

Partie I

- 1) a) L'égalité $A\Delta\emptyset = A$ entraîne l'égalité $d(A, \emptyset) = \text{Card}(A)$ et l'égalité $A\Delta E = \emptyset$ entraîne l'égalité $d(A, E) = 0$
 b) Si A et B sont deux parties quelconques de E , on a alors : $d(A, B) = \text{Card}(A\Delta B) = d(A\Delta B, \emptyset)$

- 2) a)

$y_i \setminus x_i$	0	1
0	0	1
1	1	0

 Les nombres z_i et $|x_i - y_i|$ sont donc égaux.

- b) Si A est représenté par le n -uplet de $\{0, 1\}^n, (x_1, \dots, x_n)$, son cardinal est égal à la somme des x_i .
 On peut donc écrire, si B et C sont représentés respectivement par les n -uplets de $\{0, 1\}^n, (y_1, \dots, y_n)$ et $(z_1, \dots, z_n)$ et en appliquant l'inégalité triangulaire pour les valeurs absolues :

$$d(A, C) = \sum_{i=1}^n |x_i - z_i| = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i + y_i - z_i| \leq \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| + \sum_{i=1}^n |y_i - z_i| = d(A, B) + d(B, C)$$

Partie II

- 1) a) Pour montrer que $\mathcal{C}$ est un code, il suffit de remarquer que les 6 sommes deux à deux des éléments x_1, x_2, x_3, x_4 appartiennent aussi à $\mathcal{C}$.
 b) Puisque x_3 est la somme de x_1 et de x_2 , tout $\varepsilon_1 x_1 + \varepsilon_2 x_2 + \varepsilon_3 x_3 + \varepsilon_4 x_4$ de $\mathcal{C}$ s'écrit aussi $(\varepsilon_1 + \varepsilon_3)x_1 + (\varepsilon_2 + \varepsilon_3)x_2 + \varepsilon_4 x_4$. L'ensemble $\mathcal{C}$ comporte donc huit éléments qui sont :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- c) S'il existait une famille à deux éléments engendrant $\mathcal{C}$, le cardinal de $\mathcal{C}$ serait égal à 4 donc une telle famille n'existe pas.
 d) Supposons qu'il existe des éléments de $\mathbb{K}, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_4$ non tous nuls vérifiant $\varepsilon_1 x_1 + \varepsilon_2 x_2 + \varepsilon_4 x_4 = 0$.
 Si ε_4 est non nul, par exemple, en multipliant les deux membres de l'égalité précédente par ε_4 , il vient : $x_4 = \varepsilon_4 \varepsilon_1 x_1 + \varepsilon_4 \varepsilon_2 x_2$ et cette égalité impliquerait que tout élément de $\mathcal{C}$ s'écrit uniquement en fonction de x_1 et x_2 , ce qui est exclus d'après la question précédente.
 Il en résulte que ε_4 est nul et il en est de même par symétrie des éléments $\varepsilon_1, \varepsilon_2$.

- 2) a) Deux éléments de $\mathbb{K}, x_i$ et y_i sont distincts si et seulement si leur somme est nulle dans $\mathbb{K}$, il en résulte l'égalité : $d(x, y) = d(x + y, 0)$

- b) Si pour un indice i , les éléments de $\mathbb{K}, x_i$ et z_i sont distincts, l'élément y_i est distinct d'au moins un des éléments x_i et z_i donc la contribution de l'indice i à $d(x, z)$ est inférieure ou égale à sa contribution dans la somme $d(x, y) + d(y, z)$, ce qui entraîne l'inégalité : $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

- 3) a) Le cardinal de $\mathcal{C}$ est au plus 2^n donc l'ensemble des cardinaux de familles $\mathbb{K}$ -libres de $\mathcal{C}$ est majoré par 2^n . De plus, un élément non nul de $\mathcal{C}$ forme à lui tout seul un famille $\mathbb{K}$ -libre, puisque $\mathcal{C}$ n'est pas réduit à $\{0\}$, l'ensemble des cardinaux de familles $\mathbb{K}$ -libres de $\mathcal{C}$ n'est pas vide, il contient au moins le nombre 1.
 Toute partie non vide majorée de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément, soit donc p le plus grand élément de l'ensemble des cardinaux de familles $\mathbb{K}$ -libres de $\mathcal{C}$.

Soit alors $(u_1, \dots, u_p)$ une famille libre de cardinal p . Montrons que, pour tout élément x de $\mathcal{C}$, il existe des éléments $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p$ de $\mathbb{K}$ vérifiant $x = \sum_{i=1}^p \varepsilon_i u_i$.

Procédons par contraposée : supposons qu'il existe un élément x de $\mathcal{C}$ ne possédant pas cette propriété et montrons que la famille $(u_1, \dots, u_p, x)$ est libre, ce qui contredit la maximalité de p .

Soit donc un tel x et $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p, \varepsilon$ des éléments de $\mathbb{K}$ vérifiant : $\sum_{i=1}^p \varepsilon_i u_i + \varepsilon x = 0$. Si ε n'est pas nul, en

multipliant les deux membres par ε , cette égalité devient : $x = -\sum_{i=1}^p \varepsilon_i u_i = \sum_{i=1}^p \varepsilon_i u_i$, ce qui est exclus par choix de x .

Il en résulte qu' ε est nul et l'égalité s'écrit : $\sum_{i=1}^p \varepsilon_i u_i = 0$. Puisque la famille $(u_1, \dots, u_p)$ est libre, tous les éléments ε_i sont nuls et la famille $(u_1, \dots, u_p, x)$ est libre.

- b) Soit x un élément de $\mathcal{C}$. On sait déjà qu'il existe des éléments $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p$ de $\mathbb{K}$ vérifiant $x = \sum_{i=1}^p \varepsilon_i u_i$, montrons que ce p -uplet d'éléments de $\mathbb{K}$ est unique.

Soit donc $\varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_p$ des éléments $\mathbb{K}$ vérifiant $x = \sum_{i=1}^p \varepsilon'_i u_i$. en faisant la différence membre à membre des égalités

précédentes, il vient : $\sum_{i=1}^p (\varepsilon'_i - \varepsilon_i) u_i = 0$, ce qui entraîne, puisque la famille $(u_1, \dots, u_p)$ est libre, les égalités :

$$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \varepsilon'_i - \varepsilon_i = 0 \text{ ou encore } \boxed{\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \varepsilon'_i = \varepsilon_i}$$

Soit encore $(u_1, \dots, u_p)$ une $\mathbb{K}$ -base de $\mathcal{C}$, il existe exactement 2^p p -uplets $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ d'éléments de $\mathbb{K}$ et, à chacun de ces p -uplets, est associé un unique élément de $\mathcal{C}$; il en résulte que le cardinal de $\mathcal{C}$ est égal à 2^p .

- c) Si $(u_1, \dots, u_p)$ et $(v_1, \dots, v_q)$ sont deux $\mathbb{K}$ -bases de $\mathcal{C}$, le cardinal de $\mathcal{C}$ est égal à la fois à 2^p et à 2^q donc les nombres p et q sont égaux.

- d) En raisonnant comm en **3**)b, pour chaque p -uplet $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$, l'élément $\sum_{i=1}^p \varepsilon_i v_i$ est distinct des autres donc l'ensemble des éléments de $\mathcal{C}$ qui se mettent sous cette forme est de cardinal 2^p , donc c'est $\mathcal{C}$ tout entier et $(v_1, \dots, v_p)$ est une $\mathbb{K}$ -base de $\mathcal{C}$

- 4) a) La matrice nulle de $\mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ appartient à $\mathcal{C}_Q$ donc cet ensemble n'est pas vide.
De plus, si x et x' sont deux éléments de $\mathcal{C}_Q$, les égalités $Q \times x = O$ et $Q \times x' = O$ entraînent :
 $O = Q \times x + Q \times x' = Q \times (x + x')$ donc $x + x'$ appartient à $\mathcal{C}_Q$.
L'ensemble $\mathcal{C}_Q$ est donc un code.

- b) Notons $q_{i,j}$ les éléments de la matrice Q . Soit σ la permutation sur les indices $\llbracket 1, n \rrbracket$ qui fait glisser les p colonnes de Q égales aux p colonnes distinctes de I_p aux p positions les plus à gauche, autrement dit la matrice Q' dont les éléments sont les $q_{i,\sigma(j)}$ est de la forme $I_p P$, la matrice P étant constituée des $n - p$ colonnes de Q non égales aux colonnes de I_p . On a alors, en utilisant le changement d'indice de sommation $k = \sigma(j)$:

$$Q' \times \begin{pmatrix} x_{\sigma(1)} \\ \vdots \\ x_{\sigma(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n q_{1,\sigma(j)} x_{\sigma(j)} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n q_{p,\sigma(j)} x_{\sigma(j)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n q_{1,k} x_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n q_{p,k} x_k \end{pmatrix} = Q \times \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

- c) Un élément x de $\mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ appartient donc à $\mathcal{C}_Q$ si et seulement si pour tout i de $\llbracket 1, p \rrbracket$, on a :

$$x_{\sigma(i)} + \sum_{j=p+1}^n q_{i,\sigma(j)} x_{\sigma(j)} = 0 \quad \text{ou encore} \quad x_{\sigma(i)} = - \sum_{j=p+1}^n q_{i,\sigma(j)} x_{\sigma(j)} \quad \text{donc les valeurs } x_{\sigma(j)} \text{ pour } j \text{ variant de } p+1 \text{ à } n \text{ déterminent complètement } x.$$

Il en résulte que le cardinal de $\mathcal{C}_Q$ est 2^{n-p} et que chaque base de $\mathcal{C}_Q$ a pour cardinal $n - p$.

- d) Les colonnes $C_1, \dots, C_{n-p}$ de la matrice $\begin{pmatrix} I_{n-p} \\ B \end{pmatrix}$ forment une famille libre car si $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-p}$ est un élément

de $\mathbb{K}^{n-p}$ vérifiant $\sum_{i=1}^{n-p} \lambda_i C_i = O$, il en résulte l'égalité matricielle $I_{n-p} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_{n-p} \end{pmatrix} = O$ qui a pour seule solution

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_{n-p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

De plus en utilisant la technique du produit matriciel par bloc, il vient : $\begin{pmatrix} B & I_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{n-p} \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B+B \\ B+B \end{pmatrix} = O$ puisque, tout élément x de $\mathbb{K}$ vérifie $x + x = 0$.

Il en résulte, pour tout i de $\llbracket 1, n-p \rrbracket$, l'égalité $\begin{pmatrix} B & I_p \end{pmatrix} C_i = O$, ce qui prouve que les éléments $C_1, \dots, C_{n-p}$ appartiennent à $\mathcal{C}_Q$.

Ils forment une famille libre de cardinal $n - p$ de $\mathcal{C}_Q$ d'après la question **3**)d, c'est donc une base de $\mathcal{C}_Q$.

- e) Soit $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un élément de $\mathcal{C}_Q$ et $i_1, \dots, i_m$ les indices i de $\llbracket 1, n \rrbracket$ tels que x_i n'est pas nul (c'est-à-dire est égal à 1). En notant $C_1, \dots, C_p$ les colonnes de Q , l'égalité $Q \times x = O$ s'écrit aussi $x_{i_1} C_{i_1} + \dots + x_{i_m} C_{i_m} = O$

et elle n'est possible que si m est strictement supérieur à $r - 1$ puisque toute famille de colonnes de Q de cardinal strictement inférieur à r est $\mathbb{K}$ -libre.

Il en résulte l'inégalité : $\min\{d(x, O), x \in \mathcal{C}_Q \setminus \{O\}\} \geq r$.

Notons maintenant $C_{i_1}, \dots, C_{i_r}$ une famille liée de colonnes de Q et $\varepsilon_{i_1}, \dots, \varepsilon_{i_r}$ les éléments de $\mathbb{K}$ vérifiant $\varepsilon_{i_1} C_{i_1} + \dots + \varepsilon_{i_r} C_{i_r} = O$. Les éléments $\varepsilon_{i_1}, \dots, \varepsilon_{i_r}$ sont tous égaux à 1 (la nullité de l'un ou de plusieurs d'entre eux entraînerait la nullité de tous puisque toute famille formée d'au plus $r - 1$ colonnes de Q est libre) et si x est la matrice-colonne dont les éléments sont $\varepsilon_{i_1}, \dots, \varepsilon_{i_r}$, on a : $d(x, O) = r$

il en résulte : $r = \min\{d(x, O), x \in \mathcal{C}_Q \setminus \{O\}\}$

Partie III

1) Parmi les n éléments non nuls de $\mathbb{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ figurent les p colonnes de I_p , il résulte alors de la question 4)c que le cardinal d'une des bases de $\mathcal{C}_H$ est $n - p$.

2) Remarquons d'abord que l'on a : $\min\{d(x, O), x \in \mathcal{C}_Q \setminus \{O\}\} = \min\{d(u, v), (u, v) \in \mathcal{C}_Q^2 \text{ et } u \neq v\}$.

De plus, si x et y sont deux éléments distincts non nuls de $\mathbb{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, il existe un indice i de $\llbracket 1, p \rrbracket$ tel que x_i soit égal à 1 et y_i à 0 et un autre indice j tel que y_j soit égal à 1. Si λ et μ sont deux éléments de $\mathbb{K}$ vérifiant $\lambda x + \mu y = 0$, les égalités $\lambda x_i + \mu y_i = 0$ et $\lambda x_j + \mu y_j = 0$ entraînent la nullité de λ et μ .

Autrement dit, toute famille à deux éléments formée de colonnes de H est libre. Par ailleurs, si x et y sont deux éléments distincts non nuls de $\mathbb{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, $z = x + y$ est encore un élément non nul de $\mathbb{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ et la relation $x + y + z = 0$ prouve qu'il existe une famille liée de cardinal 3 formée de colonnes de H . Il résulte alors de la question 4)e de la

Partie II. que l'on a : $3 = \min\{d(u, v), (u, v) \in \mathcal{C}_Q^2 \text{ et } u \neq v\}$

3) Soit v un élément de $\mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

a) L'ensemble B_v contient v et les éléments de $\mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ qui diffèrent de v par une seule composante. Cette composante peut avoir n indices donc le cardinal de B_v est $n + 1$.

b) Soit w un élément de $\mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ distinct de v . Si u appartient à $B_v \cap B_w$, on a : $d(v, w) \leq d(v, u) + d(u, w) = 2$, ce qui est incompatible avec le résultat de la question 2) donc $B_v \cap B_w = \emptyset$

c) L'inclusion $\bigcup_{v \in \mathcal{C}_H} B_v \subset \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est évidente. prouvons que les cardinaux de ces deux ensembles sont égaux.

Puisque les ensembles B_v , pour tous les éléments v de $\mathcal{C}_H$, sont disjoints, le cardinal de leur réunion est égal à : $\text{card } \mathcal{C}_H \times (n + 1) = 2^{n-p} \times 2^p = 2^n = \text{card } \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. On a donc prouvé l'égalité : $\bigcup_{v \in \mathcal{C}_H} B_v = \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{K})$

4) a) D'après la question précédente, il existe un unique b dans $\mathcal{C}_H$ tel que B_b contienne z . Puisque z n'appartient pas à $\mathcal{C}_H$, ce b est distinct de z et donc vérifie $d(z, b) = 1$.

b) L'égalité $H \times z = H \times e$ est équivalente à l'égalité $H \times (z + e) = 0$ et donc à l'appartenance de $z + e$ à $\mathcal{C}_H$. De plus l'égalité $d(e, O) = 1$ est équivalente à l'égalité $d(z, e) = 1$: en posant $e = z + v = z - v$, l'existence de e est équivalente à celle de l'élément v qui a été prouvée dans la question précédente et on a : $\Phi(z) = z + e$

5) a) La matrice H_1 est un cas particulier de la matrice Q décrite dans la question 4)d de la **Partie II.**, en prenant

$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Les transposées des lignes de la matrices H_1 sont des éléments de $\mathbb{M}_{7,1}(\mathbb{K})$ qui forment

donc une $\mathbb{K}$ -base de $\mathcal{C}_{H_1}$: ce sont les éléments c_4, c_3, c_2, c_1 prévus par l'énoncé.

b) L'élément y appartient à $\mathcal{C}_{H_1}$ et il vérifie $d(y, y^*) = 1$, c'est donc $\Phi(y^*)$.

Cherchons donc l'unique élément e de $\mathbb{M}_{7,1}(\mathbb{K})$ vérifiant $H_1 \times y^* = H_1 \times e$ et $d(e, O) = 1$:

$$H_1 \times y^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Autrement dit : } e = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } y = y^* + e = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ ce qui donne : } \begin{cases} \eta_1 = 0 \\ \eta_2 = 1 \\ \eta_3 = 1 \\ \eta_4 = 0 \end{cases}$$

- c) S'il y a deux erreurs, le calcul $H_1 \times z^*$ ne donne pas 0 puisque, si e est un élément de $\mathbb{M}_{7,1}(\mathbb{K})$ comportant exactement deux 1, $H_1 \times e$ ne peut donner O (car dans la matrice H_1 , pour tout couple (i, j) vérifiant $1 \leq i < j \leq 7$, les éléments des colonnes i et j ne peuvent être égaux à la fois sur chacune des lignes). On constate donc qu'il y a des erreurs. De plus, e peut prendre 21 valeurs alors que $H_1 \times e$ n'en prend que 7 au plus : il en résulte qu'il y a plusieurs e possibles pour une valeur de $H_1 \times e$ et on ne peut déterminer exactement où sont ces erreurs.

Partie IV

- 1) Pour tout entier k de $\llbracket 1, n \rrbracket$, les coefficients de l'écriture en base 2 du nombre k forment donc la k -ième colonne de la matrice H_2 . Comme précédemment, on cherche l'unique e possédant un seul coefficient égal à 1 vérifiant

$$H_2 \times e = H_2 \times y^* = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}. \text{ Cette matrice-colonne n'est pas nulle puisque } y \text{ appartient à } \mathcal{C}(H_2) \text{ et que } y^* \text{ ne diffère de } y \text{ que par un élément. Les colonnes de la matrice } H_2 \text{ sont tous les éléments non nuls de } \mathbb{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \text{ donc l'élément}$$

e de $\mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est l'unique colonne de H_2 égale à $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$. Si k est la position de cette colonne, c'est aussi la place de l'erreur et les éléments de la colonne sont les coefficients de l'écriture en base 2 du nombre k .

- 2) a) La matrice H_2 est la matrice : $H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Le calcul de $H_2 \times d_1, H_2 \times d_2, H_2 \times d_3, H_2 \times d_4$ donne O donc d_1, d_2, d_3, d_4 appartiennent à $\mathcal{C}_{H_2}$.

Les éléments d_1, d_2, d_3, d_4 forment une famille libre car, en prenant seulement les 4 premières lignes, une égalité $\sum_{i=1}^4 \varepsilon_i d_i = 0$, conduit aux égalités : $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = 0$. De plus, le cardinal d'une base de $\mathcal{C}_{H_2}$ est encore 4 comme précédemment, ce qui assure que d_1, d_2, d_3, d_4 forment une $\mathbb{K}$ -base de $\mathcal{C}_{H_2}$.

b) Dans ce cas particulier, on a : $x^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, y^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, z^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, H_2 \times x^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $x' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, x_1 =$

$1, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 0$ et $\boxed{x=3}$; $H_2 \times y^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $y' = y^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, y_1 = 1, y_2 = 0, y_3 = 0, y_4 = 0$

et $\boxed{y=1}$; $H_2 \times z^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, z_1 = 0, z_2 = 0, z_3 = 1, z_4 = 0$ et $\boxed{z=4}$

Les deux mathématiciens semblent sur le point de découvrir le nombre $100 \times \pi$.

- c) Supposons que les chiffres réceptionnés par S soient stockés dans un tableau R de 21 cases, par exemple. On place les 7 premières cases dans un tableau X de 7 cases et on effectue la procédure suivante : on calcule la matrice $C = H_2 \times X$ (en supposant H_2 stockée dans un tableau indexé par $\llbracket 1, 3 \rrbracket \times \llbracket 1, 7 \rrbracket$) qui sera stocké dans un tableau de 3 cases, on compare le contenu de C avec les colonnes de H_2 et, si k est le numéro de la colonne

égale à C , on change l'élément d'indice k de X puis on calcule la somme $\sum_{i=1}^4 x_i 2^i$ à l'aide d'une boucle « FOR »,

enfin on affiche ou on stocke le résultat obtenu dans la première case d'un tableau.

On remplace ensuite les éléments de X par les 7 éléments suivants du tableau R , on effectue la procédure et on stocke le résultat obtenu dans la deuxième case d'un tableau. Enfin on recommence avec les dernières cases du tableau R . Yapuka...