Calculatrice personnelle autorisée Documents interdits
Vous soignerez la rédaction de chaque résolution.

Exercice 1 : question de cours : Démontrer le théorème suivant : /10

Le signe du discriminant Δ permet de déterminer le nombre de solutions de l'équation $ax^2+bx+c = 0$, avec $a \neq 0$.
→ Si $\Delta > 0$: l'équation a 2 solutions distinctes : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
→ Si $\Delta = 0$: L'équation a 1 solution : $\alpha = \frac{-b}{2a}$.
→ Si $\Delta < 0$: L'équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

Exercice 2 : *Sans utiliser le discriminant*, écrire les polynômes suivants sous forme canonique : /3

$B(x) = -x^2 + 2x + 5$ $\qquad$ $C(x) = 3x^2 - x + 1$.

Exercice 3 : On se place dans le plan rapporté à un repère. Dans chaque cas, déterminer les coordonnées du sommet de la parabole et l'axe de symétrie : /3

a/ $y = 2x^2 - 4x + 1$ $\qquad$ b/ $y = -x_2 + 6x + 7$

Exercice 4 : On choisit une personne au hasard parmi la clientèle d'in magasin. /4,5
On note A l'événement « la personne choisie a effectué un achat », F l'événement « la personne choisie est une femme » et H l'événement « la personne choisie est un homme ».
1/ Interpréter à l'aide de probabilité chacune des informations suivantes :
- a. 72% des clients ont effectué un achat.
- b. 54% des clients sont des femmes ayant effectué un achat.
- c. Parmi les clients hommes, 90% ont effectué un achat.

2/ Quelle information a-t-on sur la clientèle du magasin grâce à chacune des probabilités suivantes :
a. $P(H) = 0{,}2$ $\qquad$ b. $P(H \cap \bar{A}) = 0{,}02$ $\qquad$ c. $P_A(F) = 0{,}75$.

Exercice 5 : /6
On interroge 32 élèves d'une classe de seconde sur leur choix de spécialités pour la classe de première. On s'intéresse en particulier au fait qu'ils choisissent ou non les spécialités mathématiques ou non et physiques-chimie. On relève qu'un seul élève ne aucune des deux spécialités, 28 élèves choisissent la spécialité mathématiques (événement noté M) et 23 choisissent la spécialité physiques-chimie (événement noté S).
1/ Compléter sur l'énoncé le tableau suivant à l'aide des données de l'énoncé, *aucun détail n'est demandé* :

	M	$\bar{M}$	Total
S			
$\bar{S}$			
Total			

TOURNER =>

2/ On interroge au hasard un élève sur ses choix.

a. Quel est la probabilité qu'un élève ait choisi les deux spécialités ?

b. Préciser P(M) et P(S).

c. Calculer $P_M(S)$. Interpréter le résultat.

d. Proposer un autre mode de calcul de $P_M(S)$.

e. Quelle est la probabilité qu'un élève ayant choisi physique-chimie, choisisse mathématiques ?

Exercice 6 : Soit m un nombre différent de 0. On considère l'équation (E) suivante : $mx^2 + x + 1 = 0$. /3
En fonction de m, donner le nombre de solutions de (E).

Exercice 7 : Une entreprise produit entre 0 et 50 balançoires par jour. /10,5
Le coût de fabrication de x balançoires, en euros, est donné par la fonction suivante :

$$f(x) = x^2 + 230x + 325$$

Chaque balançoire est vendue 300€, et toute la production est vendue.

1. Montrer que le bénéfice $B(x)$ réalisé par l'entreprise en fonction de x peut s'exprimer sous la forme :

$$B(x) = -x^2 + 70x - 325.$$

2. Déterminer la forme canonique de B.

3. a/ *Démontrer* à l'aide de la forme canonique (sans utiliser les formules du cours) que la fonction B est croissante sur [0 ; 35].

b/ En déduire le tableau de variation de B.

c/ Préciser la valeur de l'extremum et pour quelle valeur de x il est atteint. Compléter alors le tableau de variations.

d/ Interpréter alors ces résultats dans le contexte de l'exercice.

4. A l'aide du discriminant, montrer que $B(x) = -(x - 65)(x - 5)$.
En déduire le nombre de pièces produites pour lequel le bénéfice est nul.

5. Combien de balançoires l'entreprise doit – elle produire et vendre pour être rentable ?

Novembre 2019 CORRECTION de la composition de mathématiques 1ère spécialité

Exercice 1 : Soit un polynôme du second degré, P(x) = ax^2+bx+c avec a ≠ 0. /10

$$P(x) = a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c = a\left(\overbrace{x^2+2\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}}^{\textit{id remarquable}}-\frac{b^2}{4a^2}\right)+c = a\overbrace{\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}\right]}^{\textit{on développe a}}+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\overbrace{-\frac{b^2}{4a}+c}^{\textit{même déno}}$$

$$P(x) = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{-b^2+4ac}{4a}.$$

Pour obtenir la forme factorisée, reprenons la dernière expression et factorisons par – le dernier terme :

$$P(x) = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{-b^2+4ac}{4a} = P(x) = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a} \overset{\textit{fact par a}}{\hat{=}} a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$$

Si on pose : Δ = b² – 4ac. On obtient : P(x) = $a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$.

Dans cette expression, si on pose $\alpha=-\frac{b}{2a}$ et $\beta=-\frac{\Delta}{4a^2}$ on obtient la forme canonique (*vue dans séq 1*)

Si Δ>0 : on reconnaît une identité remarquable et on factorise :

$$P(x) = a\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = a\left(x+\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

Si on pose : $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, on obtient la forme factorisée : P(x) = a(x – x_1)(x – x_2).

Si Δ = 0 : le polynôme s'écrit : P(x) = $a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-0\right] = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ et P(x) = 0 a 1 solution $x_0=\frac{-b}{2a}$.

Si Δ < 0 : alors $-\frac{\Delta}{4a^2}>0$. P(x) = 0 ⇔ $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{\Delta}{4a^2}$ un carré ne pouvant pas être négatif, l'équation n'a pas de solution dans ℝ.

Exercice 2 : /3

B(x) = $-x^2+2x+5 = -(x^2-2x)+5 = -((x-1)^2-1)+5 = -(x-1)^2+1+5 = -(x-1)^2+6$.

C(x) = $3x^2-x+1 = 3(x^2-\frac{x}{3})+1 = 3((x-\frac{1}{6})^2-\frac{1}{36})+1 = 3(x-\frac{1}{6})^2-\frac{1}{12}+\frac{12}{12} = 3\left(x-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{11}{12}$.

Exercice 3 : /3

a/ $\alpha=\frac{-b}{2a}=\frac{-(-4)}{2\times 2}=1$ et $\beta=f(\alpha)=f(1)=2\times 1^2-4\times 1+1=-1$.

donc S(1 ; –1) et l'axe de symétrie est la droite d'équation x = 1.

b/ $\alpha=\frac{-b}{2a}=\frac{-(6)}{2\times(-1)}=3$ et $\beta=f(\alpha)=f(3)=-3^2+6\times 3+7=16$.

donc S(3 ; 16) et l'axe de symétrie est la droite d'équation x = 3.

Exercice 4 : 1. 0,5 chaque 2. 1 chaque /4,5

1/ a. P(A) = 0,72 b. P(F∩A) = 0,54 c. $P_H(A)=0{,}9$.

2/ a. P(H) = 0,2 signifie que 20% des clients du magasin sont des hommes.

b. $P(H\cap\bar{A})$ = 0,02 signifie que 2% des clients sont des hommes qui n'ont pas effectué d'achats.

c. $P_A(F)$ = 0,75 signifie que parmi les clients ayant effectué un achat, 75% sont des femmes.

Exercice 5 : /6

1/ 2

	M	$\bar{M}$	Total
S	20	3	23
$\bar{S}$	8	1	9
Total	28	4	32

2/a 0,5 b 1 c 0,5 + 0,5 d 0,5 e. 1

a. $P(M\cap S) = \frac{20}{32} = \frac{5}{8} = 0{,}625$. b. $P(M) = \frac{28}{32} = \frac{7}{8} = 0{,}875$ et $P(S) = \frac{23}{32} = 0{,}71875$.

c. $P_M(S) = \frac{p(M\cap S)}{P(M)} = \frac{\frac{5}{8}}{\frac{7}{8}} = \frac{5}{8} \times \frac{8}{7} = \frac{5}{7}$. La probabilité qu'un ait choisi la spécialité physique-chimie sachant qu'il a choisi la spécialité mathématiques est égale à $\frac{5}{7}$.

d. A l'aide du tableau : $P_M(S) = \frac{20}{28} = \frac{5}{7}$.

e. $P_S(M) = \frac{20}{23}$.

Exercice 6 : /3

→ $\Delta > 0$: l'équation admet 2 solutions distincts i.e. $1 - 4m > 0 \Leftrightarrow 1 > 4m \Leftrightarrow \frac{1}{4} > m$ car 4>0

→ $\Delta = 0$: l'équation admet 1 solution i.e. $1 - 4m = 0 \Leftrightarrow 1 = 4m \Leftrightarrow \frac{1}{4} = m$ car 4>0

→ $\Delta < 0$: l'équation n'admet pas de solutions réelles i.e. $1 - 4m < 0 \Leftrightarrow 1 < 4m \Leftrightarrow \frac{1}{4} < m$ car 4>0

Exercice 7 : (1. 1 2. 1 3a 2 b1,5 c1 d0,5 4.2 + 0,5 5.1) /10,5

1. $B(x) = 300x - f(x) = 300x - x^2 - 230x - 325 = -x^2 + 70x - 325$.

2. $B(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ où sont les coordonnées du sommet de la parabole :

$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-70}{2\times(-1)} = 35$ et $\beta = f(\alpha) = f(35) = -35^2 + 70 \times 35 - 325 = 900$. donc $B(x) = -(x - 35)^2 + 900$.

3. a/ Soient a et b deux nombres dans l'intervalle [0 ; 35] tel que $a < b \leq 35 \Leftrightarrow a - 35 < b - 35 \leq 0$. Sur $]-\infty; 0]$ la fonction carrée est décroissante : $(a - 35)^2 > (b - 35)^2$. Mais $-1 < 0$ donc $-(a - 35)^2 < -(b - 35)^2$ d'où : $-(a - 35)^2 + 900 < -(b - 35)^2 + 900$ i.e. $B(a) < B(b)$ donc B est croissante sur [0 ; 35].

b/

x	0		35		50
$B(x)$	-325	↗	900	↘	675

c/ B admet un maximum sur [0 ; 50] qui vaut 900 atteint en $x = 35$.

d/ En fabriquant 35 balançoires, l'entreprise réalisera un bénéfice maximal de 900€.

4. On résout $-x^2 + 70x - 325 = 0$: $\Delta = 70^2 - 4\times(-1) \times (-325) = 3600 > 0$ l'équation admet 2 solutions :

$x_1 = \frac{-70-\sqrt{3600}}{2\times(-1)} = 65$. et $x_1 = \frac{-70+\sqrt{3600}}{2\times(-1)} = 5$ donc B est factorisable et $B(x) = -(x - 65)(x - 5)$.

Donc si l'entreprise produit 5 pièces, le bénéfice est nul. (*65 l'appartient pas à [0 ; 50]*).

5. L'entreprise doit produire et vendre entre 5 et 50 balançoires pour être rentable.