Mathématiques cycle 4

Nombres et calculs

P 2 à 7

* Nombres relatifs
* Fractions
* Arithmétique
* Puissances
* Calcul littéral

Grandeurs et mesures

P 8 à 11

* Proportionnalité
* Pourcentages
* Périmètres, aires, volumes

Statistiques et probabilités

P 12 à 14

* Statistiques
* Probabilités

Fonctions

P 15 à 18

* Notions
* Fonctions linéaires
* Fonctions affines

Géométrie planes, géométrie dans l'espace

P 19 à 26

* Triangles et théorèmes
* Calculer une longueur
* Calculer un angle
* Démontrer
* Se repérer
* Quadrilatères
* Transformations

Algorithme et programmation

P 27

* Scratch

Source : https://irem.univ-reunion.fr/IMG/pdf/gs.liaison.cycle4-seconde_1__compressed.pdf

Nombres et calculs

Nombres relatifs
* Priorités de calcul
* Ajouter et soustraire des relatifs
* Calculer une somme algébrique
* Multiplier ou diviser deux relatifs
* Multiplier plusieurs relatifs

Fractions
* Prendre une fraction d'un nombre
* Comparer des fractions
* Fractions égales
* Ajouter ou soustraire des fractions
* Multiplier ou diviser avec des fractions

Puissances
* Les préfixes multiplicatifs
* Calculer avec des puissances
* Notation scientifique
* Carré et racine carrée

Calcul littéral
* Calculer une expression littérale
* Tester une égalité
* Réduire une somme algébrique
* Développer et réduire
* Factoriser
* Résoudre une équation
* Résoudre une équation produit
* Identités remarquables

Arithmétique
* Divisibilité
* Nombres premiers
* Crible d'Eratosthène
* Décomposer en produit de facteurs premiers
* Fraction irréductible
* Critères de divisibilité

Source : https://irem.univ-reunion.fr/IMG/pdf/gs.liaison.cycle4-seconde_1__compressed.pdf

Nombres relatifs

Ajouter et soustraire des relatifs

→ Ajouter deux relatifs :

- de même signe : 3 + 6 = 9 ; (-5) + (-2) = (-7) ;
- de signes contraires : 13 + (-7) = 6 ; (-7) + 4 = -3.

→ Soustraire deux relatifs :
15 − 2 = 13 ; 12 − (-1) = 12 + 1 = 13.

"Soustraire, c'est ajouter l'opposé."

Priorités de calcul

Priorité aux ( ), puis aux puissances, ensuite aux multiplications ou divisions et enfin aux additions et soustractions.

- 10 − (1 + 2)×3 = 10 − 3×3 = 10 − 9 = 1
- 2×3^2 + 8÷2 = 2×9 + 8÷2 = 18 + 4 = 22

On fait les calculs de la gauche vers la droite lorsque l'expression ne comporte que des + et − , ou que des × et des ÷.

- 40 − 7 + 20 = 33 + 20 = 53
- 15 ÷ 3 × 2 = 5 × 2 = 10

[5] De gauche à droite en cas d'égalité

Calculer une somme algébrique

A = 7 − 12 + 9 − 15
A = 7 + (-12) + 9 + (-15)
A = 7 + 9 + (-12) + (-15)
A = 16 + (-27)
A = -11

Remplacer toutes les soustractions par des additions de l'opposé puis regrouper les positifs et les négatifs.

Multiplier plusieurs relatifs

On compte le nombre de facteurs (-)

- S'il est **pair,** alors le résultat est + ;
- S'il est **impair,** alors le résultat est -.

(-5) × (-2) × (-1) × 7 × (-9)
est un nombre **positif.**

Multiplier ou diviser deux relatifs

Règle des signes :

(+) × (+) = (+)
(−) × (−) = (+)
(+) × (−) = (−)
(−) × (+) = (−)

Exemples :

- (-4) × (-5) = (+20)
- (-6) × (-2) = (+12)
- (-14) ÷ (+2) = (-7)
- (-20) ÷ (-4) = (+5)

Source : https://irem.univ-reunion.fr/IMG/pdf/gs.liaison.cycle4-seconde_1__compressed.pdf

Fractions

Fractions égales

Pour obtenir une fraction égale, on multiplie ou on divise le numérateur et le dénominateur par un même nombre non nul.

$$\frac{6}{22} = \frac{6 \div 2}{22 \div 2} = \frac{3}{11} \qquad \frac{6}{22} = \frac{\cancel{2} \times 3}{\cancel{2} \times 11} = \frac{3}{11}$$

$$\frac{5}{12} = \frac{5 \times 3}{12 \times 3} = \frac{15}{36} \qquad \frac{15}{36} = \frac{5 \times \cancel{3}}{12 \times \cancel{3}} = \frac{5}{12}$$

Comparer des fractions

Si deux fractions ont le **même dénominateur**, alors la plus grande est celle qui a le plus grand numérateur.

$$\frac{5}{6} > \frac{3}{6} \text{ car } 5 > 3$$

Si deux fractions ont le **même numérateur**, alors la plus grande est celle qui a le plus petit dénominateur.

$$\frac{3}{4} > \frac{3}{5} \text{ car } 4 < 5$$

Si deux fractions ont des **dénominateurs différents**, alors **on les réduit au même dénominateur** :

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{3}{4} = \dfrac{3 \times 3}{4 \times 3} = \dfrac{9}{12} \\ \dfrac{2}{3} = \dfrac{2 \times 4}{3 \times 4} = \dfrac{8}{12} \end{array}\right\} \quad \frac{9}{12} > \frac{8}{12} \text{ donc } \frac{3}{4} > \frac{2}{3}$$

On peut aussi les comparer à 1 :

$$\frac{3}{8} < 1 \text{ et } \frac{9}{5} > 1 \text{ donc } \frac{3}{8} < \frac{9}{5}$$

Prendre une fraction d'un nombre

$$\frac{\triangle}{\square} \times \bigcirc = \frac{\triangle \times \bigcirc}{\square} = \triangle \times \frac{\bigcirc}{\square}$$

$$\frac{2}{3} \text{ de } 9 = \frac{2}{3} \times 9 = \frac{2 \times 9}{3} = 2 \times \frac{9}{3} = 6$$

Ajouter ou soustraire des fractions

→ Avec le même dénominateur :

$$\frac{13}{6} - \frac{8}{6} = \frac{13 - 8}{6} = \frac{5}{6}$$

→ Avec des dénominateurs multiples l'un de l'autre :

$$\frac{1}{3} + \frac{7}{12} = \frac{1 \times 4}{3 \times 4} + \frac{7}{12} = \frac{4}{12} + \frac{7}{12} = \frac{11}{12}$$

→ Avec des dénominateurs quelconques :

$$\frac{5}{2} + \frac{1}{7} = \frac{5 \times 7}{2 \times 7} + \frac{1 \times 2}{7 \times 2} = \frac{35}{14} + \frac{2}{14} = \frac{37}{14}$$

Simplifier le résultat quand cela est possible !

Multiplier ou diviser avec des fractions

→ Pour multiplier deux fractions, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux :

$$\frac{3}{4} \times \frac{11}{7} = \frac{3 \times 11}{4 \times 7} = \frac{33}{28}$$

→ Pour diviser par une fraction, on multiplie par son inverse (**inverse de la 2^{e}** fraction uniquement) :

$$\frac{2}{5} \div \frac{3}{7} = \frac{2}{5} \times \frac{7}{3} = \frac{14}{15}$$

"Diviser, c'est multiplier par l'inverse."

Source : https://irem.univ-reunion.fr/IMG/pdf/gs.liaison.cycle4-seconde_1__compressed.pdf

Arithmétique

Divisibilité

Pour savoir si b divise a, on utilise **la division euclidienne** de a par b :

$$a = b \times q + r$$

Si r est nul, alors b divise a.

a : dividende
b : diviseur
q : quotient
r : reste

- 21 est divisible par 3 car 21 = 3×7 + 0 ; le reste est nul.
- 21 n'est pas divisible par 4 car 21 = 4×5 + 1 ; le reste n'est pas nul.

Nombres premiers

Un nombre est premier lorsqu'il est **divisible par exactement deux nombres** : par 1 et par lui-même.

Exemple : Les vingt-cinq nombres premiers inférieurs à 100 sont 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 et 97…

Cette liste est infinie !

⚠ 1 n'est pas premier car il n'a qu'un seul diviseur !

Critères de divisibilité

Un nombre est divisible par…

→ **2 :** si le chiffre des unités est pair (0, 2, 4, 6 ou 8).
Ex : 13 574 ; 279 836.

→ **3 :** si la somme de ses chiffres est un nombre multiple de 3.
Ex : 741 (7+4+1 = 12).

→ **5 :** si le chiffre des unités est 0 ou 5.
Ex : 3 570 ; 14 235.

→ **9 :** si la somme de ses chiffres est un nombre multiple de 9.
Ex : 6 318 (6+3+1+8 = 18).

→ **10 :** si le chiffre des unités est 0.
Ex : 120 ; 13 000.

Crible d'Eratosthène

	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Décomposer en produit de facteurs premiers

Pour décomposer 252 en produit de facteurs premiers, on va déterminer ses diviseurs premiers dans l'ordre croissant. On obtient ainsi :

252	2
126	2
63	3
21	3
7	7
1	

“ On divise par les plus petits nombres premiers jusqu'à trouver 1.”

$$252 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 7 = 2^2 \times 3^2 \times 7$$

Fraction irréductible

Pour rendre irréductible une fraction, on va décomposer son numérateur et son dénominateur en produit de facteurs premiers :

$$\frac{30}{36} = \frac{\cancel{2} \times \cancel{3} \times 5}{2 \times \cancel{2} \times \cancel{3} \times 3} = \frac{5}{2 \times 3} = \frac{5}{6}$$

Source : https://irem.univ-reunion.fr/IMG/pdf/gs.liaison.cycle4-seconde_1__compressed.pdf

Puissances

Les préfixes multiplicatifs

Préfixe	giga	méga	kilo	milli	micro	nano
symbole	G	M	k	m	µ	n
Puissance associée	10^9	10^6	10^3	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}

Exemple : unités de stockage informatique

1 Go (Gigaoctet) = 1 000 Mo (Mégaoctets) = 10^9 octets

Carrés et racines carrées

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a^2	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

On en déduit :

$\sqrt{1}=1$ $\sqrt{4}=2$ $\sqrt{9}=3$ $\sqrt{16}=4$

$\sqrt{25}=5$ $\sqrt{36}=6$ $\sqrt{49}=7$ $\sqrt{64}=8$

$\sqrt{81}=9$ $\sqrt{100}=10$ $\sqrt{121}=11$ $\sqrt{144}=12$

Calculer avec des puissances

$5^3 = 5 \times 5 \times 5$; $7^1 = 7$; $12^0 = 1$; $10^5 = 100\,000$

$2^{-1} = \frac{1}{2} = 0{,}5$: on dit que 2^{-1} est l'inverse de 2.

⚠ Ne pas confondre $5^3 = 5 \times 5 \times 5$ avec 5×3.

$(3x)^2 = 3x \times 3x = 3 \times x \times 3 \times x = 3 \times 3 \times x \times x = 9x^2$

Propriétés : Pour **multiplier deux puissances** d'un même nombre, on **ajoute les exposants** et pour **diviser deux puissances** d'un même nombre, on **soustrait les exposants.**

$9^3 \times 9^2 = 9^{3+2} = 9^5$ $\frac{10^5}{10^2} = 10^{5-2} = 10^3$

Notation scientifique

Un nombre avec un seul chiffre non nul avant la virgule, suivi d'une puissance de 10 qui multiplie ce nombre.

$2\,021 = 2{,}021 \times 10^3$

Source : https://irem.univ-reunion.fr/IMG/pdf/gs.liaison.cycle4-seconde_1__compressed.pdf

Calcul littéral

Calculer une expression littérale

- Pour $a = 7$, E = $5a - 10 = 5 \times 7 - 10 = 35 - 10 = 25$.
- Pour $y = 3$, F = $y^2 + 5 = 3^2 + 5 = 9 + 5 = 14$.

Réduire une somme algébrique

C'est l'écrire avec le moins de termes possibles !

$A = 5 \times 4x - 2 + 11x + 7$
$A = 20x - 2 + 11x + 7$
$A = 20x + 11x - 2 + 7$
$A = 31x + 5$

Identités remarquables

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Tester une égalité

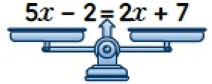
L'égalité $\underbrace{4x + 5}_{G} = \underbrace{19 - 2x}_{D}$ est-elle vraie pour $x = 2$?

On a :

- $G = 4x + 5 = 4 \times 2 + 5 = 8 + 5 = 13$
- $D = 19 - 2x = 19 - 2 \times 2 = 19 - 4 = 15$

or $13 \neq 15$, donc l'égalité est fausse pour $x = 2$.

Résoudre une équation



$5x - 2 = 2x + 7$

Éliminer les x d'un côté.

$5x - 2 - 2x = 2x + 7 - 2x$

$3x - 2 = 7$

Éliminer les constantes de l'autre côté.

$3x - 2 + 2 = 7 + 2$

Diviser par le coeff. devant x.

$3x = 9$

$\frac{3x}{3} = \frac{9}{3}$

OBJECTIF : isoler x.

$x = 3$

$S = \{3\}$

Développer et réduire

→ Distributivité simple :

$$k(a + b) = k \times a + k \times b$$

$E = 5(2x + 3) = 5 \times 2x + 5 \times 3 = 10x + 15$

→ Distributivité double :

$$(a + b)(c + d) = a \times c + a \times d + b \times c + b \times d$$

$E = (x + 6)(x + 2)$
$E = x \times x + x \times 2 + 6 \times x + 6 \times 2$
$E = x^2 + 2x + 6x + 12$
$E = x^2 + 8x + 12$

Factoriser

$$k \times a + k \times b = k(a + b)$$

- $E = 7a + 7b - 7c$
  $E = 7(a + b - c)$
- $F = 15y + 10y^2$
  $F = 5y \times 3 + 5y \times 2y$
  $F = 5y(3 + 2y)$

Résoudre une équation produit nul

Résoudre $(x - 2)(2x + 3) = 0$.

Un produit de facteurs est nul si et seulement si au moins l'un de ses facteurs est nul.

$x - 2 = 0$ ou $2x + 3 = 0$
$x = 2$ ou $2x = -3$
$x = 2$ ou $x = \frac{-3}{2}$

$S = \{2 ; -1{,}5\}$

Source : https://irem.univ-reunion.fr/IMG/pdf/gs.liaison.cycle4-seconde_1__compressed.pdf

Grandeurs et mesures

Proportionnalité

* Reconnaître la proportionnalité
* Calculer avec la proportionnalité
*Représentation graphique
*Echelles

Pourcentages

* Calculer un pourcentage
* Prendre un pourcentage
* Augmenter ou réduire d'un pourcentage
* Retrouver la valeur initiale
*Pourcentages successifs

Périmètre, aires, volumes

* Aires et périmètre
* Aire d'un triangle
* Conversions
* Volumes
* Grandeurs quotients

Source : https://irem.univ-reunion.fr/IMG/pdf/gs.liaison.cycle4-seconde_1__compressed.pdf

Proportionnalité

Calculer avec la proportionnalité

Avec le passage à l'unité

3 samoussas coûtent 1,20 €.
Quel est le prix de 7 samoussas ?

- 3 samoussas coûtent 1,20 €.
- 1 samoussa : 1,20 € ÷ 3 = 0,40 €.
- 7 samoussas : 7 × 0,40 € = 2,80 €.

Avec le coefficient de proportionnalité

2 bouteilles de soda coûtent 3,40 €.
Calculer le prix de 7 bouteilles.
Avec 17 €, combien peut-on s'acheter de bouteilles ?

Bouteilles	2	7	10
Prix (en €)	3,40	11,90	17

× 1,70 ; ÷ 1,70

Pour déterminer le coefficient de proportionnalité, on calcule 3,40 ÷ 2.

7 bouteilles coûtent 11,90 €, et avec 17 €, on peut acheter 10 bouteilles.

En utilisant le produit en croix

Pour réaliser une douzaine de crêpes, Camille utilise 3 œufs. Pour 20 crêpes, combien lui en faudrait-il ?

$$\frac{12 \text{ crêpes}}{20 \text{ crêpes}} \quad \frac{3 \text{ œufs}}{3 \times 20 \div 12 = 5}$$

Il lui faudrait donc 5 œufs.

Reconnaître la proportionnalité

Léo fait 3 fois le plein de son scooter et note les prix :

Quantité d'essence (en L)	6	4	9
Prix (en €)	7,80	5,20	11,70

$\frac{7,80}{6} = 1,30$; $\frac{5,20}{4} = 1,30$; $\frac{11,70}{9} = 1,30$

Tous les quotients sont égaux, donc la quantité d'essence et le prix sont proportionnels.

Grandeurs quotients

- **Calculer une vitesse**

Émilie parcourt 50 km en 2 heures avec son scooter. Sa vitesse moyenne est de :

$$v = \frac{d}{t} = \frac{50}{2} = 25 \text{ km/h}.$$

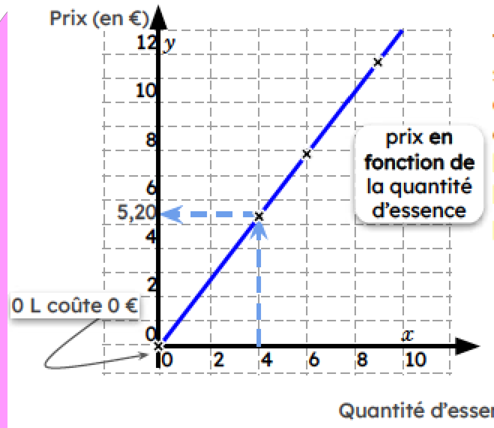
- **Convertir une vitesse en m/s**

$$25 \text{ km/h} = \frac{25 \text{ km}}{1 \text{ h}} = \frac{25\,000 \text{ m}}{3\,600 \text{ s}} \approx 7 \text{ m/s}$$

- **Convertir une vitesse en km/h**

$$10 \text{ m/s} = \frac{10 \text{ m} \times 3600}{1 \text{ s} \times 3600} = \frac{36\,000 \text{ m}}{3\,600 \text{ s}} = \frac{36 \text{ km}}{1 \text{ h}} = 36 \text{ km/h}$$

Représentation graphique



Tous les points sont alignés avec l'origine, donc la quantité et le prix sont proportionnels.

Echelles

Sur une carte à l'échelle 1/75 000, la distance entre St Gilles et Ste Anne est de 72 cm. Déterminer la distance réelle à vol d'oiseau (ligne droite) :

	Échelle	St Gilles – Ste Anne
Distance sur le plan	1	72
Distance réelle	75 000	72 × 75 000 = **5 400 000**

× 75 000

La distance à vol d'oiseaux en km entre Saint-Gilles et Sainte-Anne est donc de 5 400 000 cm, soit 54 km (voir l'étiquette **Conversions** page 14).

Source : https://irem.univ-reunion.fr/IMG/pdf/gs.liaison.cycle4-seconde_1__compressed.pdf

Pourcentages

Calculer un pourcentage

C'est calculer la proportion (fraction) sur 100 !

Dans une classe de 20 élèves, 3 sont gauchers. Quel est le pourcentage de gauchers ?

- $\frac{3}{20} = 3 \div 20 = 0{,}15 = \frac{15}{100} = 15\ \%$

ou

- $\frac{3}{20} \times 100 = 15$: 15 % sont gauchers.

Retrouver la valeur initiale

Après une diminution de 5 %, mon smartphone coûte maintenant 956,65 €. Calculer son prix avant la remise :

Une diminution de 5 % revient à multiplier par 100 % – 5 % = 95 % = 0,95.

Prix × 0,95 = 956,65

Pour retrouver le prix initial, on va donc diviser le prix final par 0,95.

956,65 ÷ 0,95 = 1007

Avant la remise, le prix de mon smartphone était de 1007 €.

Prendre un pourcentage

95 % des 500 élèves du collège ont un téléphone portable, cela représente : $\frac{95}{100} \times 500 = 475$ élèves.

*C'est **multiplier** le nombre par ce pourcentage.*

- Prendre 50%, c'est prendre la moitié.
- Prendre 25%, c'est prendre le quart.
- Prendre 75%, c'est prendre les trois quarts.
- Prendre 100%, c'est prendre la totalité.
- Prendre 200 %, c'est prendre le double.

Augmenter ou réduire d'un pourcentage

Une robe à 49 € est soldée à -30 %.
Quel est le prix soldé de cette robe ?

Montant de la remise : $\frac{30}{100} \times 49 = 14{,}70$ €.

Prix soldé : 49 € – 14,70 € = 34,30 €.

Pourcentages successifs

⚠ Diminuer deux fois un prix de 10 % ne revient pas à baisser le prix de 20 % !

Vérifions avec un article à 100 € :

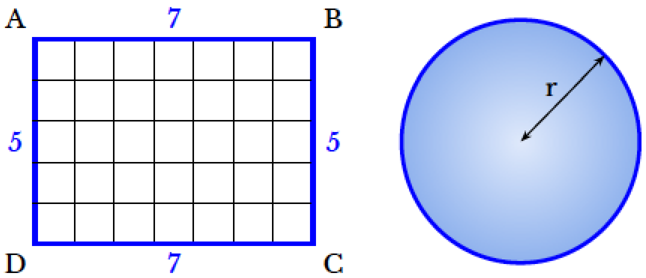
- 2 baisses de 10 % → 100 × 0,9 × 0,9 € = 81 €
- 1 baisse de 20 % → 100 × 0,8 € = 80 €.

Source : https://irem.univ-reunion.fr/IMG/pdf/gs.liaison.cycle4-seconde_1__compressed.pdf

Périmètres Aires Volumes

Périmètres et aires

Le périmètre est la mesure du tour de la figure.
L'aire est la mesure de la surface de la figure.



P_{ABCD} = 7 cm + 5 cm + 7 cm + 5 cm = 24 cm

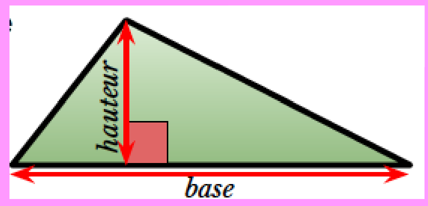
A_{ABCD} = 7 cm × 5 cm = 35 cm²

Le périmètre d'un cercle de rayon r = 3 cm est :
$P = 2 \times \pi \times$ r cm $= 2\pi \times 3$ cm $= 6\pi$ cm ≈ 18,8 cm.

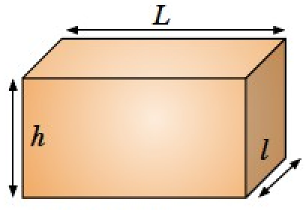
L'aire d'un disque de rayon r = 3 cm est :
$A = \pi \times r \times r$ cm² $= \pi \times 3^2$ cm² $= 9\pi$ cm² ≈ 28,3 cm².

Aire d'un triangle

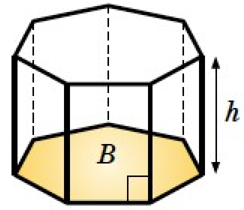
$$A_{Triangle} = \frac{b \times h}{2}$$



Les volumes

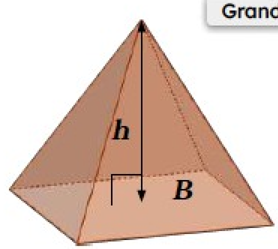


Pavé droit
$V = L \times l \times h$

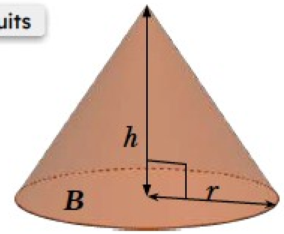


Prisme droit
$V = Aire_{Base} \times h$

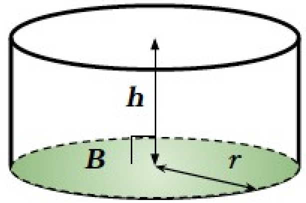
Grandeurs produits



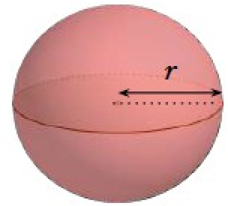
Pyramide
$V = \frac{1}{3} \times B \times h$



Cône
$V = \frac{1}{3} \times \pi \times r^2 \times h$



Cylindre
$V = \pi \times r^2 \times h$



Aire sphère
$A = 4 \times \pi \times r^2$

Volume Boule
$V = \frac{4}{3} \times \pi \times r^3$

Conversions

1 min = 60 s
1 m = 100 cm
1 L = 1 dm³ = 1 000 cm³

1 h = 60 min = 3 600 s
1 km = 1 000 m
1 m³ = 1 000 L

Convertir des aires

km²	hm²	dam²	m²	dm²	cm²	mm²
		3	6 2	4 3	0 0	

36 243 dm² = 3 624 300 cm²

Convertir des longueurs

km	hm	dam	m	dm	cm	mm
	5	7	4,	3		

5 743 dm = 574,3 m

Convertir des volumes

km³	hm³	dam³	m³	dm³	cm³	mm³
			0,	0 8 6		

86 dm³ = 0,086 m³

Source : https://irem.univ-reunion.fr/IMG/pdf/gs.liaison.cycle4-seconde_1__compressed.pdf

Statistiques
* Effectifs et fréquences
* Calculer une moyenne simple
* Calculer une moyenne pondérée
* Déterminer une médiane
* Calculer une étendue
* Utiliser un tableur

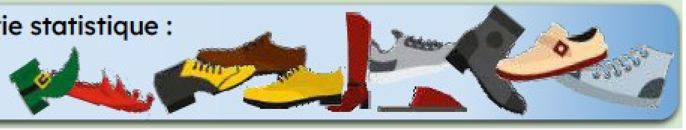
Statistiques et probabilités

Probabilités
* Vocabulaire des probabilités (1)
* Dénombrer des issues
* Calculer une probabilité
* Vocabulaire des probabilités (2)
* Arbre des possibles

Source : https://irem.univ-reunion.fr/IMG/pdf/gs.liaison.cycle4-seconde_1__compressed.pdf

Voici les 13 pointures des filles d'une classe sous forme de série statistique :

39 ; 36 ; 38 ; 41 ; 37 ; 38 ; 37 ; 39 ; 36 ; 39 ; 40 ; 37 ; 39.



Statistiques

Effectifs et fréquences

- L'effectif des filles qui chaussent du 37 est de 3.
- L'effectif total est de 13.
- La fréquence des filles qui chaussent du 37 est :

$f = \frac{3}{13} \approx 0{,}23$ soit environ 23% des filles.

"On compte 3 fois la pointure 38 sur les 13 réponses données."

Calculer une moyenne simple

$$M = \frac{36 + 36 + 37 + 37 + 37 + ... + 41}{13} = \frac{496}{13} \approx 38{,}2$$

Calculer une moyenne pondérée

On affecte des coefficients à chaque pointure :

$$M = \frac{36\times2 + 37\times3 + 38\times2 + 39\times4 + ... + 41\times1}{13} = \frac{496}{13} \approx 38{,}2$$

Calculer une étendue

Étendue = valeur maximale – valeur minimale

L'**étendue** de cette série est : 41 – 36 = 5.

Déterminer une médiane

Il y a 13 valeurs à ranger dans l'ordre croissant :

$\underbrace{36 ; 36 ; 37 ; 37 ; 37 ; 38}_{} ; 38 ; \underbrace{39 ; 39 ; 39 ; 39 ; 40 ; 41}_{}$.

6 valeurs dans chaque série

La **médiane,** qui partage la série en deux groupes de même effectif, est la 7e valeur, soit 38.

Interprétation : Il y a autant d'élèves qui chaussent du 38 ou moins, que d'élèves qui chaussent du 38 ou plus.

Si la médiane se trouve entre deux valeurs, on prend la moyenne de ces deux valeurs.

Utiliser un tableur

H2 fx =SOMME(B2:G2)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Pointures	36	37	38	39	40	41	Total	
2	Effectifs	2	3	2	4	1	1	13	
3									

La formule qui donne la somme des effectifs en H2 est :

`= SOMME(B2:G2)` ou
`= B2 + C2 + D2 + E2 + F2 + G2`

Source : https://irem.univ-reunion.fr/IMG/pdf/gs.liaison.cycle4-seconde_1__compressed.pdf

Une probabilité est un nombre toujours compris entre 0 et 1.

Probabilités

Vocabulaire des probabilités (1)

Expérience aléatoire : expérience liée au hasard.
Issue : résultat possible d'une expérience aléatoire.
Événement : constitué d'une ou plusieurs issues d'une expérience aléatoire.

Calculer une probabilité

$$Probabilité = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

Dans un jeu de 32 cartes,

- Probabilité de tirer un roi :

$$P(Roi) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8} = 0{,}125 = \frac{12{,}5}{100} = 12{,}5\%$$

Dans un sac, il y a 10 boules rouges numérotées de 1 à 10, et 6 boules noires numérotées de 1 à 6. On tire sans regarder une boule du sac.

- Probabilité de tirer une boule rouge :

$$P(Rouge) = \frac{10}{16} = \frac{5}{8} = 0{,}625 = \frac{62{,}5}{100} = 62{,}5\%$$

On a 5 chances sur 8 de tirer une boule rouge ou 62,5%.

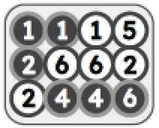
- Probabilité de tirer une boule numérotée 5 :

$$P(5) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8} = 0{,}125 = \frac{12{,}5}{100} = 12{,}5\%$$

Dénombrer des issues

Dans une expérience aléatoire, il faut pouvoir compter précisément l'ensemble des issues. Si toutes les issues ont les mêmes chances de se réaliser, on dit qu'elles sont **équiprobables**.

On considère une urne contenant des boules blanches ou grises, et numérotées :



Si on s'intéresse à la couleur de la boule, quelles sont les issues possibles ?

Les issues possibles sont "Grise" et "Blanche", elles sont équiprobables !

Issues	*"Grise"*	*"Blanche"*
Probabilité	6/12 = 1/2	6/12 = 1/2

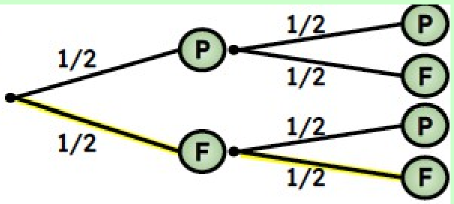
Si on s'intéresse au numéro écrit sur la boule, quelles sont les issues possibles ?

Les issues possibles sont "1", "2", "3", "4", "5" et "6", elles ne sont pas équiprobables !

Issues	*1*	*2*	*4*	*5*	*6*
Probabilité	3/12	3/12	2/12	1/12	3/12

Arbre des possibles

Pour 2 lancers consécutifs d'une pièce (pile ou face) :



Vocabulaire des probabilités (2)

→ Si on s'intéresse au numéro, un **événement certain** de se réaliser est : "*Ne pas tomber sur le numéro 3*".

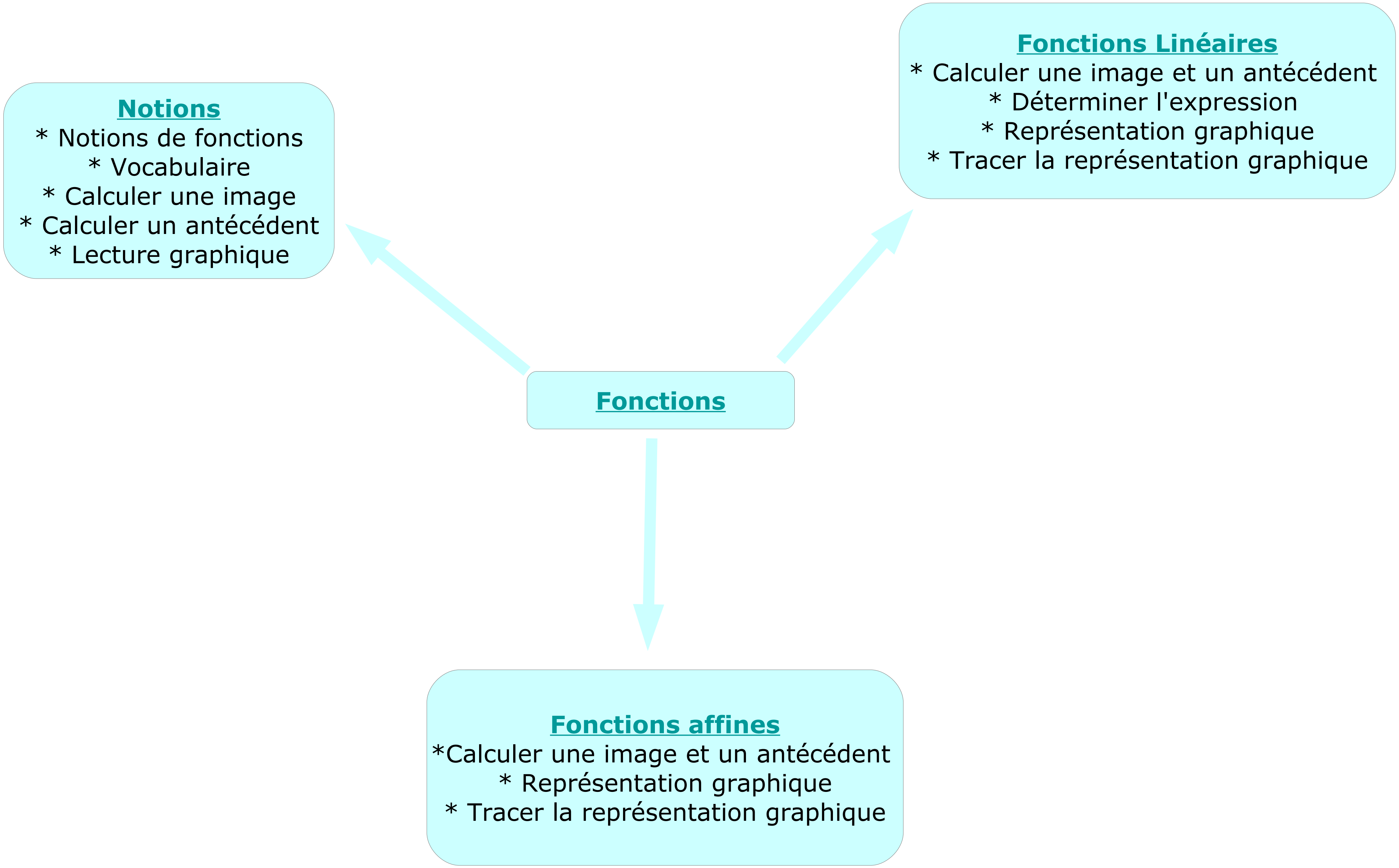
→ Si on s'intéresse à la couleur, un **événement impossible** est : "*Tirer une boule verte*".

→ Deux **événements incompatibles** ne peuvent se réaliser en même temps : "*Tomber sur un numéro pair*" et "*Tomber sur le numéro 5*".

→ **L'événement contraire** *de A, noté* $\bar{A}$, est celui qui se réalise lorsque *A* ne se réalise pas. *A : "Tomber sur un numéro pair"* et $\bar{A}$ *: "Tomber sur un numéro impair"*.

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

Source : https://irem.univ-reunion.fr/IMG/pdf/gs.liaison.cycle4-seconde_1__compressed.pdf



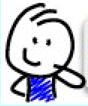
Source : https://irem.univ-reunion.fr/IMG/pdf/gs.liaison.cycle4-seconde_1__compressed.pdf

Vocabulaire

- Nombre de départ
- x
- **un** antécédent
- abscisse

- Nombre d'arrivée
- $f(x)$; y
- **l'**image
- ordonnée

Un **nombre de départ** a une **unique image**. Par contre, un **nombre d'arrivée peut avoir plusieurs antécédents.**



Les fonctions linéaires et constantes sont des cas particuliers de fonctions affines !

- Fonction affine : $f : x \mapsto ax + b$
- Fonction linéaire : $f : x \mapsto ax$
- Fonction constante : $f : x \mapsto b$

a : coefficient directeur
b : ordonnée à l'origine

Notions

Notions de fonction

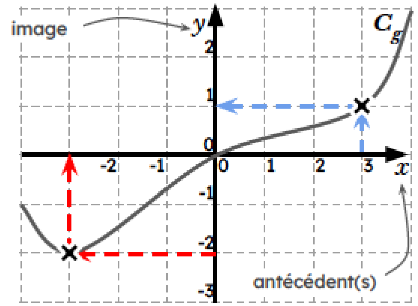
Processus qui permet, à partir d'un nombre de départ, d'obtenir un **unique** nombre d'arrivée.
Si on laisse tomber 3 dans cette machine,
on obtient $3^2 + 7 = 9 + 7 = 16$.
On dit alors que : "3 a pour **image** 16".

Pour un nombre x, on obtient $x^2 + 7$. Appelons cette **fonction** f, on note :

$$f : x \mapsto x^2 + 7$$

se lit : "la fonction f qui à x associe x^2+7".

Lecture graphique

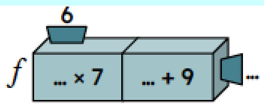


- L'image par g de 3 est 1 : $g(3) = 1$.
- L'antécédent par g de -2 est -3 : $g(-3) = -2$.

Calculer une image

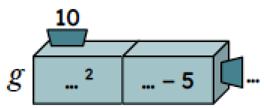
Soit $f : x \mapsto 7x + 9$
Calculer l'image de 6 par f.

- $f(6) = 7{\times}6 + 9 = 42 + 9 = 51$
  donc 6 a pour image 51 par f.



Soit $g : x \mapsto x^2 - 5$
Calculer l'image de 10 par g.

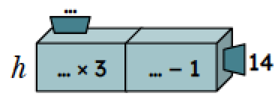
- $g(10) = 10^2 - 5 = 100 - 5 = 95$
  donc 10 a pour image 95 par g.



Calculer un antécédent

Soit $h : x \mapsto 3x - 1$
Déterminer le (ou les) antécédent(s) de 14 par h revient à résoudre l'équation $h(x) = 14$:

$3x - 1 = 14$
$3x - 1 + 1 = 14 + 1$
$3x = 15$
$3x \div 3 = 15 \div 3$
$x = 5$. Donc 14 a pour antécédent 5 par h.



Ici, on peut aussi "remonter la machine" :

- 14 + 1 = 15
- 15 ÷ 3 = 5.

Source : https://irem.univ-reunion.fr/IMG/pdf/gs.liaison.cycle4-seconde_1__compressed.pdf

Calculer une image et un antécédent

Pour calculer une image je REMPLACE par la valeur

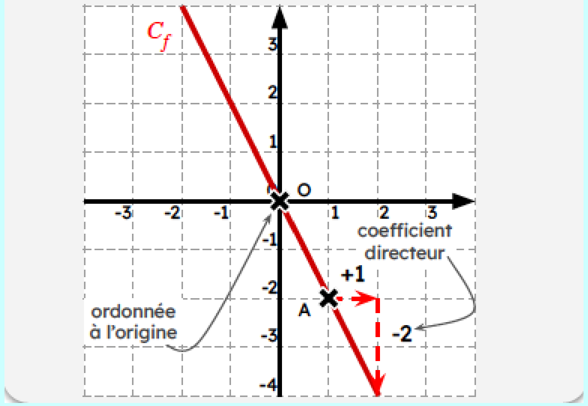
Pour calculer un antécédent je RESOUDS une équation

(Cf page 16)

Fonctions linéaires

Représentation graphique

$f : x \mapsto -2x$ est une fonction linéaire. Sa représentation graphique est une droite qui passe par l'origine O, et par le point A(1 ; -2).



Déterminer l'expression d'une fonction linéaire

Soit une fonction linéaire telle que $f(3)=6$

$$f(x)=ax$$

$$6=a\times 3$$

$$a=\frac{6}{3}=2 \qquad a=\frac{image}{antécédent}$$

D'où $f(x)=2x$

Rédaction

$f(x)=-2x$ est une fonction linéaire.

$f(1)=-2\times 1=-2$

La représentation graphique passe par l'origine du repère et par le point A (1 ; - 2)

Source : https://irem.univ-reunion.fr/IMG/pdf/gs.liaison.cycle4-seconde_1__compressed.pdf

Fonctions affines

Calculer une image et un antécédent

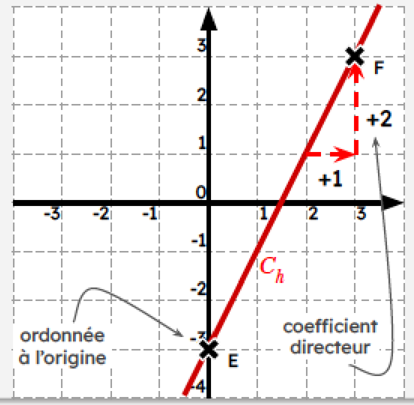
Pour calculer une image je REMPLACE par la valeur

Pour calculer un antécédent je RESOUDS une équation

(Cf page 16)

Représentation graphique

$h : x \mapsto 2x - 3$ est une fonction affine. Sa représentation graphique est une droite, qui passe par les points E(0 ; -3) et F(3 ; 3).



Rédaction

$f(x) = 2x - 3$ est une fonction affine.

$f(0) = 2 \times 0 - 3 = -3$ et $f(3) = 2 \times 3 - 3 = 3$

La représentation graphique passe par les points E (0 ; - 3) et F (3 ; 3)

Source : https://irem.univ-reunion.fr/IMG/pdf/gs.liaison.cycle4-seconde_1__compressed.pdf

Géométrie plane
Géométrie dans l'espace

Triangles et théorèmes
* Triangles particuliers
* Construire un triangle
* Triangles semblables
* Théorème de Pythagore
* Théorème de Thalès
* Trigonométrie

Calculer une longueur
* Avec Pythagore
* Avec Thalès
* Avec la trigonométrie

Calculer un angle
* Avec la trigonométrie
* Avec la règle des 180°

Transformations
* Symétrie axiale
* Symétrie centrale
* Translation
* Rotation
* Homothétie

Quadrilatères
* Parallélogramme
* Rectangle
* Losange
* Carré

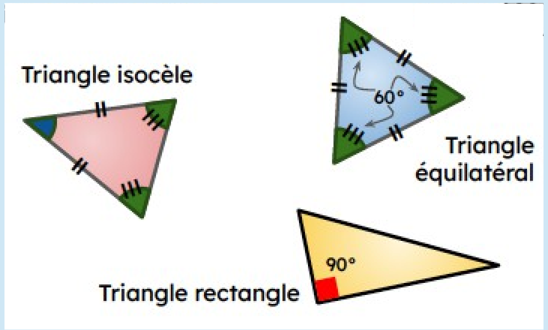
Se repérer
* Se repérer sur une droite graduée
* Se repérer dans le plan
* Se repérer sur une sphère
* Se repérer dans un pavé droit

Démontrer
* Montrer qu'un triangle est rectangle (ou que deux droites sont perpendiculaires)
* Montrer que deux droites sont parallèles

Source : https://irem.univ-reunion.fr/IMG/pdf/gs.liaison.cycle4-seconde_1__compressed.pdf

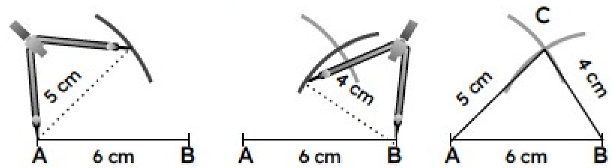
Triangles et théorèmes

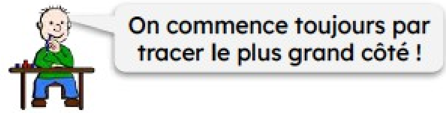
Triangles particuliers



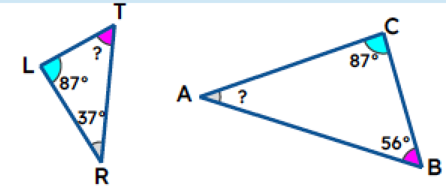
Construire un triangle

Construire un triangle de côtés 6 cm, 4 cm et 5 cm.





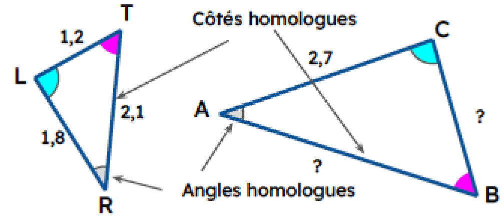
Triangles semblables



- $\widehat{RTL} = 180° - (87° + 37°) = 56°$
- $\widehat{BAC} = 180° - (87° + 56°) = 37°$

➔ Les angles sont égaux deux à deux, donc les triangles sont semblables.

➔ Leurs côtés homologues sont proportionnels, ainsi :



côtés	LT	TR	RL
RTL	1	2	1,8
côtés	BC	AB	AC
ABC	?	?	2,7

$\frac{2,7}{1,8}$ ×1,5

AB = 2×1,5 = 3
BC = 1×1,5 = 1,5

ABC est un agrandissement de RTL de rapport 1,5.

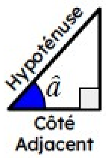
Trigonométrie

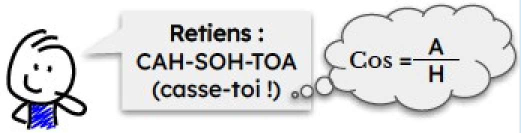
Dans un triangle rectangle, pour un angle aigu $\hat{a}$:

$$\text{Cos}(\hat{a}) = \frac{\text{Côté Adjacent à } \hat{a}}{\text{Hypoténuse}}$$

$$\text{Sin}(\hat{a}) = \frac{\text{Côté Opposé à } \hat{a}}{\text{Hypoténuse}}$$

$$\text{Tan}(\hat{a}) = \frac{\text{Côté Opposé à } \hat{a}}{\text{Côté Adjacent à } \hat{a}}$$





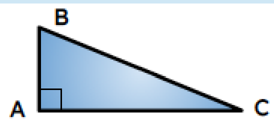
Formules de trigonométrie :

$$\cos^2(\hat{a}) + \sin^2(\hat{a}) = 1$$

$$\tan(\hat{a}) = \frac{\sin(\hat{a})}{\cos(\hat{a})}$$

⚠ avec $\hat{a} \neq 90°$

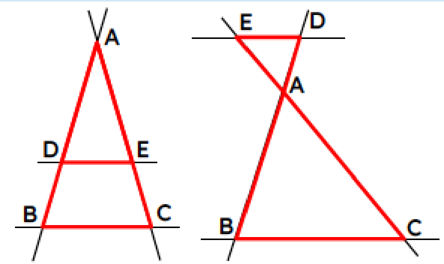
Théorème de Pythagore



Dans un triangle rectangle, le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des côtés de l'angle droit.

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

Théorème de Thalès

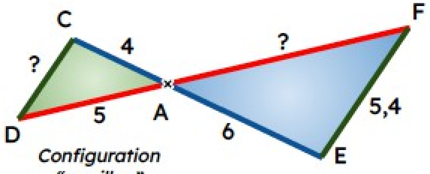


Si $\begin{cases} (BC) \mathbin{//} (DE) \\ (DB) \text{ et } (EC) \text{ sécantes en A, alors } \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}. \end{cases}$

Source : https://irem.univ-reunion.fr/IMG/pdf/gs.liaison.cycle4-seconde_1__compressed.pdf

Calculer une longueur

Avec Thalès



Configuration "papillon"

RÉDACTION

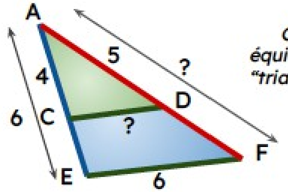
Les droites (CE et (DF) sont sécantes en A , de plus les droites (CD) et (EF) sont parallèles, donc d'après le théorème de Thalès :

on a : $\dfrac{AC}{AE} = \dfrac{AD}{AF} = \dfrac{CD}{EF}$

soit : $\dfrac{4}{6} = \dfrac{5}{AF} = \dfrac{CD}{5,4}$

$AF = \dfrac{6 \times 5}{4}$ cm $= \dfrac{30}{4}$ cm = 7,5 cm

et $CD = \dfrac{4 \times 5,4}{6}$ cm $= \dfrac{21,6}{6}$ cm = 3,6 cm.



Configuration équivalente, avec les "triangles emboîtés".

Avec la trigonométrie

Soit RTL un triangle rectangle en R tel que RL = 6 cm et $\widehat{RLT}$ = 43°. Déterminer RT à 1 mm près.

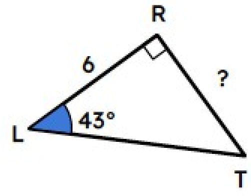
CHECK UP CAH SOH TOA

Côtés concernés :

- ☑ Côté Adjacent
- ☑ Côté Opposé
- ☐ Hypoténuse

J'utilise donc :

- ☐ Cosinus
- ☐ Sinus
- ☑ Tangente



RÉDACTION

Dans le triangle RTL rectangle en R,

on a : $\tan(\widehat{RLT}) = \dfrac{RT}{RL}$

soit : $\dfrac{\tan(43°)}{1} = \dfrac{RT}{6}$

d'où RT = 6 cm × tan 43° ≈ 5,6 cm.

Pour arrondir au 1/10 près, regarde bien les 1/100 : 5,50 < 5,59 < 5,60.

le + proche

Avec Pythagore

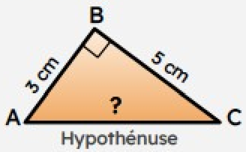
❑ Calculer la longueur de l'hypoténuse

ABC est rectangle en B, donc d'après le théorème de Pythagore, on a :

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

$= 3^2 + 5^2 = 9 + 25 = 34$

d'où $AC = \sqrt{34}$ cm ≈ 5,8 cm (à 1 mm près).



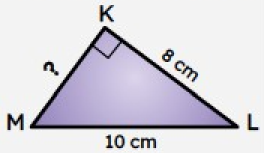
❑ Calculer la longueur d'un côté de l'angle droit

KLM est rectangle en K, donc d'après le théorème de Pythagore, on a :

$KM^2 = ML^2 - KL^2$

$= 10^2 - 8^2 = 100 - 64 = 36$

d'où $KM = \sqrt{36}$ cm = 6 cm.

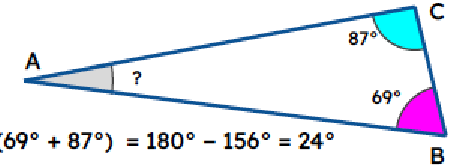


Source : https://irem.univ-reunion.fr/IMG/pdf/gs.liaison.cycle4-seconde_1__compressed.pdf

Calculer un angle

Avec la règle des 180°

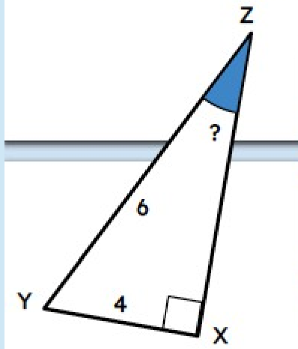
La somme des trois angles d'un triangle est égale à 180°.



$\widehat{ABC} = 180° - (69° + 87°) = 180° - 156° = 24°$

Avec la trigonométrie

Soit XYZ un triangle rectangle en X tel que XY = 4 cm et YZ = 6 cm. Déterminer $\widehat{YZX}$.



CHECK UP CAH SOH TOA

Je connais :
- ☐ Côté Adjacent
- ☑ Côté Opposé
- ☑ Hypoténuse

J'utilise donc :
- ☐ Cosinus
- ☑ Sinus
- ☐ Tangente

Rédaction

Dans le triangle XYZ rectangle en X,

$\sin(\widehat{YZX}) = \dfrac{XY}{YZ} = \dfrac{4}{6}$

d'où $\widehat{YZX} \approx 42°$

Source : https://irem.univ-reunion.fr/IMG/pdf/gs.liaison.cycle4-seconde_1__compressed.pdf

Lecture de la carte

« Si un

QUADRILATERE

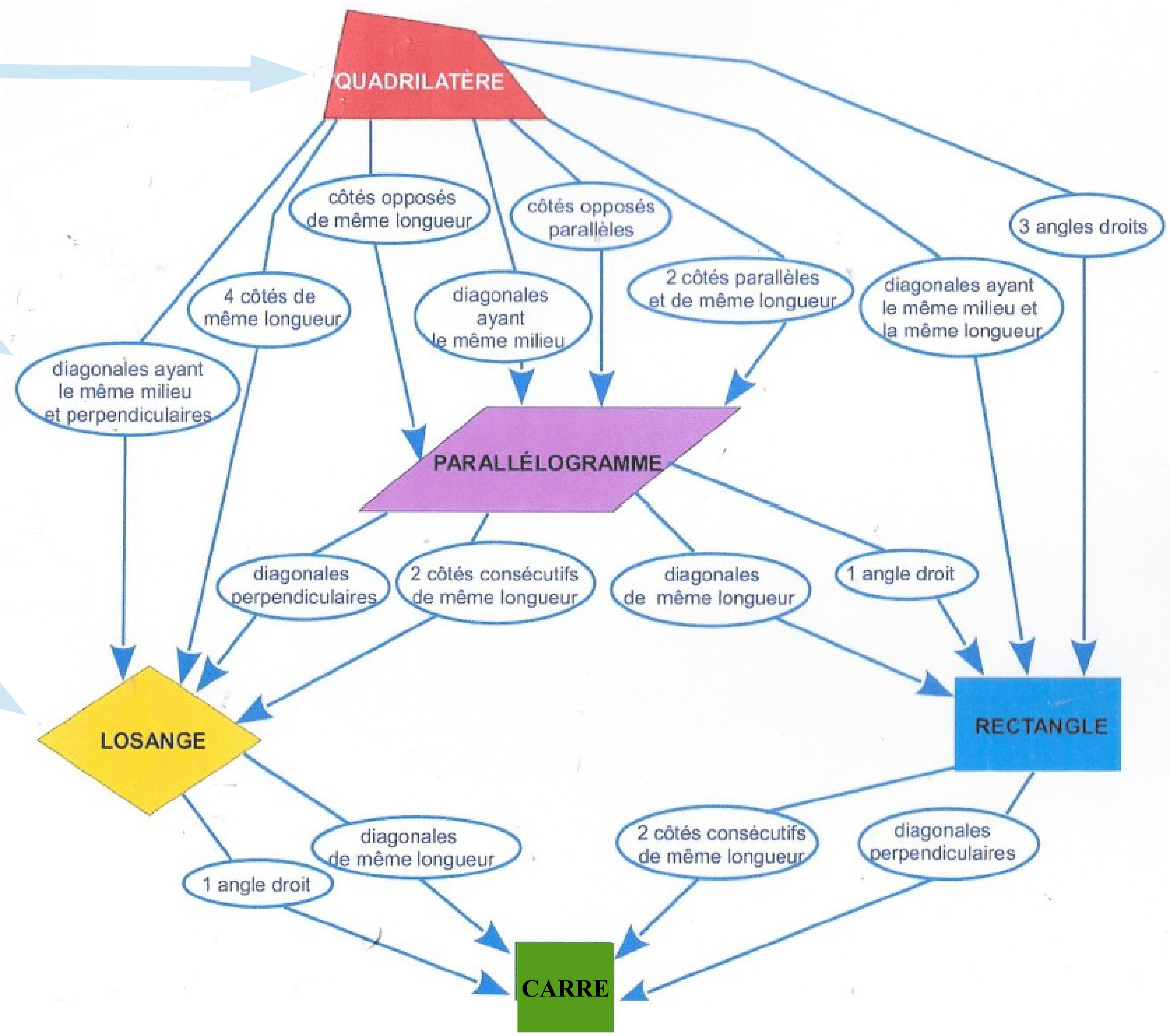
a

ses diagonales ayant le même milieu et perpendiculaires

alors c'est un

LOSANGE

Quadrilatères



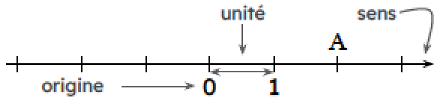
Source : https://irem.univ-reunion.fr/IMG/pdf/gs.liaison.cycle4-seconde_1__compressed.pdf

Se repérer

Se repérer sur une droite graduée

Une droite graduée est une droite sur laquelle on a fixé une origine, un sens et une unité de longueur.

Chaque point est repéré par son abscisse. A est le point d'abscisse 2 : on note **A (2)**.

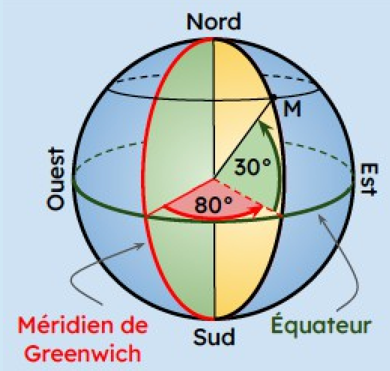


Se repérer sur une sphère

On a besoin de deux coordonnées : la **latitude** et la **longitude**. On assimile la Terre à une sphère.

- → La latitude est comprise entre 0° et 90° Nord ou Sud. Exemple : M a pour latitude 30°N.
- → La longitude est comprise entre 0° et 180° Est ou Ouest. Exemple : M a pour longitude 80°E.

M a pour coordonnées **(30°N ; 80°E)**

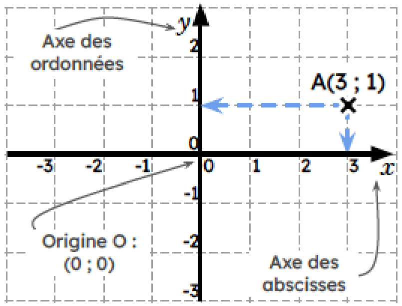


Se repérer dans le plan

Un repère, c'est deux droites graduées qui se coupent à l'origine O.

Chaque point est repéré par deux coordonnées $(x ; y)$: une **abscisse** x (sur l'**axe horizontal**) et une **ordonnée** y (sur l'**axe vertical**).

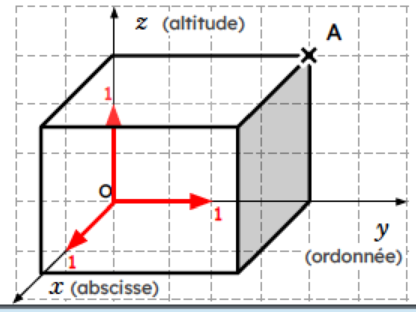
A a pour coordonnées **(3 ; 1)**.



Se repérer dans un pavé droit

Tout point sur un pavé droit est repéré par une abscisse, une ordonnée et une altitude (ou une cote).

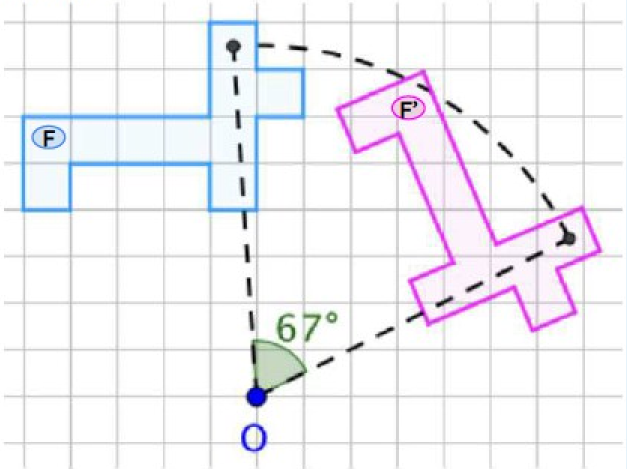
A a pour coordonnées **(0 ; 2 ; 1,5)**.



Source : https://irem.univ-reunion.fr/IMG/pdf/gs.liaison.cycle4-seconde_1__compressed.pdf

Rotation

Transformer une figure par rotation c'est la faire tourner autour d'un point fixe qui est le centre de la rotation.

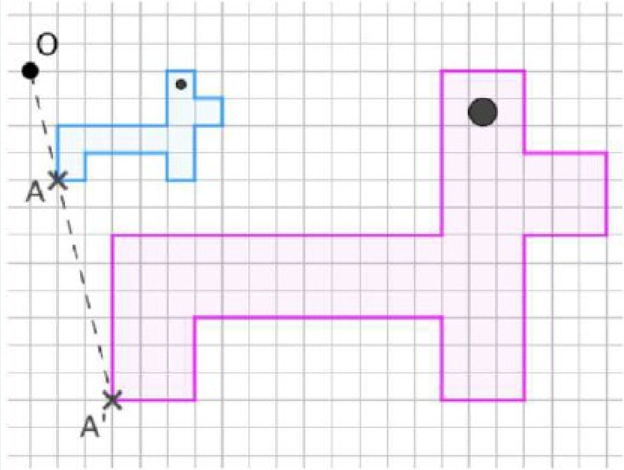


F' est l'image de F par la rotation de centre O et d'angle 67°, dans le sens des aiguilles d'une montre.

Cette rotation est définie par un centre O, un angle de rotation de 67°, et un sens de rotation (ici, le sens des aiguilles d'une montre).

Homothétie

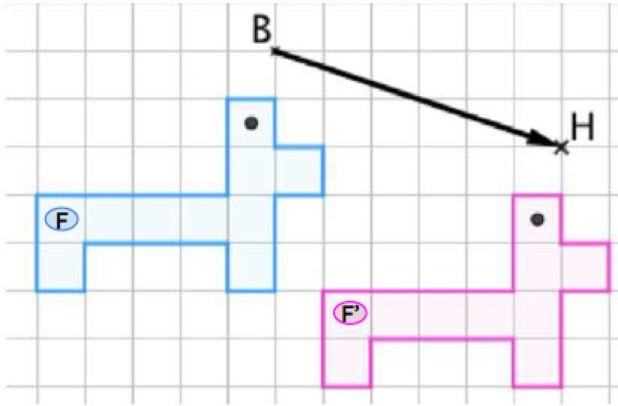
L'homothétie est une transformation qui permet d'agrandir ou de réduire des figures géométriques. On obtient une figure **semblable** (pas identique).



A' est l'image de A par l'homothétie de centre O et de rapport 3.

Translation

Transformer une figure par translation, c'est la faire glisser sans la tourner. Ce **glissement** est défini par une **direction**, un **sens** et une **longueur**. On peut schématiser ce glissement par des flèches.



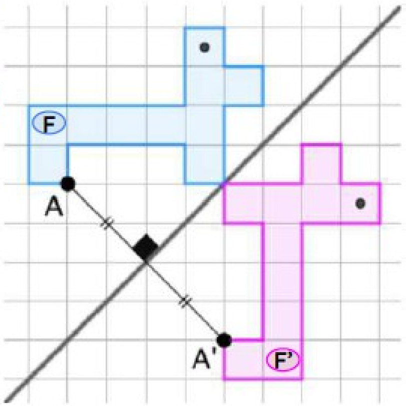
F' est l'image de F par la translation qui transforme B en H.

Transformations

Symétrie axiale

"Pliage selon un axe" :

L'axe de symétrie est la médiatrice de[AA'].



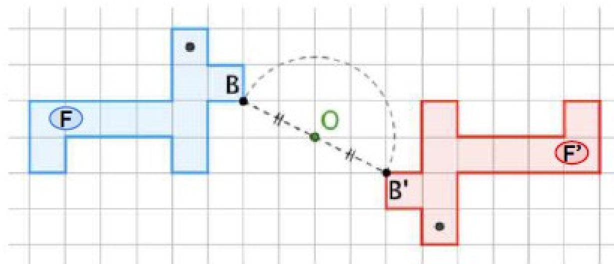
Propriétés

Les symétries centrales et axiales, les rotations et les translations conservent :

- les longueurs ;
- les angles ;
- les aires.

Symétrie centrale

On parle de "demi-tour", avec O milieu de [BB'].



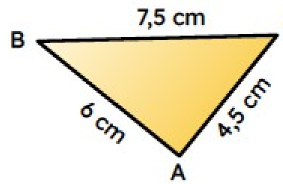
F' est l'image de F par la symétrie centrale de centre O.
(On dit aussi une rotation de 180°.)

Source : https://irem.univ-reunion.fr/IMG/pdf/gs.liaison.cycle4-seconde_1__compressed.pdf

Démontrer

Montrer qu'un triangle est rectangle (ou que deux droites sont perpendiculaires

* Avec le théorème de Pythagore



On commence toujours par calculer le carré du plus grand côté.

D'une part : $BC^2 = 7{,}5^2 = 56{,}25$.

D'autre part : $AB^2 + AC^2 = 6^2 + 4{,}5^2 = 36 + 20{,}25 = 56{,}25$.

$$BC^2 = AB^2 + AC^2.$$

Donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore

ABC est rectangle en A.

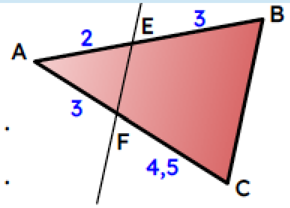
Si l'égalité n'est pas vérifiée, on conclut directement que le triangle n'est pas rectangle.

* Avec les propriétés des droites parallèles et perpendiculaires

« Si deux droites sont parallèles, toute droite perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre »

Montrer que deux droites sont parallèles

* Avec le théorème de Thalès



D'une part : $\dfrac{AE}{AB} = \dfrac{2}{5} = 0{,}4$.

D'autre part : $\dfrac{AF}{AC} = \dfrac{3}{7{,}5} = 0{,}4$.

On constate que $\dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AF}{AC}$, donc l'égalité de Thalès est vérifiée.

De plus les points A, E, B et A, F, C sont alignés dans le même ordre, Donc d'après la réciproque du théorème de Thalès (EF) et (BC) sont parallèles.

Si l'égalité n'est pas vérifiée, on conclut directement que les droites ne sont pas parallèles.

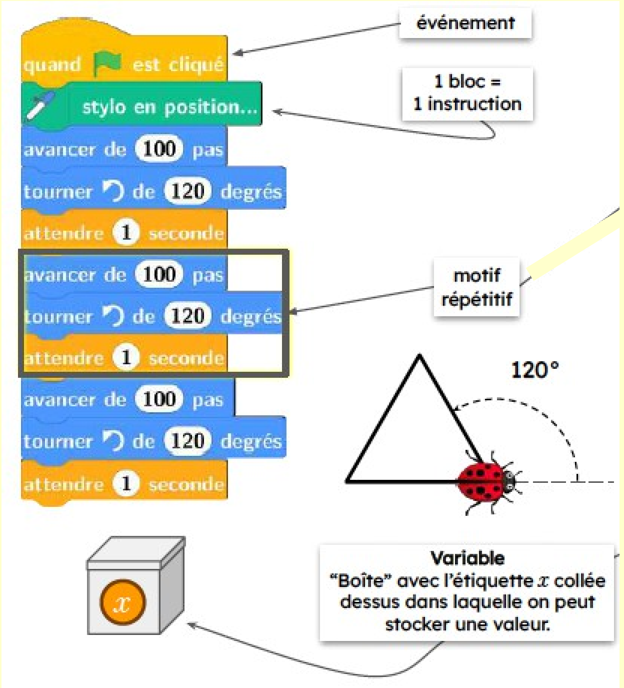
* Avec les propriétés des droites parallèles et perpendiculaires

« Si deux droites sont perpendiculaires à une troisième, alors elles sont parallèles »

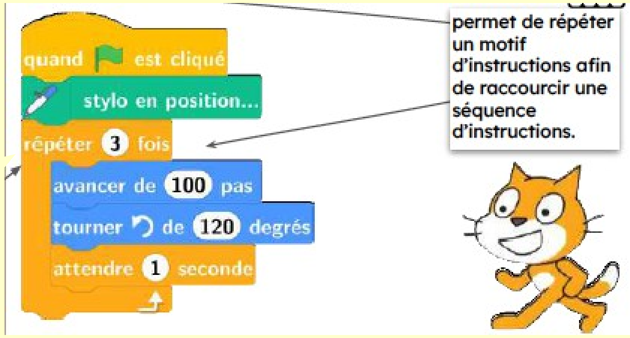
« Si deux droites sont parallèles à une troisième, alors elles sont parallèles. »

Source : https://irem.univ-reunion.fr/IMG/pdf/gs.liaison.cycle4-seconde_1__compressed.pdf

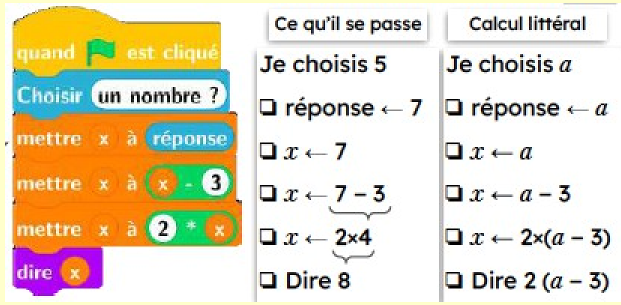
Séquence d'instructions



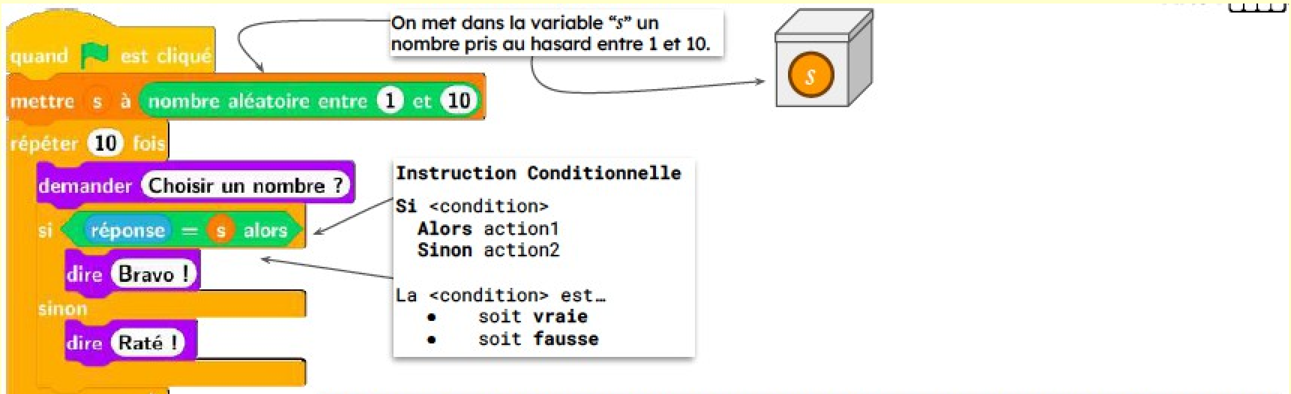
Boucle



Programme de calcul



Instruction conditionnelle



Après avoir stocké une valeur dans la variable s, ce programme demande à l'utilisateur de saisir un nombre et lui répond "Bravo !" si ce nombre est égal à s, et répond "Raté !" sinon. Il recommence ainsi 10 fois de suite…

Algorithme Et programmation

Source : https://irem.univ-reunion.fr/IMG/pdf/gs.liaison.cycle4-seconde_1__compressed.pdf