sans aucun appel à l'intuition ?

II. L'infaillibilité de la logistique.

En ce qui concerne la fécondité, il semble que M. Couturat se fasse de naïves illusions. La Logistique, d'après lui, prête à l'invention « des échasses et des ailes » et à la page suivante : « *Il y a dix ans que M. Peano a publié la première édition de son *Formulaire*.* »

Comment, voilà dix ans que vous avez des ailes, et vous n'avez pas encore volé !

J'ai la plus grande estime pour M. Peano, qui a fait de très jolies choses (par exemple sa courbe qui remplit toute une aire) ; mais enfin il n'est allé ni plus loin, ni plus haut, ni plus vite que la plupart des mathématiciens aptères, et il aurait pu faire tout aussi bien avec ses jambes.

Je ne vois au contraire dans la logistique que des entraves pour l'inventeur ; elle ne nous fait pas gagner en concision, loin de là, et s'il faut 27 équations pour établir que 1 est un nombre, combien en faudra-t-il pour démontrer un vrai théorème. Si nous distinguons, avec M. Whitehead, l'individu x , la classe dont le seul membre est x et qui s'appellera x , puis la classe dont le seul membre est la classe dont le seul membre est x et qui s'appellera x , croit-on que ces distinctions, si utiles qu'elles soient, vont beaucoup alléger notre allure ?

La Logistique nous force à dire tout ce qu'on sous-entend d'ordinaire ; elle nous force à avancer pas à pas ; c'est peut-être plus sûr, mais ce n'est pas plus rapide.

Ce ne sont pas des ailes que vous nous donnez, ce sont des lisières. Et alors nous avons le droit d'exiger que ces lisières nous empêchent de tomber. Ce sera leur seule excuse. Quand une valeur ne rapporte pas de gros intérêts, il faut au moins que ce soit un placement de père de famille.

Doit-on suivre vos règles aveuglément ? Oui, sans quoi ce serait l'intuition seule qui nous permettrait de discerner entre elles ; mais alors il faut qu'elles soient infaillibles ; ce n'est que dans une autorité infaillible qu'on peut avoir une confiance aveugle. C'est donc une nécessité pour vous. Vous serez infaillibles ou vous ne serez pas.

Vous n'avez pas le droit de nous dire : « Nous nous trompons, c'est vrai, mais vous vous trompez aussi ». Nous tromper, pour nous, c'est un malheur, un très grand malheur, pour vous c'est la mort.

Ne dites pas non plus : est-ce que l'infaillibilité de l'arithmétique empêche les erreurs d'addition ; les règles du calcul sont infaillibles, et pourtant on voit se tromper *ceux qui n'appliquent pas ces règles* ; mais en revisant leur calcul, on verra tout de suite à quel moment ils s'en sont écartés. Ici ce n'est pas cela du tout ; les logisticiens *ont appliqué* leurs règles, et ils sont tombés dans la contradiction ; et cela est si vrai qu'ils s'apprêtent à changer ces règles et à « sacrifier la notion de classe ». Pourquoi les changer si elles étaient infaillibles ?

« Nous ne sommes pas obligés, dites-vous, de résoudre *hic* et *nunc* tous les problèmes possibles. » Oh, nous ne vous en demandons pas tant ; si en face d'un problème, vous ne donniez *aucune* solution, nous n'aurions rien à dire ; mais au contraire vous nous en donnez *deux* et qui sont contradictoires et dont par conséquent une au moins est fautive, et c'est cela qui est une faillite.

M. Russell cherche à concilier ces contradictions, ce qu'on ne peut faire, d'après lui « qu'en restreignant ou même en sacrifiant la notion de classe. » Et M. Couturat, escomptant le succès de cette tentative, ajoute : « Si les logisticiens réussissent là où les autres ont échoué, M. Poincaré voudra bien se rappeler cette phrase, et faire honneur de la solution à la Logistique. »

Mais non : La Logistique existe, elle a son code qui a déjà eu quatre éditions ; ou plutôt c'est ce code qui est la Logistique elle-même. M. Russell s'apprête-t-il à montrer que l'un au moins des deux raisonnements contradictoires a transgressé ce code ? Pas le moins du monde, il s'apprête à changer ces lois, et à en abroger un certain nombre. S'il réussit, j'en ferai honneur à l'intuition de M. Russell et non à la Logistique péanienne qu'il aura détruite.

III. La liberté de la contradiction.

J'avais opposé dans l'article cité deux objections principales à la définition du nombre entier adoptée par les logisticiens. La première de ces objections a été discutée par M. Couturat aux pages 231 à 241 et par M. Pieri aux pages 194 à 203. Nous allons comparer et examiner les manières de voir de MM. Couturat et Pieri.

Que signifie en mathématiques le mot *exister* ; il signifie, avais-je dit, être exempt de contradiction. C'est ce que M. Couturat conteste ; « L'existence logique, dit-il, est tout autre chose que l'absence de contradiction. Elle consiste dans le fait qu'une classe n'est pas vide ; dire : Il existe des a , c'est, par définition, affirmer que la classe a n'est pas nulle ». Et sans doute, affirmer que la classe a n'est pas nulle, c'est par définition, affirmer qu'il existe des a . Mais l'une des deux affirmations est aussi dénuée de sens que l'autre, si elles ne signifient pas toutes deux, ou bien qu'on peut voir ou toucher des a , ce qui est le sens que leur donnent les physiciens ou les naturalistes, ou bien qu'on peut concevoir un a sans être entraîné à des contradictions, ce qui est le sens que leur donnent les logiciens et les mathématiciens.

Pour M. Couturat ce n'est pas la non-contradiction qui prouve l'existence, c'est l'existence qui prouve la non-contradiction. Pour établir l'existence d'une classe, il faut donc établir, par un *exemple*, qu'il y a un individu appartenant à cette classe : « Mais, dira-t-on, comment démontre-t-on l'existence de cet individu ? Ne faut-il pas que cette existence soit établie, pour qu'on puisse en déduire l'existence de la

classe dont il fait partie ? - Eh bien, non ; si paradoxale que paraisse cette assertion, on ne démontre jamais l'existence d'un individu. Les individus, par cela seul qu'ils sont des individus, sont toujours considérés comme existants. On n'a jamais à exprimer qu'un individu existe, absolument parlant, mais seulement qu'il existe dans une classe. » M. Couturat trouve sa propre assertion paradoxale, il ne sera certainement pas le seul. Elle doit, pourtant avoir un sens ; il veut dire sans doute que l'existence d'un individu, seul au monde, et dont on n'affirme rien, ne peut entraîner de contradiction ; tant qu'il sera tout seul, il est évident qu'il ne pourra gêner personne. Eh bien, soit, nous admettrons l'existence de l'individu, « absolument parlant » ; mais de celle-là nous n'avons que faire ; il vous restera à démontrer l'existence de l'individu « dans une classe » et pour cela il vous faudra toujours prouver que l'affirmation : tel individu appartient à telle classe, n'est contradictoire ni en elle-même, ni avec les autres postulats adoptés.

M. Pieri n'est pas tombé dans la même erreur : Il veut aussi qu'on cherche à démontrer l'existence par l'exemple ; mais il se rend mieux compte des conditions d'une pareille démonstration : « Si A, B, C sont des propositions appartenant à un même système déductif , on pourra dire qu'on a démontré leur compatibilité, si dans quelque domaine , on peut trouver une *interprétation* des idées primitives de , qui manifestent toutes les propriétés énoncées par les propositions A, B, C, pourvu qu'un tel domaine ne comprenne aucune de ses propositions parmi ses prémisses et que la consistance de ses principes soit déjà *établie* ou *accordée a priori*. » C'est parfaitement correct, et je n'aurais rien à y changer ; plus loin M. Pieri est plus net encore : « Cette seconde condition entraîne l'impossibilité d'établir déductivement (au moyen du critère indiqué) la consistance des prémisses logiques nécessaires au discours. » « Il ne sera jamais possible de prouver déductivement la vérité ou la consistance de tout le système des prémisses logiques. »

Ainsi la compatibilité des postulats fondamentaux de la Logique est elle-même un postulat qu'il faut admettre et qu'il est impossible de démontrer déductivement. Nous ne pouvons donc affirmer cette compatibilité que par un jugement synthétique *a priori*. Mais revenons à M. Couturat :

« C'est donc émettre une exigence arbitraire et abusive que de prétendre qu'une définition n'est valable que si l'on prouve d'abord qu'elle n'est pas contradictoire. » On ne saurait revendiquer en termes plus énergiques et plus fiers la liberté de la contradiction. « En tout cas, *onus probandi* incombe à ceux qui croient que ces principes sont contradictoires. » Des postulats sont présumés compatibles jusqu'à preuve du contraire, de même qu'un accusé est présumé innocent.

Inutile d'ajouter que je ne souscris pas à cette revendication. Mais, dites-vous, la démonstration que vous exigez de nous est impossible, et vous ne pouvez nous sommer de « prendre la lune avec les dents ». Pardon, cela est impossible pour

vous, mais pas pour nous, qui admettons le principe d'induction comme un jugement synthétique *a priori*. Et cela serait nécessaire pour vous, comme pour nous.

Pour démontrer qu'un système de postulats n'implique pas contradiction, il faut appliquer le principe d'induction complète ; non seulement ce mode de raisonnement n'a rien de « bizarre », mais c'est le seul correct. Il n'est pas « invraisemblable » qu'on l'ait jamais employé ; et il n'est pas difficile d'en trouver des « exemples et des précédents ». J'en ai cité deux dans mon article et qui étaient empruntés à la brochure de M. Hilbert. Il n'est pas le seul à en avoir fait usage et ceux qui ne l'ont pas fait ont eu tort. Ce que j'ai reproché à M. Hilbert, ce n'est pas d'y avoir eu recours (un mathématicien de race comme lui ne pouvait pas ne pas voir qu'il fallait une démonstration et que celle-là était la seule possible), mais d'y avoir eu recours sans y reconnaître le raisonnement par récurrence.

IV

Je suis obligé d'insister sur ce procédé de raisonnement. Et en effet M. Couturat prétend qu'il est fondé non sur l'induction mathématique, mais sur l'induction ordinaire ; cela prouve évidemment qu'il n'y a rien compris du tout. C'est certainement ma faute et mon exposé manquait sans doute de clarté ; il faut donc que je le recommence et pour plus de simplicité, je vais reprendre le premier raisonnement de Hilbert en insistant sur les détails.

Hilbert pose les trois axiomes suivants, pour définir l'égalité :

$$x = x$$

$$\text{Si } x = y, \text{ et que } y = z, x = z.$$

$$\text{Si } x = y, (x) = (y) \quad .$$

et il veut démontrer qu'ils ne sont pas contradictoires, pour cela il démontre que si loin qu'on en pousse les conséquences, on n'obtiendra jamais que des identités. Supposons en effet qu'on en ait déjà tiré un certain nombre d'équations et que ces équations soient toutes des identités ; nous appliquons une fois de plus à ces équations l'une des trois règles déduites de ces trois axiomes, je dis que les équations nouvelles ainsi obtenues seront encore toutes des identités.

Pour la première, il est inutile d'insister ; appliquons la seconde à deux équations quelconques, préalablement obtenues :

$$X=Y, Y=Z$$

Si ces équations sont des identités, comme nous le supposons, elles se réduiront à :

$$X=X, X=X$$

et nous n'en pourrions tirer que :

$$X=X$$

qui est une nouvelle identité.

Appliquons la 3^e à une équation préalablement obtenue :

$$X=Y$$

si cette équation est une identité, comme nous le supposons, et qu'elle se réduise à :

$$X=X$$

nous en déduisons :

$$(X)= (X)$$

qui est encore une identité.

Ainsi d'identités nous ne pourrions déduire que des identités, et de proche en proche, c'est-à-dire par induction mathématique, on voit que, quelque loin que nous poussions la chaîne de nos raisonnements, nous n'obtiendrions jamais que des identités.

L'exemple est peut-être trop simple, mais il suffit pour montrer en quoi consiste ce mode de raisonnement.

Inutile alors d'insister sur les objections de M. Couturat ; l'ordre naturel d'une démonstration n'est pas linéaire, mais ramifié ; qu'est-ce que cela peut faire ; on n'énoncera jamais les théorèmes que les uns après les autres ; l'ordre de ces théorèmes ne nous est pas absolument imposé, et nous pouvons le modifier légèrement. Cela n'empêche pas que le raisonnement par récurrence ne soit applicable ; je n'ai même pas besoin de dire que nous pouvons choisir l'ordre des théorèmes de façon qu'il s'applique, puisqu'il s'appliquera quel que soit notre choix.

M. Pieri a mieux compris la question ; il fait cependant une objection : « lors même, dit-il, que le principe d'induction serait accepté parmi les axiomes logiques, nous ne saurions décider s'il s'agit d'une série *dénombrable*, c'est-à-dire susceptible de l'application du principe ».

Un raisonnement formé d'une suite *non dénombrable* de propositions et de syllogismes, qu'est-ce que cela peut bien être ? Comment se représenter cela ? Peut-être pouvons-nous nous contenter d'être assurés que nous ne rencontrerons *jamais* de contradiction ; *jamais* signifiant au bout d'un temps fini si long qu'il soit ; quand même nous n'aurions plus la même certitude quand il s'agirait d'un temps postérieur à la fin de l'éternité.

V. La seconde objection.

Je réserve pour plus tard les questions traitées par M. Couturat dans son paragraphe IV et qui nécessitent un examen plus approfondi et j'arrive à ma seconde objection que M. Couturat cherche à réfuter dans son § V.

Où, dit-il, M. Poincaré a-t-il vu les logisticiens commettre la faute qu'il leur reproche ? Je commence par déclarer qu'en écrivant la phrase incriminée, je ne pensais pas à la confusion commise par M. Russell entre deux énoncés différents du principe d'induction. Cette confusion se trouve dans un article de polémique, mais non dans son ouvrage principal, et je ne voudrais pas en abuser contre lui.

C'est dans l'article de M. Hilbert que j'avais relevé la faute en question ; aujourd'hui M. Hilbert est excommunié et M. Couturat ne le regarde plus comme un logisticien ; il va donc me demander si j'ai trouvé la même faute chez les logisticiens orthodoxes. Non, je ne l'ai pas vue dans les pages que j'ai lues ; je ne sais si je la trouverais dans les 300 pages qu'ils ont écrites et que je n'ai pas envie de lire.

Seulement il faudra bien qu'ils la commettent le jour où ils voudront tirer de la science mathématique une application quelconque. Cette science n'a pas uniquement pour objet de contempler éternellement son propre nombril ; elle touche à la nature et un jour ou l'autre elle prendra contact avec elle ; ce jour-là, il faudra secouer les définitions purement verbales et ne plus se payer de mots.

Quoi qu'il en soit, je reviens à l'exemple de M. Hilbert ; il s'agit toujours du raisonnement par récurrence, et de la question de savoir si un système de postulats n'est pas contradictoire. M. Couturat me dira sans aucun doute qu'alors cela ne le touche pas, mais cela intéressera peut-être ceux qui ne revendiquent pas comme lui la liberté de la contradiction.

Nous voulons établir comme plus haut que nous ne rencontrerons pas de contradiction après un nombre quelconque de raisonnements, aussi grand que l'on veut, pourvu que ce nombre soit fini. Pour cela il faut appliquer le principe d'induction. Devons-nous entendre ici par nombre fini, tout nombre auquel par définition le principe d'induction s'applique ? Évidemment non, sans quoi nous serions conduits aux conséquences les plus étranges.

Pour que nous ayons le droit de poser un système de postulats, il faut que nous soyons assurés qu'ils ne sont pas contradictoires. C'est là une vérité qui est admise par *la plupart* des savants, j'aurais écrit par *tous* avant d'avoir lu le dernier article de M. Couturat. Mais que signifie-t-elle ? Veut-elle dire : il faut que nous soyons sûrs de ne pas rencontrer de contradiction après un nombre *fini* de propositions, le nombre *fini* étant par définition celui qui jouit de toutes les propriétés de nature récurrente, de telle façon que si une de ces propriétés faisait défaut, si par exemple nous tombions sur une contradiction, nous *conviendrions* de dire que le nombre en question n'est pas fini ?

En d'autres termes, voulons-nous dire : Il faut que nous soyons sûrs de ne pas rencontrer de contradiction à la condition de convenir de nous arrêter juste au moment où nous serions sur le point d'en rencontrer une ? Il suffit d'énoncer une pareille proposition pour la condamner.

Ainsi non seulement le raisonnement de M. Hilbert suppose le principe d'induction, mais il suppose que ce principe nous est donné, non comme une simple définition, mais comme un jugement synthétique *a priori*.

En résumé :

Une démonstration est nécessaire.

La seule démonstration possible est la démonstration par récurrence.

Elle n'est légitime que si on admet le principe d'induction, et si on le regarde non comme une définition, mais comme un jugement synthétique.

VI

Est-ce la peine de revenir sur les deux dernières pages de M. Couturat ? Est-il nécessaire de dire que je n'ai pas donné deux énoncés incompatibles du principe d'induction, que le premier (celui de la page 815, 1^{er} article) est seulement moins complet que celui de la page 32 (2^e article), puisqu'on y parle des nombres entiers, sans les définir ? Que le second énoncé n'a nullement le sens grotesque que M. Couturat lui attribue, que je n'ai jamais voulu dire :

$$\mathbb{N} = \{x \in \mathbb{S} : (0 \in \mathbb{S} : n \in \mathbb{S} \cdot n + 1 \in \mathbb{S} : \exists x \in \mathbb{S})\}?$$

Que signifiait alors « un nombre entier est celui qui peut être défini par récurrence ? » Cela voulait dire : un nombre entier est celui qui peut être obtenu par additions successives; ou si vous aimez mieux un nombre entier est celui d'où l'on peut revenir à zéro par soustractions successives. Et alors vous me demandez « combien de soustractions » ; je vous répondrai « n'importe combien ». Si nous prenons un nombre infini quelconque, par exemple aleph-zéro, nous ne pourrons revenir à zéro ni par un nombre fini, ni par un nombre infini de soustractions, puisque aleph-zéro moins un est égal à aleph-zéro.

Je ne peux pas écrire cela en péanien, puisque je ne parle pas cette langue avec assez de sûreté, mais je peux le mettre en formules que vous pourrez facilement traduire en péanien.

Un nombre entier est un nombre cardinal ; zéro est un nombre entier - tout nombre entier a un suivant qui diffère de lui et qui est aussi un entier - tout nombre entier, zéro excepté, a un précédent qui diffère de lui et qui est un entier.

Il y aurait peut-être avantage à modifier cette définition ; mais c'était celle que j'avais en vue quand je disais définir par récurrence ; ce qui m'importe c'est qu'elle n'implique pas *analytiquement* le principe d'induction (Voir plus bas § X).

VII. Les antinomies cantorienes.

Je vais maintenant aborder l'examen de l'important mémoire de M. Russell. Ce mémoire a été écrit en vue de triompher des difficultés soulevées par ces antinomies cantorienes auxquelles nous avons fait déjà de fréquentes allusions. Cantor avait cru pouvoir constituer une Science de l'Infini ; d'autres se sont avancés dans la voie qu'il avait ouverte, mais ils se sont bientôt heurtés à d'étranges contradictions. Ces antinomies sont déjà nombreuses, mais les plus célèbres sont :

- 1° L'antonomie Burali-Forti ;
- 2° L'antonomie Zermelo-König ;
- 3° L'antonomie Richard.

Cantor avait démontré que les nombres ordinaux (il s'agit des nombres ordinaux transfinis, notion nouvelle introduite par lui) peuvent être rangés en une série linéaire, c'est-à-dire que de deux nombres ordinaux inégaux, il y en a toujours un qui est plus petit que l'autre. Burali-Forti démontre le contraire ; et en effet, dit-il en substance, si on pouvait ranger *tous* les nombres ordinaux en une série linéaire, cette série définirait un nombre ordinal qui serait plus grand que *tous* les autres ; on pourrait ensuite y ajouter 1 et on obtiendrait encore un nombre ordinal qui serait *encore* plus grand, et cela est contradictoire.

A la suite de mon article, M. Burali-Forti a écrit à M. Couturat. Il n'y a pas contradiction, prétend-il, parce que le résultat de M. Cantor s'applique aux ensembles *bien* ordonnés, et le mien aux ensembles *parfaitement* ordonnés.

La lettre de M. Burali-Forti est citée par M. Couturat à la page 229 de son dernier article ; mais elle a été dénaturée au point de devenir absurde. Est-ce lui-même qui a commis une inadvertance, est-ce M. Couturat qui a mal traduit, est-ce la faute de l'imprimeur ? Je n'en sais rien. Heureusement le texte est facile à rétablir, il suffit de retourner toutes les phrases.

On lui fait dire : une classe parfaitement ordonnée est aussi une classe bien ordonnée, mais la réciproque n'est pas vraie, et il a certainement voulu dire : une classe bien ordonnée est aussi une classe parfaitement ordonnée, mais la réciproque n'est pas vraie. Et en effet si on se reporte au texte cité on lit : Ogni classe ben ordinata è anche perfettamente ordinata, ma non vice-versa.

Même après cette rectification son explication n'est pas satisfaisante. Les raisonnements de M. Burali-Forti s'appliquent aisément en effet aux ensembles bien ordonnés et aux nombres ordinaux de Cantor et en particulier, il est facile de démontrer que la suite de tous les nombres ordinaux de Cantor forme un ensemble *bien* ordonné.

Nous reviendrons plus loin sur l'antonomie Zermelo-König qui est d'une nature un peu différente ; voici ce que c'est que l'antonomie Richard. (*Revue générale des Sciences*, 30 juin 1905.) Considérons tous les nombres décimaux qu'on peut définir à l'aide d'un nombre fini de mots ; ces nombres décimaux forment un ensemble E, et il est aisé de voir que cet ensemble est dénombrable, c'est-à-dire qu'on peut

numéroter les divers nombres décimaux de cet ensemble depuis 1 jusqu'à l'infini. Supposons le numérotage effectué, et définissons un nombre N de la façon suivante. Si la n^{e} décimale du n^{e} nombre de l'ensemble E est

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

la n^{e} décimale de N sera

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 1, 1

Comme on le voit, N n'est pas égal au n^{e} nombre de E et comme n est quelconque, N n'appartient pas à E et pourtant N devrait appartenir à cet ensemble puisque nous l'avons défini avec un nombre fini de mots.

Nous verrons plus loin que M. Richard a donné lui-même, avec beaucoup de sagacité, l'explication de son paradoxe et que son explication peut s'étendre, *mutatis mutandis*, aux autres paradoxes analogues.

VIII. Zigzag-theory et noclass-theory.

Quelle est l'attitude de M. Russell en présence de ces contradictions ? Après avoir analysé celles dont nous venons de parler et en avoir cité d'autres encore, après leur avoir donné une forme qui fait penser à l'Epiménide, il n'hésite pas à conclure :

« A propositional function of one variable does not always determine a class. » Une « propositional function » ou « norm » peut être « non prédicative ». Et cela ne veut pas dire que ces propositions non prédicatives déterminent une classe vide, une classe nulle ; cela ne veut pas dire qu'il n'y a aucune valeur de x qui satisfasse à la définition et qui puisse être l'un des éléments de la classe. Les éléments existent, mais ils n'ont pas le droit de se syndiquer pour former une classe.

Mais cela n'est que le commencement et il faut savoir reconnaître si une définition est ou non prédicative ; pour résoudre ce problème, M. Russell hésite entre trois théories qu'il appelle

- A. The zigzag theory ;
- B. The theory of limitation of size ;
- C. The no classes theory.

D'après la zigzag theory : « propositional functions determine classes when they are fairly simple, and only fail to do so when they are complicated and recondite ». Qui décidera maintenant si une définition peut être regardée comme suffisamment simple pour être acceptable ? A cette question pas de réponse, sinon l'aveu loyal d'une complète impuissance : « the axioms as to what functions are predicative have to be exceedingly complicated and cannot be recommended by any intrinsic plausibility. This is a defect which might be remedied by greater ingenuity, or by the help of some hitherto unnoticed distinction. But, hitherto, in attempting to set

up axioms for this theory, I have found no guiding principle except the avoidance of contradictions ; and this, by itself, is a very insufficient principle, since it leaves us always exposed at the risk that further deductions will elicit contradictions ».

Cette théorie reste donc bien obscure ; dans cette nuit, une seule lueur ; c'est le mot zigzag. Ce que M. Russell appelle la « *zigzag-giness* » c'est sans doute ce caractère particulier qui distingue l'argument d'Epiménide.

D'après la theory of limitation of size, une classe cesserait d'avoir droit à l'existence si elle était trop étendue. Peut-être pourrait-elle être infinie, mais il ne faudrait pas qu'elle le fût trop.

Mais nous retrouvons toujours la même difficulté ; à quel moment précis commencera-t-elle à l'être trop ? « A great difficulty of this theory is that it does not tell us how far up the series of ordinals it is legitimate to go. » Bien entendu, cette difficulté n'est pas résolue et M. Russell passe à la troisième théorie.

Dans la no classes theory, il est interdit de prononcer le mot *classe* et on doit remplacer ce mot par des périphrases variées. Quel changement pour les logisticiens qui ne parlent que de classes et de classes de classes ! Il va falloir refaire toute la Logistique. Se figure-t-on quel sera l'aspect d'une page de Logistique quand on en aura supprimé toutes les propositions où il est question de classe ? Il n'y aura plus que quelques survivantes éparses au milieu d'une page blanche. *Apparent rari nantes in gurgite vasto.*

Quoi qu'il en soit, on voit quelles sont les hésitations de M. Russell, les modifications qu'il va faire subir aux principes fondamentaux qu'il a adoptés jusqu'ici. Il va falloir des critères pour décider si une définition est trop compliquée ou trop étendue, et ces critères ne pourront être justifiés que par un appel à l'intuition.

Hâtons-nous d'ajouter qu'à la fin du mémoire un télégramme de la dernière heure nous apprend que ces hésitations ont cessé : « From further investigation, I now feel hardly any doubt that the no classes theory affords the complete solution of all the difficulties... »

Quoi qu'il en soit, la Logistique est à refaire et on ne sait trop ce qu'on en pourra sauver : « I hope in future to work out this theory to the point where it will appear exactly how much of mathematics it preserves, and how much it forces us to abandon. » Inutile d'ajouter que le Cantorisme et la Logistique sont seuls en cause ; les vraies mathématiques, celles qui servent à quelque chose, pourront continuer à se développer d'après leurs principes propres sans se préoccuper des orages qui sévissent en dehors d'elles, et elles poursuivront pas à pas leurs conquêtes accoutumées qui sont définitives et qu'elles n'ont jamais à abandonner.

IX. La vraie solution.

Quel choix devons-nous faire entre ces différentes théories ? Il me semble que la solution est contenue dans une lettre de M. Richard dont j'ai parlé plus haut et qu'on trouvera dans la *Revue Générale des Sciences* du 30 juin 1905. Après avoir exposé l'antinomie que nous avons appelée l'antinomie Richard, il en donne l'explication.

Reportons-nous à ce que nous avons dit de cette antinomie au § VII ; E est l'ensemble de *tous* les nombres que l'on peut définir par un nombre fini de mots, *sans introduire la notion de l'ensemble E lui-même*. Sans quoi la définition de E contiendrait un cercle vicieux ; on ne peut pas définir E par l'ensemble E lui-même.

Or nous avons défini N, avec un nombre fini de mots il est vrai, mais en nous appuyant sur la notion de l'ensemble E. Et voilà pourquoi N ne fait pas partie de E.

Dans l'exemple choisi par M. Richard, la conclusion se présente avec une entière évidence et l'évidence paraîtra encore plus grande quand on se reportera au texte même de sa lettre. Mais la même explication vaut pour les autres antinomies et en particulier pour celle de Burali-Forti. On y introduit l'ensemble E de tous les nombres ordinaux ; cela veut dire de tous les nombres ordinaux que l'on peut définir sans introduire la notion de l'ensemble E lui-même ; le nombre ordinal qui correspond au type d'ordre défini par cet ensemble E se trouve donc exclu.

Ainsi les définitions qui doivent être regardées comme non prédicatives sont celles qui contiennent un cercle vicieux. Et les exemples qui précèdent montrent suffisamment ce que j'entends par là. Est-ce là ce que M. Russell appelle la « zigzagginess ? » Je pose la question sans la résoudre.

Par exemple la définition d'aleph-un est non prédicative ; le raisonnement par lequel Cantor cherche à établir l'existence de ce nombre, me paraissant tout pareil à celui de Burali-Forti. Je ne suis donc pas sûr qu'aleph-un existe.

X. Les démonstrations du principe d'induction.

Je suis maintenant en mesure de revenir sur les questions traitées par M. Couturat dans son § IV et que j'avais réservées. Peut-on démontrer le principe d'induction, et si on le regarde comme une définition, peut-on démontrer que cette définition n'est pas contradictoire ? Examinons donc les démonstrations qui ont été proposées et que je ramènerai à trois : celle de Whitehead-Russell ; celle de Burali-Forti rappelée par M. Pieri dans son dernier article ; celle de Zermelo que j'exposerai plus loin.

Et d'abord pour mieux faire comprendre la position de la question, profitons de quelques dénominations nouvelles heureusement introduites par M. Russell dans son récent mémoire.

Appelons *classe récurrente* toute classe de nombres qui contient zéro, et qui contient $n+1$ si elle contient n .

Appelons *nombre inductif* tout nombre qui fait partie de *toutes* les classes récurrentes.

Appelons *nombre fini* le nombre cardinal d'une classe qui n'est équivalente à aucune de ses parties.

Il conviendrait de compléter encore cette nomenclature, afin d'éviter toute espèce de confusion, car on a donné une autre définition des classes finies ; on a dit qu'un nombre n est fini lorsqu'il n'est pas égal à $n-1$. Nous dirons alors qu'un entier fini est un nombre cardinal n qui n'est pas égal à $n-1$.

Il est clair d'après cela que tout nombre fini est un entier fini, mais la réciproque n'est pas évidente ; pour la démontrer, il faudrait s'appuyer sur le théorème de Bernstein que nous discuterons plus loin.

On voit d'autre part tout de suite que la classe des entiers finis est récurrente et par conséquent que tout nombre inductif est un entier fini.

Il reste à savoir si tout nombre fini est un nombre inductif ; et s'il en est de même de tout entier fini. Établir ce point, ce serait démontrer le principe d'induction au sens que je lui ai donné au § VI, ainsi qu'il est aisé de le constater en se reportant à ce paragraphe. Mais il ne semble pas qu'on y soit parvenu. M. Russell qui est censé l'avoir démontré¹, en doute fort, car il dit dans son dernier article : « But, so far as I know, we cannot prove that the number of classes contained in a finite class is always finite, or *that every finite number is an inductive number.* »

XI

Je vais exposer de mon mieux la démonstration de Whitehead ; les lecteurs qui trouveraient que mon exposition manque de clarté pourront se reporter au texte primitif (*American Journal of mathematics*, t. XXIV).

Les nombres inductifs existent puisque zéro appartient par définition à toutes les classes récurrentes ; on voit tout de suite que tout nombre non inductif n'est pas un entier fini². Il s'agit d'établir inversement que tout nombre non inductif n'est pas

¹ Couturat attribue la démonstration à Whitehead, mais Whitehead l'attribue à Russell (*American Journal of Mathematic*, t. XXIV). (Toute la section 3, dit-il, est due à Russell.)

² Sic legitur.

un entier fini, et pour cela de montrer que toute classe dont le nombre cardinal n'est pas inductif contient une classe dont le nombre cardinal est aleph-zéro. Pour cela nous allons établir la proposition suivante :

Si n n'est pas inductif, et que m le soit, $n-m$ ne sera pas inductif.

Et en effet la classe des nombres m tels que, n étant un nombre non inductif quelconque, $n-m$ ne soit pas inductif, cette classe, dis-je, est récurrente ; si donc m est inductif il devra en faire partie :

Il est aisé de vérifier que cette classe que nous appellerons K est récurrente ; car zéro en fait partie puisque $n-0$ n'est pas inductif, si n ne l'est pas ; de plus $m+1$ en fait partie si m en fait partie ; car si $n-m$ n'est pas inductif, il en est de même de $n-m-1$.

Je ne poursuivrai pas plus loin la démonstration, car c'est ici qu'en est le défaut :

La définition du nombre inductif n'est pas prédicative, si on admet le critère du § IX. Un nombre inductif est celui qui appartient à *toutes* les classes récurrentes ; si nous voulons éviter un cercle vicieux nous devons entendre : *à toutes les classes récurrentes dans la définition desquelles n'interviennent pas déjà la notion de nombre inductif*.

Or la classe K définie plus haut ne satisfait pas à cette condition. Dans sa définition figure la notion du nombre inductif. C'est la classe des nombres m tels que n étant un nombre non *inductif* donné, $n-m$ ne soit pas *inductif*. Le mot inductif est répété deux fois ; passe pour la première, puisqu'il s'agit d'un nombre non inductif *donné* ; mais, pour la seconde fois, nous ne pouvons admettre aucune excuse.

Autre exemple. Nous voulons démontrer que la somme de deux nombres inductifs est un nombre inductif. En effet, dirons-nous, la classe K des nombres qui ajoutés à un nombre inductif donné n donnent un nombre *inductif* est évidemment récurrente. Cela ne vaut rien ; la classe K est récurrente, c'est vrai, mais dans sa définition figure le mot *inductif*.

Le raisonnement de Whitehead est donc vicieux ; c'est le même qui a conduit aux antinomies ; il était illégitime quand il donnait des résultats faux ; il reste illégitime quand il conduit par hasard à un résultat vrai.

Une définition qui contient un cercle vicieux ne définit rien. Il ne sert à rien de dire, nous sommes sûrs, quelque sens que nous donnions à notre définition, qu'il y a au moins zéro qui appartient à la classe des nombres inductifs ; il ne s'agit pas de savoir si cette classe est vide, mais si on peut rigoureusement la délimiter. Une classe « non prédicative » ce n'est pas une classe vide, c'est une classe dont la frontière est indéfinie.

Inutile d'ajouter que cette objection particulière laisse subsister les objections générales qui s'appliquent à toutes les démonstrations.

XII

M. Burali-Forti a donné une autre démonstration dans son article *Le Classi finite* (*Atti di Torino*, t. XXXII). Mais il est obligé d'admettre deux postulats :

Le premier, c'est qu'il existe toujours au moins une classe infinie.

Le second s'énonce ainsi :

$$u \in \mathbf{K} (\mathbf{K} - \mathbf{1} \mathbf{\Lambda}). \text{ o. } u < v' u$$

Le premier postulat n'est pas plus évident que le principe à démontrer ; le second non seulement n'est pas évident, mais il est faux; comme l'a montré M. Whitehead, comme d'ailleurs le moindre taupin s'en serait aperçu du premier coup, si l'axiome avait été énoncé dans un langage intelligible, puisqu'il signifie : le nombre des combinaisons qu'on peut former avec plusieurs objets est plus petit que le nombre de ces objets.

Mais M. Pieri fait observer que l'on peut sans changer la démonstration, remplacer cet axiome faux par un autre d'après lequel le nombre des combinaisons est fini, si celui des objets est fini. Ce nouvel axiome est vrai, mais il n'est pas plus évident que le principe à démontrer. Il ne résout donc pas la question et je n'ai pas à insister davantage sur la démonstration de M. Burali-Forti ; je me bornerai à dire que malgré ces inadvertances, et la difficulté qu'il y a à le lire, ce mémoire contient des choses très intéressantes.

M. Zermelo a bien voulu m'écrire une lettre où il propose une démonstration du principe d'induction. Il appelle suite simple un ensemble bien ordonné où tout élément (sauf le premier) a un prédécesseur immédiat ; et cette suite simple est finie si elle a un dernier élément. On constate aisément qu'il y a des suites simples finies.

Il est clair que le principe d'induction s'applique à ces suites, puisqu'une des formes qu'on lui a données, c'est que dans une classe de nombres entiers, il y en a toujours un plus petit que tous les autres, c'est-à-dire que la suite des nombres entiers est « bien ordonnée ». Cette démonstration ne diffère donc pas essentiellement des précédentes, et la plupart des objections subsistent. D'ailleurs ce qu'il faudrait démontrer, c'est qu'il existe au moins une suite simple *infinie*.

XIII. L'axiome de Zermelo.

Dans sa démonstration célèbre, M. Zermelo s'appuie sur l'axiome suivant :

Dans un ensemble quelconque (ou même dans chacun des ensembles d'un ensemble d'ensembles) nous pouvons toujours choisir *au hasard* un élément (quand même cet ensemble d'ensembles comprendrait une infinité d'ensembles). On avait appliqué mille fois cet axiome sans l'énoncer, mais dès qu'il fut énoncé, il souleva des doutes. Quelques mathématiciens, comme M. Borel, le rejetèrent résolument ; d'autres l'admirent. Voyons ce qu'en pense M. Russell, d'après son dernier article.

Il ne se prononce pas : « Whether Zermelo's axiom is true or false is a question which, while more fundamental matters are in doubt, is very likely to remain unanswered. » Il se contente de mettre en évidence quelques-unes des formes nouvelles que l'on peut donner à la question ; mais les considérations auxquelles il se livre sont très suggestives.

Et d'abord un exemple pittoresque; supposons que nous ayons aleph-zéro paires de bottes de telle façon que nous puissions numéroter *les paires* depuis 1 jusqu'à l'infini ; combien aurons-nous de bottes ? en aurons-nous aleph-zéro de façon que- nous puissions numéroter *les bottes* depuis 1 jusqu'à l'infini ? Oui, si dans chaque paire, la botte droite se distingue de la botte gauche ; il suffira en effet de donner le numéro $2n-1$ à la botte droite de la n^{e} paire et le numéro $2n$ à la botte gauche de la n^{e} paire. Non, si la botte droite est pareille à la botte gauche, parce qu'une pareille opération deviendra impossible. A moins que l'on n'admette l'axiome de Zermelo, parce qu'alors on pourra choisir au hasard dans chaque paire la botte que l'on regardera comme droite.

Enfin M. Russell montre que si on abandonne l'axiome de Zermelo, on est conduit à abandonner ce qu'il appelle, the multiplicative axiom, sur lequel repose la définition de la multiplication de deux nombres cardinaux transfinis. Alors tout ce que M. Couturat appelle la théorie cardinale du nombre s'écroule d'un coup.

A vrai dire, M. Russell n'abandonne pas tout espoir de rebâtir :

« The complete solution of our difficulties, we may surmise, is more likely to come from clearer notions in logic than from the technical advance of mathematics ; but until the solution is found we cannot be sure how much of mathematics it will leave intact. »

Encore une fois les *vraies* mathématiques, celles où l'on ne patauge pas dans l'infini actuel, ne sont pas en cause. Mais, ce qui est intéressant à rechercher, c'est ce que M. Russell entend par « clearer notions in logic ». Pour le comprendre il faut relire ce qui précède page 49 :

« The multiplicative axiom has been employed constantly in proofs of theorems concerning transfinite numbers. It is open to everybody, as yet, to accept it as a self-evident truth, but it remains possible that it may turn out to be capable of disproof by *reductio ad absurdum*. It may, also, of course, be capable of proof, but that is far less probable. »

Ainsi M. Russell espère encore qu'on pourra démontrer *déductivement*, en partant des autres postulats, que l'axiome de Zermelo est faux, ou bien qu'il est vrai. Inutile de dire combien cet espoir me paraît illusoire. Ce ne sont pas de « clearer notions in logic » qui nous tireront d'embarras ; ce ne sera pas non plus « the technical advance of mathematics ». Les axiomes en question ne seront jamais que des propositions que les uns admettront comme « self-evident » et dont les autres douteront. Chacun n'en croira que son intuition. Il y a toutefois un point sur lequel tout le monde sera d'accord. L'axiome est « self-evident » pour les classes finies ; mais s'il est indémontrable pour les classes infinies, il l'est sans doute aussi pour les classes finies, qu'on n'en a pas encore distinguées à ce stade de la théorie ; c'est donc un jugement synthétique *a priori* sans lequel la « théorie cardinale » serait impossible, aussi bien pour les nombres finis que pour les nombres infinis.

XIV. Théorème de Bernstein.

Je reviendrai sur ce théorème, non pour répondre à M. Couturat, mais pour éclaircir quelques points à la lumière des considérations qui précèdent. Ce théorème peut s'énoncer de la façon suivante :

Si un ensemble A_0 peut se décomposer en trois parties H_0 , Q_0 et A_1 de telle sorte que

$$A_0 = H_0 + Q_0 + A_1$$

et si A_1 est équivalent à A_0 de telle sorte que

$$A_1 \cong A_0$$

$A_1 + Q_0$ sera équivalent à A_0 .

En effet si A_1 est équivalent à A_0 , c'est qu'à chaque élément de A_0 correspond un élément de A_1 que l'on peut appeler son image. Si B est un ensemble contenu dans A_0 , les images des éléments de B formeront un ensemble que nous pourrions appeler l'image de B et que nous désignerons par (B) . On a donc $(A_0) = A_1$. Posons alors :

$$\begin{aligned} (A_1) &= A_2, & (H_0) &= H_1, & (Q_0) &= Q_1, \\ (A_2) &= A_3, & (H_1) &= H_0, & (Q_1) &= Q_0, \end{aligned}$$

...

et ainsi de suite ; on aura

$$A_n = H_n + Q_n + A_{n+1}$$

quand l'indice n sera un nombre inductif quelconque.

Soit alors C l'ensemble de tous les éléments qui appartiennent à *tous* les A_n dont l'indice n est un nombre inductif. On démontre sans difficulté que

$$(C)=C$$

Je dis maintenant que

$$(1) A_0=H_0+Q_0+H_1+Q_1+\dots+C$$

c'est-à-dire que tout élément de A_0 qui n'appartient à aucun des H_n ou à aucun des Q_n dont l'indice n est un nombre inductif, doit appartenir à tous les A_n d'indice inductif et par conséquent à C .

Et en effet la classe K formée par les A_n auxquels appartient un élément qui ne fait partie d'aucun des A_k-A_{n+1} , dont l'indice k est un nombre inductif est une classe récurrente.

Il est clair que l'égalité (1) entraîne la proposition énoncée ; mais comme dans la définition de la classe K figure la notion de nombre inductif nous retrouvons le même vice de démonstration signalé au § XI. Qu'est-ce à dire ? La démonstration du théorème de Bernstein reste légitime, mais à la condition que l'on y regarde le principe d'induction comme un jugement synthétique et non pas comme une définition, parce que cette définition serait « non prédicative. »

M. Zermelo m'adresse une autre démonstration du théorème de Bernstein. Considérons tous les ensembles B qui contiennent Q_0 et qui contiennent leur propre image (B) . Soit R l'ensemble formé par les éléments communs à *tous* les ensembles B ; on voit que l'image de R , c'est-à-dire (R) sera formée des éléments communs à tous les (B) ; ces éléments font partie de tous les B , et par conséquent de R , d'où il suit que R qui contient d'ailleurs Q_0 , contient également (R) .

On montre ensuite que

$$R=Q_0+(R)$$

car s'il en était autrement $Q_0+(R)$ serait un ensemble B , qui ne contiendrait pas R , puisqu'il n'en serait au contraire qu'une partie.

Ce point établi, on voit que Q_0+A_1 ou

$$Q_0+[A_1-(R)]+(R)=[A_1-(R)]+R$$

est équivalent à

$$[A_1-(R)]+(R)=A_1$$

puisque (R) est équivalent à R ; et enfin à A_0 puisque A_1 est équivalent à A_0 .

Le défaut est encore le même ; R est la partie commune à *tous* les ensembles B ; sous peine de cercle vicieux, cela doit vouloir dire à tous les ensembles B dans la définition desquels n'entre pas la notion de R . Cela exclut l'ensemble $Q_0+(R)$ qui dépend de R . La définition de l'ensemble R n'est donc pas prédicative.

Et maintenant on pourrait encore déduire le théorème de Bernstein du théorème célèbre de Zermelo ; mais nous nous heurtons toujours au même obstacle.

Que fait M. Zermelo ? Il considère un ensemble E et les sous-ensembles qui y sont contenus. Il choisit au hasard dans chacun de ces sous-ensembles un élément qu'il appelle l'élément distingué de ce sous-ensemble. Cela est possible si on admet « l'axiome de Zermelo » cité plus haut. Il définit ensuite ce qu'il appelle les M . Il

appelle la somme logique de tous les M , de telle façon que tout élément faisant partie d'un M fasse partie de Γ . Il s'agit de montrer que Γ n'est autre chose que l'ensemble total E . Car s'il n'en était pas ainsi, l'ensemble $E - \Gamma$ contiendrait un élément distingué A ; l'ensemble $\Gamma + A$ serait un M_γ , de telle sorte que A ferait partie d'un M_γ , sans faire partie de Γ , ce qui est contraire à l'hypothèse.

C'est toujours la même chose; la définition de Γ n'est pas prédicative. La somme logique de tous les M_γ , cela doit vouloir dire la somme logique de tous les M_γ dans la définition desquels ne figure pas la notion de Γ ; et alors le M_γ , formé par Γ et l'élément distingué de $E - \Gamma$ doit être exclu. Aussi, quoique je sois plutôt disposé à admettre l'axiome de Zermelo, je rejette sa démonstration, qui m'avait fait croire un instant qu'aleph-un pourrait bien exister.

XV. Conclusions.

Une démonstration vraiment fondée sur les principes de la Logique Analytique se composera d'une suite de propositions; les unes, qui serviront de prémisses, seront des identités ou des définitions; les autres se déduiront des premières de proche en proche; mais bien que le lien entre chaque proposition et la suivante s'aperçoive immédiatement, on ne verra pas du premier coup comment on a pu passer de la première à la dernière, que l'on pourra être tenté de regarder comme une vérité nouvelle. Mais si l'on remplace successivement les diverses expressions qui y figurent par leur définition et si l'on poursuit cette opération aussi loin qu'on le peut, il ne restera plus à la fin que des identités, de sorte que tout se réduira à une immense tautologie. La Logique reste donc stérile, à moins d'être fécondée par l'intuition.

Voilà ce que j'ai écrit autrefois; les logisticiens professent le contraire et croient l'avoir prouvé en démontrant effectivement des vérités nouvelles. Par quel mécanisme?

Pourquoi, en appliquant à leurs raisonnements le procédé que je viens de décrire, c'est-à-dire en remplaçant les termes définis par leurs définitions, ne les voit-on pas se fondre en identités comme les raisonnements ordinaires? C'est que ce procédé ne leur est pas applicable. Et pourquoi? parce que leurs définitions sont non prédicatives et présentent cette sorte de cercle vicieux caché que j'ai signalé plus haut; les définitions non prédicatives ne peuvent pas être substituées au terme défini. Dans ces conditions, *la Logistique n'est plus stérile, elle engendre l'antinomie.*

C'est la croyance à l'existence de l'infini actuel qui a donné naissance à ces définitions non prédicatives. Je m'explique: dans ces définitions figure le mot *tous*, ainsi qu'on le voit dans les exemples cités plus haut. Le mot *tous* a un sens bien net

quand il s'agit d'un nombre fini d'objets ; pour qu'il en eût encore un, quand les objets sont en nombre infini, il faudrait qu'il y eût un infini actuel. Autrement *tous* ces objets ne pourront pas être conçus comme posés antérieurement à leur définition et alors si la définition d'une notion N dépend de *tous* les objets A, elle peut être entachée de cercle vicieux, si parmi les objets A il y en a qu'on ne peut définir sans faire intervenir la notion N elle-même.

Il n'y a pas d'infini actuel ; les Cantoriens l'ont oublié, et ils sont tombés dans la contradiction. Il est vrai que le Cantorisme a rendu des services, mais c'était quand on l'appliquait à un vrai problème, dont les termes étaient nettement définis, et alors on pouvait marcher sans crainte.

Les logisticiens l'ont oublié comme les Cantoriens et ils ont rencontré les mêmes difficultés. Mais il s'agit de savoir s'ils se sont engagés dans cette voie par accident, ou si c'était pour eux une nécessité.

Pour moi, la question n'est pas douteuse ; la croyance à l'infini actuel est essentielle dans la logistique russelienne. C'est justement ce qui la distingue de la logistique hilbertienne. Hilbert se place au point de vue de l'extension, précisément afin d'éviter les antinomies cantoriennes ; Russell se place au point de vue de la compréhension. Par conséquent le genre est pour lui antérieur à l'espèce, et le *summum genus* est antérieur à tout. Cela n'aurait pas d'inconvénient si le *summum genus* était fini ; mais s'il est infini, il faut poser l'infini avant le fini, c'est-à-dire regarder l'infini comme actuel.

Et nous n'avons pas seulement des classes infinies ; quand nous passons du genre à l'espèce en restreignant le concept par des conditions nouvelles, ces conditions sont encore en nombre infini. Car elles expriment généralement que l'objet envisagé présente telle ou telle relation avec tous les objets d'une classe infinie.

Mais cela, c'est de l'histoire ancienne. M. Russell a aperçu le péril et il va aviser. Il va tout changer ; et qu'on s'entende bien : il ne s'apprête pas seulement à introduire de nouveaux principes qui permettront des opérations autrefois interdites ; il s'apprête à interdire des opérations qu'il jugeait autrefois légitimes. Il ne se contente pas d'adorer ce qu'il a brûlé ; il va brûler ce qu'il a adoré, ce qui est plus grave. Il n'ajoute pas une nouvelle aile au bâtiment, il en sape les fondations.

L'ancienne Logistique est morte, si bien que la zigzag-theory et la no classes theory se disputent déjà sa succession. Pour juger la nouvelle, nous attendrons qu'elle existe.