Géométrie dans l'espace

On désigne par E l'ensemble des points de l'espace et par w l'ensemble des vecteurs de l'espace . E est muni d un repère orthonormal $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ *est Wmuni de la base* $B=\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

Produit scalaires dans l'espace :

Définition *:Le produit scalaire de deux vecteurs non nuls* $\vec{u} et \vec{v}$ *est le nombre réel :* $\vec{u}\cdot\vec{v}=\left\|\vec{u}\right\|\times\left\|\vec{v}\right\|\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)$

Propriétés *:* pour tous vecteurs* $\vec{u} et \vec{v}$ *et tous réel* $\alpha et \beta$

Si $\vec{u}=\vec{0}$ **ou** $\vec{v}=\vec{0}$ **alors** $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$	$\vec{u}^{\,2}=\left\|\vec{u}\right\|^2$
$\alpha(\vec{u}+\vec{v})=\alpha\vec{u}+\alpha\vec{v}$	$\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$
$(\alpha+\beta)\vec{u}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{u}$	$\alpha(\beta\vec{u})=(\alpha\beta)\vec{u}$

** E est muni d un repère orthonormal* $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ *et* $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ *sont deux vecteurs de W*

1. $\vec{u}\cdot\vec{u}=\left\|\vec{u}\right\|^2=x^2+y^2+z^2$
2. $\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'+zz'$
3. $\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2=\left\|\vec{u}\right\|^2+\left\|\vec{v}\right\|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}$
4. $|\vec{u}\cdot\vec{v}|\leq\left\|\vec{u}\right\|\times\left\|\vec{v}\right\|$ *(inégalité de Cauchy Scharz)*
5. $\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|\leq\left\|\vec{u}\right\|+\left\|\vec{v}\right\|$ *(inégalité de Minkowski)*

Déterminant de trois Vecteurs *: Soit B* $=\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ *une base deW et* $\left(\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)$ *un triplet de vecteurs de W tel que* $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ *et* $\vec{w}\begin{pmatrix}x''\\y''\\z''\end{pmatrix}$ *alors :*

$$\det\left(\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)=\begin{vmatrix}x & x' & x''\\ y & y' & y''\\ z & z' & z''\end{vmatrix}=x\begin{vmatrix}y' & y''\\ z' & z''\end{vmatrix}-y\begin{vmatrix}x' & x''\\ z' & z''\end{vmatrix}+z\begin{vmatrix}x' & x''\\ y' & y''\end{vmatrix}=x\,(y'z''-z'y'')-y\,(x'z''-z'x'')+z\,(x'y''-y'x'')$$

Théorème : *soit A ,B,Cet D quatre points de E .Le triplet* $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)$ *est une base de W si et seulement si* $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\ et\,\overrightarrow{AD}$ *n est pas liée si et seulement si* $\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)\neq 0$ *si et seulement si* $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\ et\,\overrightarrow{AD}$ *ne sont pas coplanaires si et seulement si A ,B,Cet D ne sont pas coplanaires*

Vecteurs colinéaires :

- *deux vecteurs de l'espace sont dits colinéaires Si l'un est produit de l'autre par un réel*
- $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ *et* $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ *sont deux vecteurs de W ,* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont deux vecteurs colinéaires si et seulement si*

$$\begin{vmatrix}x & x'\\ y & y'\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}y & y'\\ z & z'\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x & x'\\ z & z'\end{vmatrix}=0$$

Droite :

Etant donnés un point A et un vecteur non nul $\vec{u}$:

**** La droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ (notée D (A, $\vec{u}$)) est l'ensemble des points M tels que AM et $\vec{u}$ sont colinéaires.***

**** Etant donnés deux points A et B on (A B) = D (A, $\overrightarrow{AB}$).***

**** Equations paramétriques d une droite de l'espace*** ***Si $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, A\left(x_0, y_0, z_0\right) et M\left(x, y, z\right)$***

M $\in$ D (A, $\vec{u}$) équivaut à Il existe un réel α tel que $\overrightarrow{AM} = \alpha \vec{u}$ équivaut à $\begin{cases} x = \alpha a + x_0 \\ y = \alpha b + y_0 \\ z = \alpha c + z_0 \end{cases}$

Ce système est une représentation paramétriques de la droite $\mathscr{D}$ dans l'espace

**** Equations cartésienne d une droite dans le plan***

**** Le plan est muni d un repère $\left(o, \vec{u}, \vec{v}\right)$ l'ensemble des points M tel que a x + b y + c =0 avec (a,b)≠(0,0) est une droite D de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ ou de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$***

**** Etant donnés deux points A, Met $\vec{u}$ un vecteur non nul***

Si $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, A\left(x_0, y_0\right) et M\left(x, y\right)$,

det ($\overrightarrow{AM}$, $\vec{u}$)=$\begin{vmatrix} x - x_0 & a \\ y - y_0 & b \end{vmatrix}$=b(x-$x_0$)-a(y-y_0) fournit une équation Cartésienne de la droite D (A, $\vec{u}$)

Plan :

Equations paramétriques d un plan de l'espace

Etant donnés un point A , $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires

Si $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \vec{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} A\left(x_0, y_0, z_0\right) et M\left(x, y, z\right)$,M $\in$ P (A, $\vec{u}, \vec{v}$)

si et seulement si Il existe un unique couple réels (α, β) tel que $\overrightarrow{AM} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$ équivaut à $\begin{cases} x = \alpha a + \beta a' + x_0 \\ y = \alpha b + \beta b' + y_0 \\ z = \alpha c + \beta c' + z_0 \end{cases}$

Ce système est une représentation paramétrique du plan P

Equations cartésienne d un plan de l'espace :** **Tous plan de l'espace admet une équation de la forme a x + b y + c z + d = 0 ou a,b et c sont des réel non tous nuls

Réciproquement : Si un plan P à pour équation a x + b y + c z + d = 0 alors $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P

**** Etant donnés un point $A\left(x_0, y_0, z_0\right) et M\left(x, y, z\right)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur normal au plan P alors pour tous point M $\in$ P***

$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ est une équation cartésienne du plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$

***** Etant donnés un point $A \in$ P (A, $\vec{u},\vec{v}$) et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires du plan P**

Si $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \vec{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} A\left(x_0, y_0, z_0\right)$ et $M(x, y, z)$, alors pour tous point $M \in$ P (A, $\vec{u},\vec{v}$) $\det\left(\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v}\right) = 0$ est une équation cartésienne du P

Orthogonalité dans l'espace :

***** $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{0}$ et on note $\vec{u} \perp \vec{v}$**

***** Soit deux droites D et D' de vecteurs directeurs respectives $\vec{u}$ et $\vec{v}$**

On a alors : D $\perp$ D' équivaut à $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{0}$

***** Un vecteur normal à une droite est un vecteur orthogonal au vecteur directeur de la droite .**

***** Un vecteur non nul $\vec{n}$ est normal au plan P (o, $\vec{v},\vec{w}$) si et seulement si $\vec{n} \cdot \vec{v} = \vec{0}$ et $\vec{n} \cdot \vec{w} = \vec{0}$**

***** Soit une droite D de vecteur directeur $\vec{u}$ et P (o, $\vec{v},\vec{w}$) un plan**

D $\perp$ P si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{0}$ et $\vec{u} \cdot \vec{w} = \vec{0}$

***** Deux vecteurs non nuls $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ sont normaux à un même plan si et seulement si ils sont colinéaires.**

***** Soit deux plan P et P ' de vecteurs normaux respectives $\vec{n}$ et $\vec{n'}$**

On a alors : P $\perp$ P ' si et seulement si $\vec{n} \cdot \vec{n'} = \vec{0}$

P // P ' si et seulement si $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ sont colinéaires

***** Soit deux plans P : ax+by+c z+d = 0 et P ' a'x+b'y+c' z+d' =0**

Avec a',b' et c' trois réels non nuls ona : P // P ' si et seulement si $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$

Produit vectoriel dans l'espace :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de W et A ,B et C trois points de E tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}, \overrightarrow{AC} = \vec{v}$ on appelle produit vectoriel de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le vecteur $\vec{w}$

noté $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{w}$ * Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors $\vec{w} = \vec{0}$

*** Si non $\vec{w}$ est l unique vecteur tel que**

1. **$\vec{w}$ est normal au plan (ABC)**
2. **$\left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right)$ est une base directe de W**
3. **$\left\|\vec{u} \wedge \vec{v}\right\| = \left\|\vec{w}\right\| = \left\|\vec{u}\right\| \times \left\|\vec{v}\right\| \left|\sin(\vec{u}, \vec{v})\right|$**

***Propriétés* : Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs de W α un réel.**

On a : * $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$; $(\alpha\vec{u}) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge (\alpha\vec{v}) = \alpha(\vec{u} \wedge \vec{v})$

*** $(\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w}$**

*** $\vec{w} \wedge (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{w} \wedge \vec{u} + \vec{w} \wedge \vec{v}$**

*** $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = (\vec{v} \wedge \vec{w}) \cdot \vec{u} = (\vec{w} \wedge \vec{u}) \cdot \vec{v} = \det\left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right)$**

***Expression analytique du produit vectoriel :* Dans une base orthonormée directe $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ deW, si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs de W alors $\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}\vec{k}$ = (y z' - z y ')$\vec{i}$ – (xz'- zx') $\vec{j}$ + (xy'- yx') $\vec{k}$**

Sinus et cosinus de l' angle de deux vecteurs : ***Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls de W***

$|\sin(\theta)| = \dfrac{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$ et cos= $\dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$

E est muni d un repère orthonormé $\left(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$

Distance d un point à un plan :

**** E est muni d un repère orthonormé $\left(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ Soit le plans P : ax+by+cz+d = 0 , $A\left(x_A, y_A, z_A\right)$ un point de l'espace est H le projeté orthogonale de A sur P ,la distance du point A au plan P est :***

d(A , P)=AH= $\dfrac{\left|ax_A + by_A + cz_A + d\right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

**** Soit D une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ et B un point de D***

La distance d'un point A de l'espace à la droite D (B , $\vec{u}$) est le réel d(A , D) = $\dfrac{\|\overrightarrow{AB} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$

L'aire d un triangle : ***soit A, B et C trois points non alignés de E***

L'aire d un triangle ABC est égale à A = $\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$

L'aire d un parallélogramme

Soit ABCD un parallélogramme. L'aire du parallélogramme ABCD est égale à A = $\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\|$

Volume d'un parallélépipède

Le volume d'un parallélépipède ABCDEFGH est égale à

$V = |\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)| = |(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}) . \overrightarrow{AE}| = B.h$ B : l'aire de la base et h : hauteur

Volume d'un tétraèdre ***Le Volume d'un tétraèdre ABCD est égale à :***

$V = \frac{1}{6}|\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)| = \frac{1}{6}|(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) . \overrightarrow{AD}| = \frac{1}{3}Bh.$ B : l'aire de la base et h : hauteur

Equations cartésienne d'une sphère :

**** Soit I(a,b,c) un point de l'espace rapporté a un repère orthonormé $\left(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ est R un réel positif .***

Une équation cartésienne de la sphère S (I ,R) de centre I et de rayon R est :

$(x - a)^2+(y - b)^2+(z - c)^2= R^2$

**** Soit S une sphère de centre I et de rayon R et P un plan de l'espace on désigne par H la projeté orthogonale du point I sur le plan P et on pose d=IH***

- Si d < R alors $P \cap S$ est le cercle du plan P de centre H et de rayon R'= $\sqrt{R^2 - d^2}$ et on dit que P et S sont sécants suivant ce cercle

-Si d=R alors $P \cap S$ ={ H} et on dit que P et S sont tangents en H

- Si d > R $P \cap S = \phi$ et on dit que P et S sont disjoint

Les réflexes à avoir

- *Ne pas oublier que vous travailler dans l'espace et que tout point est définie dans un repère par son triplet de coordonnées.*

- *Le produit scalaire permet de démontrer que des droites sont orthogonales de calculer des angles géométriques , de trouver des équations de cercles ou de sphère et de trouver des équation cartésienne du plan .*
- *Un produit scalaire peut se calculer a l' aide de quatre formules*

1) $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ *et* $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ *sont deux vecteurs de W*

soient A, B, et C trois points de E tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ *et* $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$

. $\vec{u} \, . \, \vec{v} = \overrightarrow{AB} \, . \, \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \, . \, \overrightarrow{AH}$ *ou le point H est le projeté Orthogonale du point C sur (AB)*

2) $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\cos(\vec{u},\vec{v})$

3) $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy' + zz'$

4) $2\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$

En général vous choisirez des quatre formules selon l'énoncé de l'exercice

**La représentation paramétriques d une droite D de l'espace sous la forme* $\begin{cases} x = \alpha\, k + x_0 \\ y = \beta\, k + y_0 \\ z = \gamma\, k + z_0 \end{cases}$ *avec* $k \in \mathbb{R}$

Permet d'affirmer que le point $A\left(x_0, y_0, z_0\right)$ *est un point de la droite et que le vecteur* $\vec{u}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ *est un vecteur directeur de la droite*

- *Penser que si un plan P à pour équation ax+by+c z+d = 0 alors le vecteur* $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ *est normal a P*

- *Soit P : ax+by+c z+d = 0 un plan de l'espace E et soit* $\vec{u}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$

  Un vecteur de l'espace. $\vec{u}$ *est un vecteur du plan P si et seulement si* $a\,\alpha + b\,\beta + c\,\gamma = 0$
- *soient A, B, Cet D quatre points de E tel que A,B,C ne sont pas alignés . Alor ABCD est un parallélogramme si et seulement si* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ *si et seulement si* $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$

- *Etant donnés un point* $A\left(x_0, y_0, z_0\right)$ *et* $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ *un vecteur normal au plan P alors pour tous point*

  $M(x, y, z) \in P$ $\quad \overrightarrow{AM}\cdot\vec{n} = 0$ *est une équation cartésienne du plan passant par A et de vecteur normal* $\vec{n}$

- *Soient* $\vec{u}, \vec{v}$ *et* $\vec{w}$ *sont trois vecteurs de W.* $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ *est liée si et seulement si* $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \neq 0$ *si et seulement si* $\vec{u}, \vec{v}$ *et* $\vec{w}$ *ne sont pas coplanaires*
- *Etant donnés un point* $A \in P(A, \vec{u}, \vec{v})$ *et* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *deux vecteurs non colinéaires du plan P*

Si $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \vec{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$, $A(x_0, y_0, z_0)$ *et* $M(x, y, z)$ *alors pour tous point*

$M \in P(A, \vec{u}, \vec{v})$ $\det\left(\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v}\right) = \begin{vmatrix} x - x_0 & a & a' \\ y - y_0 & b & b' \\ z - z_0 & c & c' \end{vmatrix} = 0$ *sig*

$$\det\left(\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v}\right) = \begin{vmatrix} x - x_0 & a & a' \\ y - y_0 & b & b' \\ z - z_0 & c & c' \end{vmatrix} = (x - x_0)\begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix} - (y - y_0)\begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix} + (z - z_0)\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = 0$$

est une équation cartésienne du plan P $(A, \vec{u}, \vec{v})$

- $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \vec{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ $A(x_0, y_0, z_0)$ *et* $M(x, y, z) \in P(A, \vec{u}, \vec{v})$

La représentation paramétrique du plan *P* $(A, \vec{u}, \vec{v})$ *de l'espace sous la forme* $\begin{cases} x = \alpha a + \beta a' + x_0 \\ y = \alpha b + \beta b' + y_0 \\ z = \alpha c + \beta c' + z_0 \end{cases}$ $((\alpha, \beta) \in IR^2)$

- *il ne faut pas penser que deux plans perpendiculaires a un même plan sont parallèle (ils peuvent l'être mais en générale, ils ne le sont pas)*
- *Dans l'espace si deux droites ne sont pas parallèles alors elles ne sont pas nécessairement sécantes (elles peuvent être non coplanaire)*
- *Deux plans peuvent* → *Sécants selon une droite*
  - → *Parallèles* → *strictement*
    - → *confondus*
- *Soient A et B deux points de E*

- *L'ensemble* Γ_1 *des points M tel que : AM=BM est donc le plan médiateur du segment* $[AB]$
- *L'ensemble* Γ_2 *des points M tel que : AM=R avec R>0est donc la sphère S de centre A est de rayon R*
- *L'ensemble* Γ_3 *des points M de l'espace tel que* $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ *est la sphère de diamètre [AB]*
- *L'ensemble* Γ_4 *des points M de l'espace tel que* $\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} = \vec{0}$ *est la droite (AB)*
- *L'ensemble* Γ_5 *des points M de l'espace tel que* $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ *est Le plan orthogonal a* $\overrightarrow{AB}$ *passant par A*

N*My