Sciences et Technologies de l'Agronomie et du Vivant
Métropole–Antilles–Guyane–Réunion juin 2013 Correction

Exercice 1 **5 points**

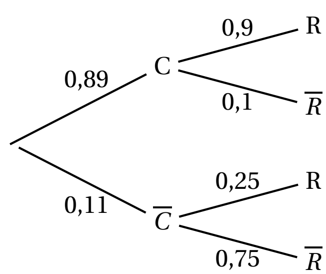
Une enquête est réalisée auprès de touristes étrangers ayant séjourné dans une région française sur leur consommation de produits du terroir. Les résultats sont les suivants :

- 89 % des touristes ont consommé des produits du terroir pendant leur séjour en France et, parmi ceux-ci, 90 % en ont acheté pour ramener dans leur pays ;
- 25 % des touristes qui n'en n'ont pas consommé pendant leur séjour, en ont malgré tout acheté pour ramener dans leur pays.

On interroge au hasard un de ces touristes.
On désigne par :
C l'événement : « Le touriste a consommé des produits du terroir pendant son séjour en France » ;
R l'événement : « Le touriste a acheté des produits du terroir pour ramener dans son pays ».

1. $p(C) = 0{,}89$ car 89 % des touristes ont consommé des produits du terroir pendant leur séjour.
$p_C(R) = 0{,}9$ car parmi ceux-ci, 90 % en ont acheté pour ramener dans leur pays.
$p\left(\overline{C} \cap R\right) = 0{,}25$ car 25 % des touristes en ont malgré tout acheté pour ramener dans leur pays.

2. Construisons un arbre de probabilités décrivant cette situation en précisant les valeurs des probabilités sur chaque branche.



3. **a.** Calculons $p(C \cap R)$ et $p\left(\overline{C} \cap R\right)$.
$p(C \cap R) = p(C) \times p_C(R) = 0{,}89 \times 0{,}9 = 0{,}801$.
$p\left(\overline{C} \cap R\right) = p(\overline{C}) \times p_{\overline{C}}(R) = 0{,}11 \times 0{,}25 = 0{,}027\,5$.

b. La probabilité que le touriste ramène des produits du terroir dans son pays est $p(R)$.
$p(R) = p(C \cap R) + p\left(\overline{C} \cap R\right) = 0{,}801 + 0{,}027\,5 = 0{,}828\,5$.

4. Les événements R et C sont indépendants si $p(C \cap R) = p(C) \times p(R)$.
$p(C \cap R) = 0{,}89 \quad p(C) \times p(R) = 0{,}89 \times 0{,}828\,5 = 0{,}737$.
Les événements ne sont pas indépendants

Exercice 2 QCM **4 points**

Pour chaque question, une et une seule des trois réponses proposées est exacte.
Cocher la bonne réponse. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte 1 *point. Une réponse inexacte enlève* 0,5 *point.*
L'absence de réponse n'enlève et n'ajoute pas de point.
Si le total des points est négatif, la note attribuée à l'exercice est 0.

Une urne contient 30 boules rouges et 20 boules vertes indiscernables au toucher. On prélève successivement et avec remise 4 boules de cette urne. On note X la variable aléatoire égale au nombre de boules vertes obtenues après les quatre tirages.

1. X suit une loi binomiale de paramètres :

☑ $n = 4$ et $p = \dfrac{2}{5}$ ☐ $n = 4$ et $p = \dfrac{3}{5}$ ☐ $n = 50$ et p=$\dfrac{2}{5}$

répétition de 4 épreuves et la probabilité d'obtenir une boule verte est $\frac{20}{50}$.

2. La probabilité $P(\text{X} = 2)$ est égale à :

☐ $\left(\dfrac{2}{5}\right)^2$ ☐ $\left(\dfrac{2}{5}\right)^2 \left(\dfrac{3}{5}\right)^2$ ☑ $6 \times \left(\dfrac{2}{5}\right)^2 \times \left(\dfrac{3}{5}\right)^2$

$p(\text{X} = 2) = \binom{4}{2} \left(\frac{2}{5}\right)^2 \times \left(\frac{3}{5}\right)^{4-2}$

3. La probabilité $P(\text{X} \leqslant 1)$ est égale à :

☐ 0,129 6 ☐ 0,345 6 ☑ 0,475 2

$p(\text{X} = 0) = 0{,}1296 \quad p(\text{X} = 1) = 0{,}3456 \quad p(\text{X} \leqslant 1) = p(\text{X} = 0) + p(\text{X} = 1)$.

4. L'espérance de la variable aléatoire X est

☑ 1,6 ☐ 4,4 ☐ 80

E(X)=np or $np = 4 \times \frac{2}{5} = 1{,}6$.

Exercice 3 **11 points**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1 - x)\text{e}^x$.
On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

1. **a.** Déterminons la limite de la fonction f en $+\infty$.
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (1 - x) \times \lim\limits_{x \to +\infty} (\text{e}^x) = -\infty \times +\infty = -\infty$

   b. Puisque $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$, nous pouvons donc affirmer que la courbe $\mathscr{C}$ et l'axe des abscisses sont asymptotes lorsque x tend vers $-\infty$.

2. **a.** Pour tout réel x, $f'(x) = -1\text{e}^x + (1 - x)\text{e}^x = -x\text{e}^x$.

   b. Pour tout réel x, $\text{e}^x > 0$ par conséquent $f'(x)$ est du signe de $-x$ pour tout réel x.
Il en résulte que pour tout réel $x \in \mathbb{R}_-^*$, $f'(x) > 0$ et pour tout réel $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) > 0$.

   c. Étudions la variation de f.
Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ alors la fonction f est strictement croissante sur I.
Pour $x \in]-\infty~;~0[$, $f'(x) > 0$, par conséquent f est strictement croissante sur cet intervalle.
Si pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$ alors f est strictement décroissante sur I.
Pour $x \in]0~;~+\infty[$, $f'(x) < 0$, par conséquent f est strictement décroissante sur cet intervalle.
Dressons le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	
Variation de f	0	↗	1	↘	$-\infty$

3. Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$ c'est-à-dire $(1 - x)\text{e}^x = 0$.
Pour qu'un produit de facteurs soit nul, il faut et il suffit que l'un au moins des facteurs le soit.
Or nous savons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\text{e}^x > 0$, par conséquent cela revient à résoudre $1 - x = 0$ d'où $x = 1$.
L'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = 0$ est $\{1\}$.
Les coordonnées du point d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses sont alors $(1~;~0)$.

4. **a.** Complétons le tableau de valeurs donné ci-dessous.

x	-2	$-1,5$	-1	$-0,5$	0	$0,5$	1	$1,25$
$f(x)$	0,4	0,6	0,7	0,9	1	0,8	0	$-0,9$

Les résultats sont arrondis au dixième près.

b. La courbe $\mathscr{C}$ a été tracée ci-dessous dans un repère orthonormal d'unité graphique 4 cm.

5. **a.** Traçons la droite Δ d'équation $y = -x+1$ dans le même repère que la courbe $\mathscr{C}$.

b. Résolvons dans $\mathbb{R}$, l'équation : $f(x) = -x+1$.

$(1-x)\mathrm{e}^x = -x+1 \iff (1-x)\mathrm{e}^x - (1-x) = 0 \iff (1-x)(\mathrm{e}^x-1) = 0$

Pour qu'un produit de facteurs soit nul, il faut et il suffit que l'un au moins des facteurs le soit. d'où $1-x=0$ ou $\mathrm{e}^x-1=0$. Il en résulte $x=1$ ou $x=0$

Les solutions de l'équation $f(x) = -x+1$ sont 0 ou 1.

6. Soit la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = (2-x)\mathrm{e}^x$.

a. La fonction F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$ si pour tout x, $F'(x) = f(x)$.

$$F'(x) = -1\mathrm{e}^x + (2-x)\mathrm{e}^x = -\mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x = (1-x)\mathrm{e}^x = f(x).$$

F est donc une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

b. $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_0^1 = F(1) - F(0) = (2-1)\mathrm{e}^1 - (2-0)\mathrm{e}^0 = \mathrm{e} - 2.$

c. Pour tout $x \in [0\,;\,1]$, $f > 0$, l'aire $\mathscr{A}$ du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$ est, en unités d'aire, $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$. L'unité d'aire vaut $16\,\mathrm{cm}^2$.

$\mathscr{A} = 16(\mathrm{e}^1 - 2) \approx 11,4925$, l'aire $\mathscr{A}$ du domaine vaut au mm^2 près $11,49\,\mathrm{cm}^2$.