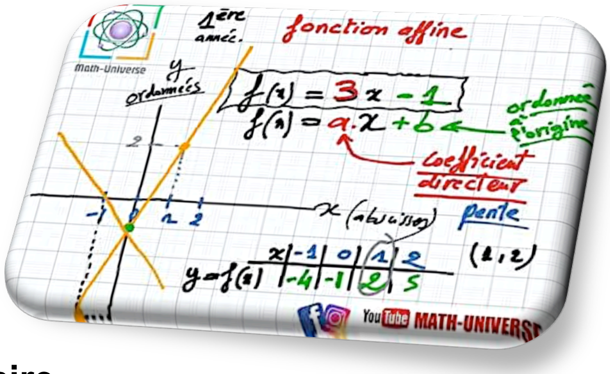
# Séquence n°9 : Fonctions linéaires / affines




**Objectifs :**

- Savoir utiliser une fonction linéaire
- Savoir représenter une fonction linéaire
- Savoir utiliser une fonction affine
- Savoir représenter une fonction affine

## Utiliser et représenter une fonction linéaire

**Définition :**
Une fonction linéaire est une fonction qui à tout nombre $\boldsymbol{x}$ associe le nombre $\boldsymbol{ax}$, c'est à dire le produit de $\boldsymbol{a}$ par $\boldsymbol{x}$.

Si on désigne par $\boldsymbol{f}$ cette fonction, on peut noter : $f(x) = ax$

On dit que $\boldsymbol{a}$ est le coefficient de la fonction linéaire.

**Exemple :** la fonction $\boldsymbol{f(x) = 3x}$ est une fonction linéaire de coefficient **3**.

***Exercice 1 :*** Les fonctions suivantes sont-elles linéaires ? Justifier

$f: x \to 4$ ………………………………………………………………………………….

$h: x \to 3x^2$ ………………………………………………………………………………….

$j: x \to -7x$ ………………………………………………………………………………….

$g: x \to 6x + 3$… ……………………………………………………………………………

$k: x \to -4x + 3$ ……………………………………………………………………………

**Propriété :**
Une fonction linéaire modélise une situation de proportionnalité. Le tableau de valeurs d'une fonction linéaire $\boldsymbol{f(x) = ax}$ est donc un tableau de proportionnalité de coefficient $\boldsymbol{a}$.

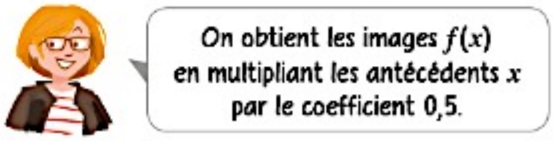
**Propriété :**
La représentation graphique d'une fonction linaire $\boldsymbol{f(x) = ax}$ est une droite qui passe par l'origine du repère.

A noter : on peut donc justifier graphiquement que deux entités (le prix et la masse par exemple) sont proportionnelles si la représentation graphique de l'une en fonction de l'autre est une droite qui passe par l'origine.

$f : x \mapsto 0{,}5x$

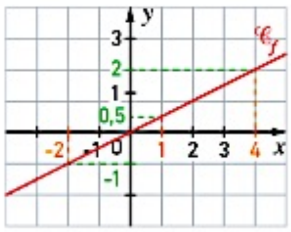
| $x$ | $-2$ | $0$ | $1$ | $4$ |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-1$ | $0$ | $0{,}5$ | $2$ |

$\times 0{,}5$




$f : x \mapsto 0{,}5x$

Les points de coordonnées $(-2 ; -1)$, $(0 ; 0)$, $(1 ; 0{,}5)$ et $(4 ; 2)$ sont sur la droite représentative de la fonction $f$.





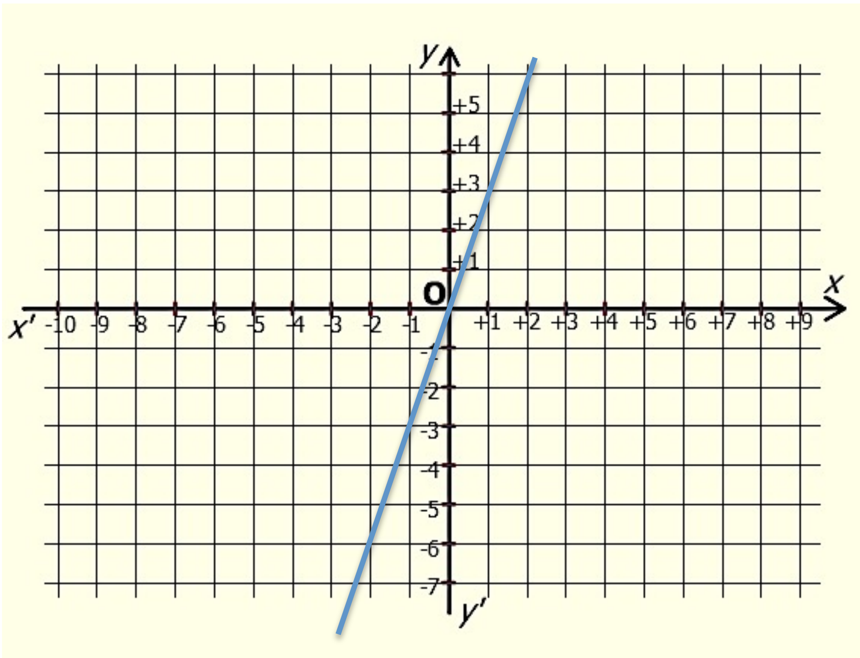
**A noter :** les points qui appartiennent à la représentation graphique d'une fonction $f(x)$ sont les points de coordonnées $(x\ ; f(x))$.

**Méthode :**

La représentation graphique d'une fonction linéaire ($f(x) = 3x$ par exemple) est une droite qui passe par l'origine donc pour la tracer, il suffit de calculer l'image d'un nombre, 2 par exemple :

$$f(2) = 3\times 2 = 6$$

On place alors le point de coordonnées (2 ; 6) et on trace la droite qui passe par ce point et par l'origine.




***Exercices n°17, 19, 20, 22, 24 p281***

# Utiliser et représenter une fonction affine

**Définition :**
Une fonction affine est une fonction qui à tout nombre $x$ associe le nombre $ax + b$, ($a$ et $b$ étant deux nombres relatifs).

Si on désigne par $f$ cette fonction, on peut noter : $f(x) = ax + b$

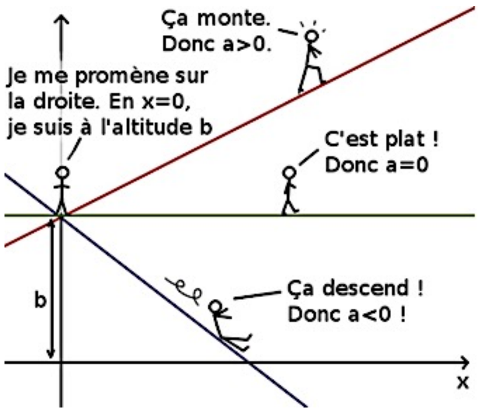
On dit que $a$ est le **coefficient directeur** de la fonction affine.
On dit que $b$ est **l'ordonnée à l'origine** de la fonction affine.

**Propriété :**
La représentation graphique d'une fonction affine $f(x) = ax + b$ est une droite.
Cette droite a pour équation :

$$y = ax + b$$

Cette droite a pour coefficient directeur $a$.
Ce coefficient correspond à la pente de la droite.

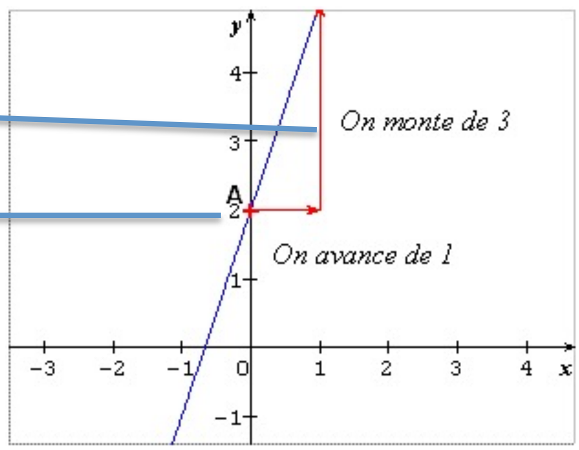
$b$ indique l'image de **0** soit $f(0)$ qui se lit sur l'axe des ordonnées.

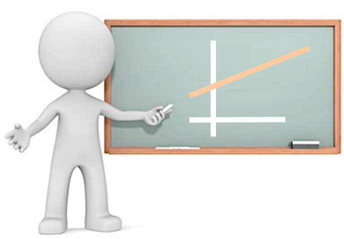



**Exemple :**
La fonction $f(x) = 3x + 2$ est une fonction affine de coefficient directeur **3** et d'ordonnée à l'origine **2**.

Coefficient directeur

Ordonnée à l'origine



***Exercice 2 :*** Les fonctions suivantes sont-elles affines ? Justifier

$f(x) = 6x + 30$ ……………………………………………………………………………

$h(x) = x^2$ ……………………………………………………………………………….

$j(x) = 5x - 7$ ……………………………………………………………………………

$g(x) = 4x$ ……………………………………………………………………………….

$k(x) = 9$……………………………………………………………………………….....

**Méthode :**

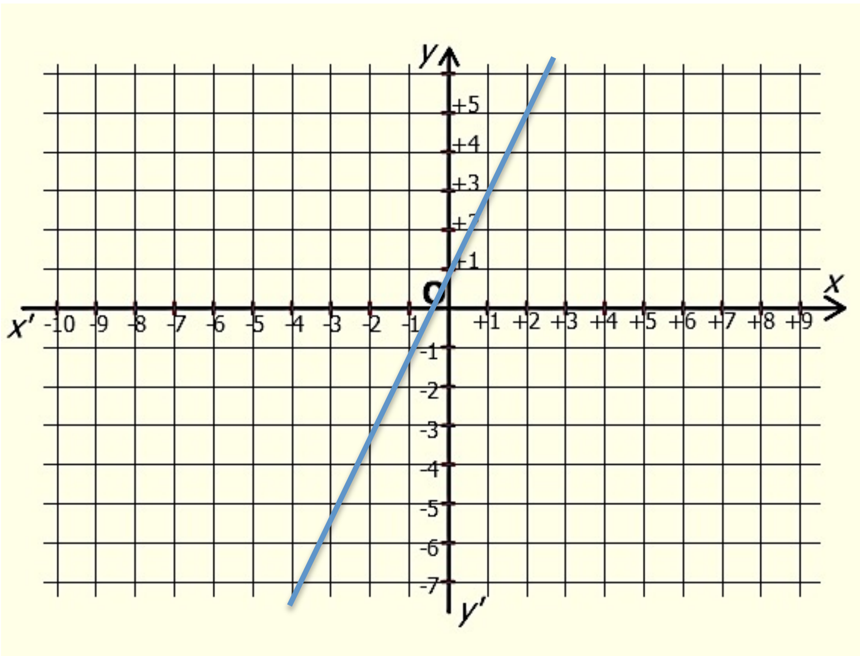
La représentation graphique d'une fonction affine ($f(x) = 2x + 1$ par exemple) est une droite. Pour la tracer, **il suffit de placer deux points**.

Le **premier** : sur l'axe des ordonnées, on place l'ordonnée à l'origine : ici 1.

Le **deuxième**, on calcule l'image d'un nombre, 2 par exemple :

$$f(2) = 2 \times 2 + 1 = 5$$

On place alors le point de coordonnées (2 ; 5) et on trace la droite qui passe par ce point et par l'ordonnée à l'origine sur l'axe des ordonnées.




***Exercice 3 :***

Dans un repère trace les représentations graphiques des fonctions $f$, $g$ et $h$ :

- $f(x) = 8x$
- $g(x) = 4x + 40$
- $h(x) = 92$

Correction

***Exercices n°2, 5, 7 p280***

## Appartenance d'un point à une fonction affine

**<u>Propriété :</u>**
Soit une fonction affine $\boldsymbol{f(x) = ax + b}$ représentée par une droite (d) et M un point de coordonnées M(x ; y).

Le point M est sur la droite (d) si ses coordonnées vérifient l'équation :

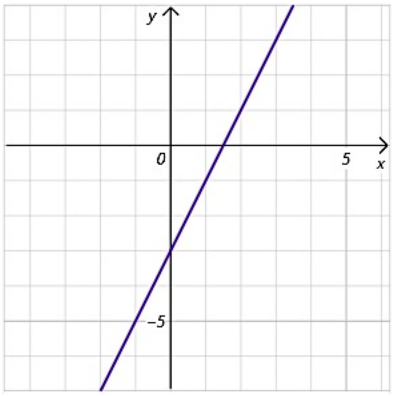
$$\boldsymbol{y = ax + b}$$

**<u>Exemple :</u>**
Soit $(d)$ la droite représentative de la fonction $f(x) = 2x - 3$.
Le point M de coordonnées $M(2,5\,;2)$ est-il sur la droite $(d)$ ?

On calcule l'image de 2,5 par la fonction $f$ :

$f(2,5) = 2\times 2,5 - 3 = \boxed{2}$

Donc $M \in (d)$




***Exercice 4 :***
Soit $(d)$ la droite représentative de la fonction $f(x) = 2x - 1$.
Les points $A(4\,;7)$ ; $B(\,-2\,;\ -5\,)$ et $C(10\,;18)$ appartiennent-ils à la droite $(d)$ ?

**Correction**

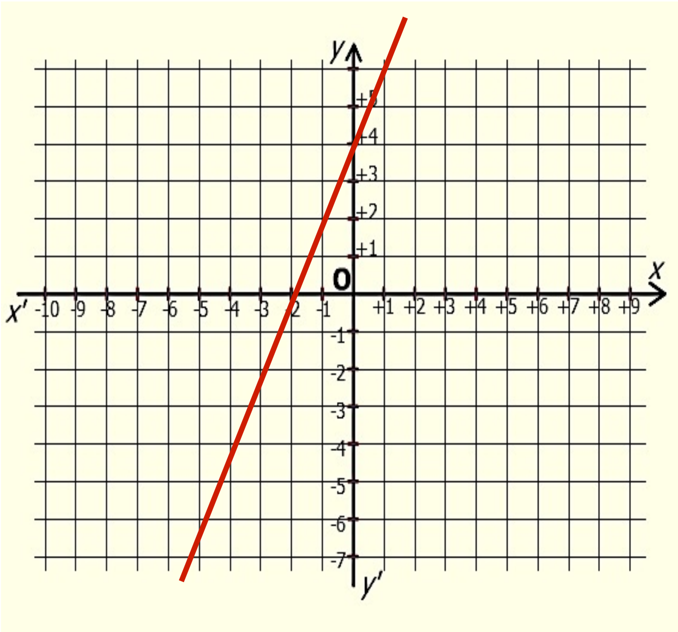
## Déterminer une fonction affine

Pour déterminer une fonction affine, il faut déterminer son coefficient directeur et son ordonnée à l'origine. On peut le faire soit graphiquement soit par calcul.

Autrement dit, on sait que l'on cherche une droite d'équation $\boldsymbol{y = ax + b}$, il faut trouver **a** et **b**.

## Détermination graphique :

**Méthode :**




On cherche à déterminer la fonction représentée par la droite ci-dessus. On note $f(x) = ax + b$ cette fonction.

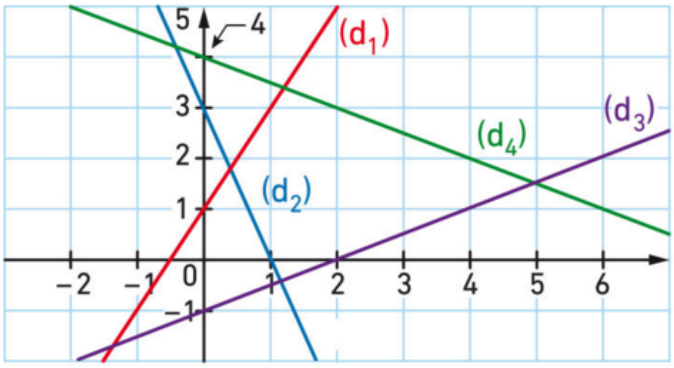
On regarde où la droite coupe l'axe des ordonnées, cela nous donne b, l'ordonnée à l'origine : **b** =……..

Pour trouver le coefficient directeur, on choisi un point sur la droite, on avance de une unité horizontalement et on compte de combien il faut se déplacer verticalement pour retomber sur la droite. Si on monte, on compte positivement, si on descend, on compte négativement.

Ici, on peut lire **a** = …………

La fonction est donc : ……………………………………………………………

***Exercice 5 :***
Donner les expressions des fonctions affines représentées par les droites $(d_1)$, $(d_2)$, $(d_3)$ et $(d_4)$.




$(d_1)$ : ……………………… $(d_2)$ : ……………………………………
$(d_3)$ : ……………………… $(d_4)$ : ……………………………………

**Correction**

## Détermination par le calcul :

**Propriété :**
Soit une fonction affine $\boldsymbol{f(x) = ax + b}$ représentée par une droite (d).

Soit $\boldsymbol{x_A}$ et $\boldsymbol{x_B}$ deux nombres dont on connait les images par $\boldsymbol{f}$.

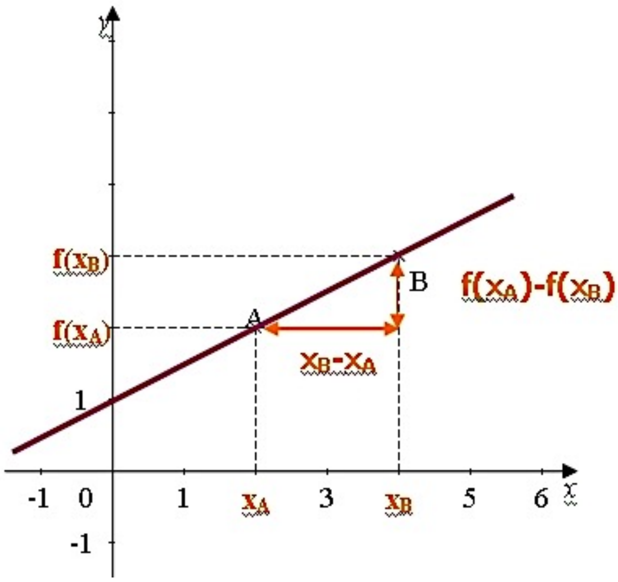
Alors on a : $\boldsymbol{a = \frac{f(x_B)-f(x_A)}{x_B-x_A}}$

On trouve ensuite $\mathbf{b}$ résolvant l'équation :

$\boldsymbol{f(x_A) = ax_A + b}$

Ou bien :

$\boldsymbol{f(x_B) = ax_B + b}$




**Exemple :**

$f$ est une fonction affine telle que $f(3) = 6$ et $f(5) = 12$. Déterminer cette fonction.

On a donc $f(x) = ax + b$

Calcul du coefficient directeur $a$ :

$$a = \frac{f(3) - f(5)}{3 - 5} = \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} = \ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots$$

Donc $f(x) = \ldots x + b$

Calcul de l'ordonnée à l'origine $b$ :

On remplace $x$ par 3 (ou par 5) dans l'expression $f(x) = \ldots x + b$.

Ce qui nous donne $f(3) = \ldots\ldots\ldots + b$, or $f(3) = 6$.

Donc ………………………………………………………………………………

**On a donc $\boldsymbol{f(x)} =$ ……………..**

***Exercice 6 :***
Déterminer l'expression de la fonction affine sachant que :
$f(2) = 4$ et $f(5) = 1$

..................................................................................................

..................................................................................................

..................................................................................................

..................................................................................................

..................................................................................................

..................................................................................................

**Correction**

***Exercices n° 8, 12 p 280, 13, 14, 15 p 281***

## Résoudre un problème à l'aide de fonctions

***Exercice 7 :***

Voici les tarifs d'entrée pour un stade de football :
Tarif 1 : 8 € l'entrée
Tarif 2 : 4 € l'entrée avec la carte demi-tarif qui coûte 40 €
Tarif 3 : L'abonnement pour la saison coûte 92€

1) Calculer pour chaque tarif, la dépense pour 6 entrées puis 15 entrées. Dans chaque cas, quel est le tarif le plus intéressant ?

| | Tarif 1 | Tarif 2 | Tarif 3 |
|---|---|---|---|
| 6 entrées | | | |
| 15 entrées | | | |

Donc, pour 6 entrées, le plus intéressant est le tarif n° .......... et pour 15 entrées c'est le tarif n°..........

2) Soit $x$ le nombre d'entrées. Exprimer en fonction de $x$ la dépense totale pour une saison pour chaque tarif.

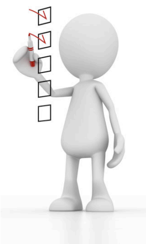
Tarif 1 : $D_1(x)$ = ..............................................
Tarif 2 : $D_2(x)$ = ..............................................
Tarif 2 : $D_3(x)$ = ..............................................

3) Représenter graphiquement le prix pour chaque tarif en fonction du nombre d'entrées.
4) Comparer ces tarifs.

**Correction**

***Exercices n° 25, 26, 29, 30 p 282, 42 p 285***
***Analyse d'une production p 287***

## A retenir



Une fonction linéaire est de la forme $f(x) = ax$
Une fonction linéaire modélise une situation de proportionnalité.
On a un rapport de proportionnalité entre deux valeurs si la courbe obtenue en traçant l'une en fonction de l'autre est une droite qui passe par l'origine (fonction linéaire).

Une fonction affine est de la forme $f(x) = ax + b$

Avec $\boldsymbol{a}$ le coefficient directeur et $\boldsymbol{b}$ l'ordonnée à l'origine.

Si on a la fonction affine $\boldsymbol{f(x) = ax + b}$ alors le point M(x ; y) appartient à la droite représentant cette fonction si ses coordonnées vérifient l'équation $\boldsymbol{y = ax + b}$

Si on connaît les coordonnées de deux points appartenant à la droite représentant une fonction affine alors on trouve le coefficient directeur :

$$\boldsymbol{a = \frac{f(x_B) - f(x_A)}{x_B - x_A}}$$

Et on trouve l'ordonnée à l'origine et résolvant l'équation : $\boldsymbol{f(x_A) = ax_A + b}$

## Pour aller plus loin

Une maison d'édition veut publier un manuel de mathématiques. Les frais de création s'élèvent à 30 000 € et l'impression de chaque livre coûte ensuite 3,50 €.

1- Déterminer le coût de production, ***C(n)*** de ***n*** livres.

2- Chaque livre est vendu 6,50 €. Calculer la recette, ***R(n)*** , pour ***n*** livres vendus.

3- Représenter graphiquement dans un même repère les fonctions ***C*** et ***R*** associées.

4- Combien de livres la maison d'édition doit-elle vendre pour réaliser un bénéfice?

5- Après une étude de marché plus approfondie, la maison d'édition souhaite commencer à réaliser des bénéfices à partir de 4000 livres vendus. A quel prix doit-elle alors vendre chaque livre?