Chapitre 12 : les équations

Vocabulaire

Une **équation** est une **égalité** qui contient une lettre appelée **inconnue** (celle qui peut apparaître plusieurs fois).

Résoudre une équation, c'est **déterminer** **la valeur** de l'**inconnue** qui vérifie l'égalité ; **cette valeur est appelée solution de l'équation**.

Une équation comprend **deux membres** séparés par le symbole d'**égalité**.

Vérifier la solution d'une équation, c'est **remplacer**, dans l'équation, l'inconnue par la valeur trouvée, **calculer** chacun des deux membres et constater l'égalité.

Méthodes de résolution

① Équations du type x + a = b

Dans une équation, pour neutraliser un terme « gêneur », on ajoute son opposé aux deux membres.

Exemples :

$$-13 \quad \begin{aligned} x + \mathbf{13} &= 20 \\ x &= 20 - 13 \\ x &= 7 \end{aligned} \quad -13$$

$$+7 \quad \begin{aligned} 12 &= x - \mathbf{7} \\ 12 + 7 &= x \\ 19 &= x \end{aligned} \quad +7$$

② Équations du type ax = b et $\frac{x}{a}$ = b

Dans une équation, pour neutraliser un facteur « gêneur » multiplicateur, on divise les deux membres par celui-ci.

Exemples :

$$:6 \quad \begin{aligned} \mathbf{6} \,.\, x &= 24 \\ x &= 24 : 6 \\ x &= 4 \end{aligned} \quad :6$$

$$:(-7) \quad \begin{aligned} \mathbf{-7} \,.\, x &= 23 \\ x &= 23 : (-7) \\ x &= \frac{-23}{7} \end{aligned} \quad :(-7)$$

$$:3 \quad \begin{aligned} \mathbf{3} \,.\, x &= \frac{7}{6} \\ x &= \frac{7}{6} : 3 \\ x &= \frac{7}{18} \end{aligned} \quad :3$$

$$:2 \quad \begin{aligned} -9 &= \mathbf{2} \,.\, x \\ (-9) : 2 &= x \\ \frac{-9}{2} &= x \end{aligned} \quad :2$$

Dans une équation, pour neutraliser un facteur « gêneur » diviseur, on multiplie les deux membres par celui-ci.

Exemples :

$$\frac{x}{12} = 10$$

$$.\,12 \qquad\qquad .\,12$$

$$x = 10\,.\,12$$

$$x = 120$$

$$\frac{-5}{9} = \frac{x}{6}$$

$$.\,6 \qquad\qquad .\,6$$

$$\frac{-5}{9}\,.\,6 = x$$

$$\frac{-10}{3} = x$$

REMARQUE :

Pour résoudre l'équation $\frac{3X}{4} = \frac{5}{7}$, on peut procéder de **deux manières différentes.**

❶ On neutralise le facteur diviseur, puis le facteur multiplicateur en utilisant les règles précédentes.

❷ On transforme l'équation de manière à faire apparaître le coefficient de x, qu'il suffit de neutraliser en divisant les deux membres de l'équation par celui-ci, c'est-à-dire en multipliant les deux membres de l'équation par l'inverse du coefficient de x.

Exemples :

$$\frac{3x}{4} = \frac{5}{7}$$

$$.\,4 \qquad\qquad .\,4$$

$$3\,.\,x = \frac{20}{7}$$

$$:3 \qquad\qquad :3$$

$$x = \frac{20}{21}$$

ou

$$\frac{3x}{4} = \frac{5}{7}$$

$$\frac{3}{4}\,.\,x = \frac{5}{7}$$

$$:\frac{3}{4} \qquad\qquad :\frac{3}{4}$$

$$x = \frac{20}{21}$$

③ Équation du type ax + b = c

Pour résoudre une équation du type $ax + b = c$, on neutralise d'abord le terme « gêneur », puis le facteur « gêneur ».

Exemples :

$$\begin{array}{ccc} & 2x + 8 = 18 & \\ -8 & & -8 \\ & 2x = 18 - 8 & \\ & 2x = 10 & \\ :2 & & :2 \\ & x = 10 : 2 & \\ & x = 5 & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & -5x + 7 = -9 & \\ -7 & & -7 \\ & -5x = -9 - 7 & \\ & -5x = -16 & \\ :(-5) & & :(-5) \\ & x = -16 : (-5) & \\ & x = 3{,}2 & \end{array}$$

④ Équations du type ax + b = cx + d

Pour résoudre une équation du type $ax + b = cx + d$, il faut effectuer des neutralisations successives afin d'obtenir une équation du type $ax = b$.

Exemple :

Tu neutralises d'abord un des deux termes en « x », généralement le plus petit.

$$\begin{array}{ccc} & 5x + 10 = 3x + 4 & \\ -3x & & -3x \\ & 5x - 3x + 10 = +4 & \end{array}$$

Tu neutralises ensuite le terme indépendant de l'autre membre.

$$\begin{array}{ccc} & 2x + 10 = +4 & \\ -10 & & -10 \\ & 2x = 4 - 10 & \end{array}$$

Tu neutralises enfin le facteur multiplicateur gêneur.

$$\begin{array}{ccc} & 2x = -6 & \\ :2 & & :2 \\ & x = -3 & \end{array}$$

Les deux premières neutralisations peuvent se faire en une seule étape.

Tu soulignes le terme en « x » que tu veux neutraliser et le terme indépendant de l'autre membre.

Tu neutralises ces deux termes en une étape.

$$\begin{array}{rcl} 5x \underline{+ 10} & = & \underline{3x} + 4 \\ \scriptstyle{-3x \; -10} & & \scriptstyle{-3x \; -10} \\ 5x - 3x & = & 4 - 10 \end{array}$$

Tu neutralises enfin le facteur multiplicateur gêneur.

$$\begin{array}{rcl} 2x & = & -6 \\ \scriptstyle{:2} & & \scriptstyle{:2} \\ x & = & -3 \end{array}$$

⑤ Équations plus complexes

a) Si au moins un des membres de l'équation comprend plus de deux termes, il est préférable de le réduire avant de résoudre l'équation.

Exemple :

$$\begin{aligned} \underline{3x} + \underline{2 - 1} + \underline{2x} &= \underline{5} - \underline{2x + x} - \underline{1} \\ 5x \underline{+ 1} &= \underline{-x} + 4 \\ 5x + x &= 4 - 1 \\ 6x &= 3 \\ x &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

b) Si l'équation comprend des parenthèses, il faut les faire disparaître

-soit en appliquant les règles de suppression des parenthèses précédées du signe « + » ou du signe « - » ;

-soit en appliquant la distributivité.

Exemple :

$$
\begin{aligned}
8 + 2 \cdot (x - 1) &= 7 - (x + 4) \\
8 + 2x - 2 &= 7 - x - 4 \\
6 + 2x &= 3 - x \\
2x + x &= 3 - 6 \\
3x &= -3 \\
x &= -1
\end{aligned}
$$