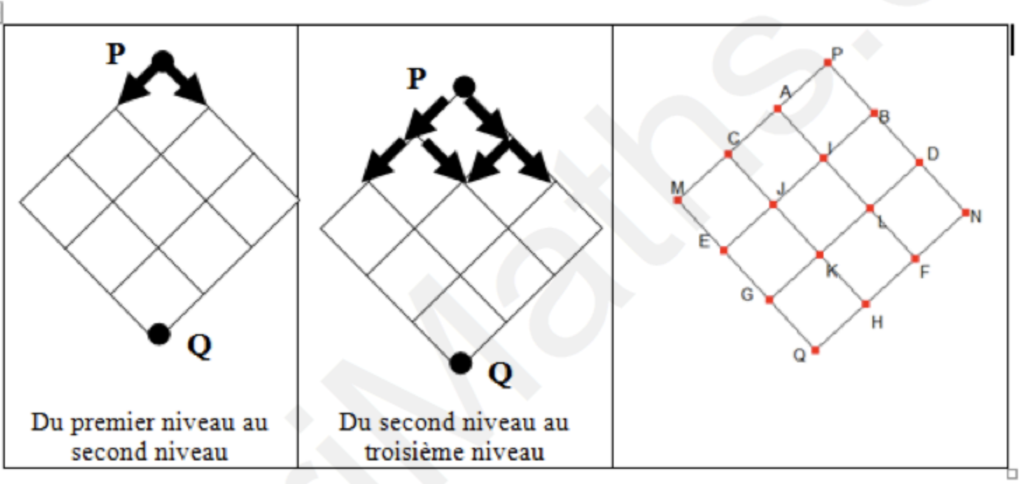
Exercices + Corrigés dénombrement Semaine 1

1/ Paul a des chaussettes rouges, des chaussettes bleues et des chaussettes jaunes, toutes rangées dans le même tiroir. S'il se sert dans l'obscurité, combien de chaussettes doit-il prendre au minimum pour être sûr d'avoir au moins une paire de chaussettes de la même couleur ?

Si Paul tire deux chaussettes, elles peuvent être de couleurs différentes. De même s'il tire trois chaussettes il aura dans le cas le plus défavorable R, B, J. Par contre en tirant une quatrième chaussette, elle sera obligatoirement R, B, ou J, et il aura au moins une paire de même couleur.

Le nombre minimal de chaussettes à prendre pour être sûr de disposer d'une paire est donc 4.

2/ On se déplace du Point P jusqu'au point Q selon les lignes tracées, et seuls les mouvements du haut vers le bas sont autorisés. Combien y a-t-il de chemins possibles du point P au point Q ?



On peut voir que pour passer de P au second niveau on a deux possibilités

Pour passer au troisième niveau 2×2 soit 4 possibilités

Pour passer au quatrième niveau, $2 \times 2 \times 2$ soit 8 possibilités

Pour atteindre le cinquième niveau 6 nouveaux chemins possibles, soit en tout 14 possibilités

Pour atteindre le sixième niveau 4 nouveaux chemins possibles, soit en tout 18 possibilités

Pour atteindre le point Q, au dernier niveau, 2 nouveaux chemins possibles, soit 20 possibilités en tout.

Si vous avez besoin de visualiser les chemins, voici leur liste longue à établir mais encore accessible, mais il serait difficile de raisonner ainsi sur un nombre supérieur de cases !

© PariMaths.

NIVEAU 1 = PA ou PB

NIVEAU 2 = PAC ou PAI, PBI ou PBD

NIVEAU 3 = PACM ou PACJ, PAIJ ou PAIL, PBIJ ou PBIL, PBDL ou PBDN

NIVEAU 4 = PACME, PACJE ou PACJK, PAIJE ou PAIJK, PAILK ou PAILF, PBIJE ou PBIJK, PBILK ou PBILF, PBDLK ou PBDLF, PBDNF

NIVEAU 5 ET 6 = PACMEGQ, PACJEGQ, PACJKGQ ou PACJKHQ, PAIJEGQ, PAIJKGQ, PAIJKHQ, PAILKGQ ou PAILKHQ, PAILFHQ, soit dix trajets passant par A et autant passant par B : PBIJEGQ, PBIJKGQ ou PBIJKHQ, PBILKGQ ou PBILKHQ, PBILFHQ, PBDLKGQ ou PBDLKHQ, PBDLFHQ, PBDNFHQ.

Avec un quadrillage à 4 cases il y aurait 2 X 2 X 2 X 2 = 16 possibilités pour atteindre le « cinquième niveau », le point P étant au premier niveau, 16+ 8 + 6 + 4 + 2 = 36 chemins pour arriver à Q

3/ Dans une soirée rassemblant 10 personnes, chaque invité échange une poignée de mains avec chacun des autres convives. Combien cela fait-il de poignées de mains ?

La première personne sert la main de 9 personnes. La suivante sert la main de neuf personnes moins celle de la première car la poignée de main a déjà eu lieu donc 8 nouvelles poignées de main (représentation chronologique). La troisième sert la main de 7 personnes, la quatrième.... la dixième ne sert aucune poignée de main car elle les a déjà toutes serrées. Au total : 9+8+7+6+5+4+3+2+1+0 = 45 poignées de main

Même question s'il y a 20 personnes.

Première procédure : généralisation de la procédure utilisée pour 10 personnes : $19+18+.......+2+1$

On peut remarquer que si on l'ajoute chaque terme de la somme $19+18+.......+2+1$, à chaque terme de la somme $1+2+......+18+19$, on obtient $(19+1)+(18+2)+(17+3)+\ ....+\ (2+18)+(1+19)$ *soit* 19×20

La somme vaut donc $\dfrac{20\times 19}{2}=190$

Seconde procédure : on considère deux groupes A et B de 10 personnes, puis chaque personne du groupe A sert les dix mains des personnes du groupe B soit $45\times 2+10\times 10=190$ poignées de main

Même question s'il s'agit de 5 couples : chaque invité échange une poignée de mains avec chacun des autres convives sauf son conjoint.

Dans le cas où il s'agit de 5 couples : pour chaque personne, il y a 8 personnes à qui serrer la main (les dix personnes, moins le conjoint et elle-même). La première sert donc 8 mains. Choisissons pour la seconde personne, son conjoint : il sert aussi 8 mains. La troisième a déjà serré les mains de deux personnes, doit serrer les mains d'encore 7 personnes parmi lesquelles son conjoint, donc 6 personnes. Le conjoint, de même, a déjà serré les mains de 2 personnes, il y a donc encore 7 personnes parmi lesquelles sont conjoint : donc il reste 6 poignées de mains. La cinquième personne doit serrer les mains de 4 personnes, idem pour son conjoint. La septième personne serre les mains de 2 personnes, idem pour son conjoint et les 2 dernières personnes ont déjà serré toutes les mains. Au total : 2 x 8 + 2 x 6 + 2 x 4 + 2 x 2 = 16 + 12+ 8 + 4 = 40 poignées de mains.

Autre méthode : utiliser le résultat du début. Si chaque personne sert la main de tout le monde, il a donné une poignée de main en trop. Mais il ne faut enlever cette poignée de mains en trop qu'une seule fois pour les deux conjoints, donc il y a eu 5 poignées de mains en trop : 45-5 = 40

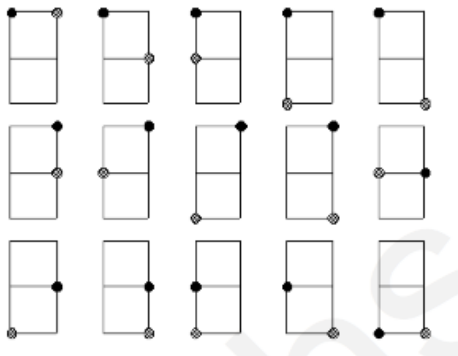
4/ Un caractère d'écriture Braille destinée aux aveugles est formé de points obtenus en piquant la feuille de papier à travers au moins un des six nœuds de la grille ci-dessous :

Par exemple, la lettre M s'écrit :

- Combien de caractères de deux points peut-on concevoir ? Les écrire tous.
- Combien de caractères de quatre points peut-on concevoir ?

On constate qu'il y a six choix possibles pour le premier point (nœud de la grille), et à chacun de ces choix est associé cinq choix pour le second. Cependant chaque couple est répété deux fois. On obtient donc (6x5)/2 = 15 caractères.

Il y a autant de caractères de quatre points que le nombre de caractères de deux points, car à chaque caractère de deux points est associé un caractère de quatre points.



5/ Les multiples de 21 dont l'écriture nécessite deux chiffres sont 21, 42, 63, 84. Pour écrire cette liste de multiples il faut 8 caractères d'imprimerie. Combien en faut-il pour écrire la liste des multiples de 21 dont l'écriture nécessite trois chiffres ? Même question avec cinq chiffres ?

Le plus petit multiple de 21 avec une écriture à trois chiffres est 105, le plus grand est obligatoirement inférieur à 999. Le problème revient à chercher combien il existe de pas de longueur 21 entre ces deux nombres. On peut écrire $999 - 105 = 894 = \mathbf{42} \times 21 + 12$. Il y a donc 42 autres multiples de 21, soit au total 43 multiples de 21 avec une écriture à trois chiffres, et il faudra $43 \times 3 = 129$ caractères pour les écrire.

Le plus grand entier à cinq chiffres est 99999, celui à quatre chiffres 9999. Entre 1 et 99999, il y a 4761 multiples de 21 ; en effet $99999 = 21 \times 4761 + 10$. Entre 1 et 9999, il y a 476 multiples de 21 ; en effet, $9999 = 476 \times 21 + 3$. On peut donc conclure qu'entre 9999 et 99999, il y a $4761 - 476 = 4285$ multiples de 21 qui s'écriront nécessairement avec cinq chiffres (puisque supérieurs à 9999). Il faudra donc $4285 \times 5 = 21425$ caractères pour les écrire.

6/ Quand Marie et Pierre se sont mariés, chacun d'eux avait déjà plusieurs enfants de mariages précédents. Au bout de quelques années, il y a huit enfants dans leur maison : Pierre est le père de six d'entre eux, Marie est la mère de cinq d'entre eux. Combien d'enfants ont-ils eu ensemble ?

Si Pierre est le père de six d'entre eux et Marie la mère de cinq d'entre eux, il y aurait 11 onze enfants si aucun n'était issu de leur mariage commun. Compte tenu du fait qu'il y a huit enfants dans leur maison, ils ont donc eu ensemble trois enfants. Marie avait auparavant deux enfants, et Pierre avait trois enfants.

7/ Dans un centre de vacances accueillant cent vingt personnes, on sait que vingt-quatre personnes font du tennis et quinze du canoë. En outre, six personnes pratiquent à la fois tennis et canoë. Combien de personnes ne pratiquent aucun des deux sports ?

$24 + 15 = 39$. Il y a donc 39 personnes qui pratiquent soit le tennis, soit le canoë, soit les deux. Or 6 personnes pratiquent les deux. Il reste donc 33 personnes pratiquant soit le tennis, soit le canoë, et il reste 87 personnes ne pratiquant aucun sport. $(120 - 33 = 87)$

8/ Un cadenas comporte trois molettes, sur chacune desquelles on peut choisir l'un des dix chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. On obtient ainsi un code, comme par exemple 222, 034, … Combien existe-t-il de codes différents ?

Pour la première molette, il y a 10 possibilités. Pour chacune de ces 10 possibilités, il y a 10 possibilités pour la $2^{\text{ème}}$ molette : il y a donc 100 possibilités pour les deux premiers chiffres. Ensuite, pour chacune de ces 100 possibilités, il y a 10 possibilités pour la $3^{\text{ème}}$ molette. Finalement, il y a donc $10\times10\times10=1000$ codes possibles.

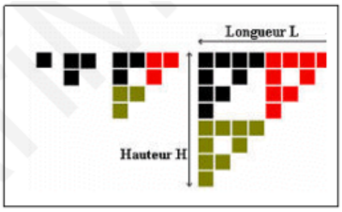
9/ Une cave obscure renferme de nombreuses bouteilles de cinq sortes différentes. Combien doit-on remonter de bouteilles pour être sûr d'avoir au moins trois bouteilles identiques ? Expliquez votre démarche.

Si on tire 5 bouteilles elles peuvent être toutes différentes (cas le plus défavorable)

Si on tire à nouveau 5 bouteilles, elles peuvent encore être toutes différentes (cas le plus défavorable : au bout de 10 tirages, il y a deux bouteilles de chaque sorte).

C'est donc à la onzième bouteille qu'on est certain d'avoir trois bouteilles identiques.

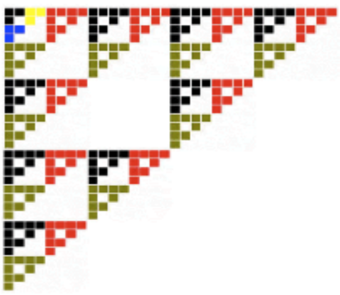
10/



On commence par former un triangle de trois carrés. On en fait ensuite trois copies que l'on utilise pour former un plus grand triangle et on recommence l'opération avec ce nouveau triangle et ainsi de suite, jusqu'à obtenir une figure de la taille souhaitée.

- Sur une feuille quadrillée 5x5, format A4, on trace le plus grand triangle de Sierpinski possible d'une seule couleur. Combien de carrés utilise-t-on sur la longueur ? Sur la hauteur ? En tout ?
- Dans un quadrillage de 1100 carreaux sur 1100 carreaux, trouver le nombre de carrés que l'on peut utiliser dans la longueur L du plus grand triangle de Sierpinski possible.

1. Sur une feuille quadrillée 5×5, format A4, c'est-à-dire dont la plus petite dimension fait 21cm, on peut placer un triangle de 32 carrés de côté. En effet, sut la longueur, chaque étape multiplie par 2 le nombre de carrés utilisés, soit $2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5$ ce qui représente 32 carrés soit 16cm. Simultanément, à chaque étape, on multiplie par 3 le nombre de carrés utilisés. Le premier triangle en utilise 3, la deuxième étape 3×3, la troisième 3^3, puis 3^4, puis 3^5 soit 243 carrés.



2. Dans un quadrillage de 1100 carreaux sur 1100 carreaux, le plus grand **triangle de Sierpinski** possible, en tenant compte de la longueur et de la hauteur, comporte $2^{10}=1024$ carrés.

EN ATTENTE DE CORRECTION

11/ Dans une urne, il y a 5 boules B1, B2, B3, B4 et B5.

- On mélange bien les boules et on tire trois fois de suite une boule en remettant à chaque fois la boule tirée dans l'urne avant le tirage suivant.
  Combien y a-t-il de résultats différents possibles ? (on tient compte de l'ordre dans lequel les boules sont tirées)
- On mélange bien les boules et on tire trois fois de suite une boule en ne remettant pas une boule tirée dans l'urne avant le tirage suivant.
  Combien y a-t-il de résultats différents possibles ? (on tient compte de l'ordre dans lequel les boules sont tirées)
- On mélange bien les boules et on tire simultanément trois boules.
  Combien y a-t-il de résultats différents possibles ?

12/

a/ On lance trois fois de suite un dé.

- Combien de résultats différents peut-on obtenir ? (on tient compte de l'ordre dans lequel on obtient les différents nombres affichés sur la face supérieure du dé).
- Parmi ces résultats, combien y en a-t-il pour lesquels on n'obtient pas le chiffre 4 ?
- Combien y en a-t-il pour lesquels on obtient au moins une fois le chiffre 4 ?

b/ On tire trois fois de suite une carte dans un jeu de 32 cartes en remettant à chaque fois dans le jeu la carte tirée avant le tirage suivant.

- Combien de résultats différents peut-on obtenir ? (on tient compte de l'ordre dans lequel on obtient les différentes cartes)
- Parmi ces résultats, combien y en a-t-il où toutes les cartes sont de la même « couleur » ? (il y a 4 « couleurs » : trèfle, carreau, cœur et pique)

c/ On tire trois fois de suite une carte dans un jeu de 32 cartes en ne remettant pas dans le jeu la carte tirée avant le tirage suivant.

- Combien de résultats différents peut-on obtenir ? (on tient compte de l'ordre dans lequel on obtient les différentes cartes)
- Parmi ces résultats combien y en a-t-il où toutes les cartes sont de la même « couleuré ?

d/ On tire simultanément quatre cartes dans un jeu de 32 cartes.

- Combien de résultats différents peut-on obtenir ?
- Parmi ces résultats, combien y en a-t-il où toutes les cartes sont de la même « couleur » ?

13/ On veut réaliser des drapeaux comprenant 3 bandes colorées horizontales :

On dispose de 4 couleurs : bleu, rouge, jaune, vert. Chaque bande doit être colorée. Les réponses doivent être justifiées.

- Si on n'impose aucune contrainte, combien de drapeaux différents pourra-t-on réaliser ?
- On impose à la bande centrale d'être rouge. Combien de drapeaux différents aura-t-on ?

- On n'impose plus à la bande centrale d'être rouge, mais on impose à deux bandes adjacentes de ne pas être de la même couleur. Combien de drapeaux différents pourra-t-on réaliser ?
- Combien de drapeaux différents peut-on réaliser avec trois bandes de couleurs distinctes ?
- Combien de drapeaux admettant un axe de symétrie horizontal peut-on réaliser ?

14/ Combien faut-il au total de caractères pour numéroter toutes les pages d'un livre de 350 pages ?

15/ On dispose 9 jetons numérotés de 1 à 9. Parmi ces jetons, on tire simultanément 3 jetons.

- Combien y a-t-il de tirages différents possibles ?
- Parmi ces tirages combien sont tels que la somme des nombres marqués sur les jetons tirés soit égale à 15 ?

16/ Au cours de l'année 2009, de nouvelles plaques d'immatriculation ont été mises en circulation.

Chaque véhicule immatriculé possèdera désormais un numéro « à vie ». Ce numéro est constitué de sept caractères, répartis en trois blocs :

- 1er bloc : deux lettres
- 2ème bloc : trois chiffres
- 3ème bloc : deux lettres

La numérotation des véhicules se fera de manière chronologique et au niveau national (de AA-001-AA à ZZ-999-ZZ), les numéros se succédant de la manière suivante :

- De AA-001-AA à AA-999-AA
- Puis de AA-001-AB à AA-999-AB et ainsi de suite jusqu'à AA-999-AZ
- Puis de AA-001-BA à AA-999-ZZ
- Puis de AB-001-AA à AZ-999-ZZ
- Puis de BA-001-AA à ZZ-999-ZZ

Dans cet exercice les lettres utilisées dans la numérotation des véhicules sont les 26 lettres de l'alphabet.

a/ Combien de véhicules devront être immatriculés pour atteindre le numéro AA-999-AZ ?

b/ Montrer qu'il faut immatriculer 28982 véhicules pour atteindre le numéro AA-011-BD.

c/ Montrer que le nombre de véhicules immatriculés avant d'arriver au numéro AB-001-AA est de 675324.

d/ Au bout de combien d'années pourrait être épuisé ce système de numérotation si 7 millions de véhicules sont immatriculés chaque année ?

17/ Combien de nombres de 4 chiffres comportent le chiffre 0 dans leur écriture ?

18/ Soit un polygone convexe de n côtés, combien y a-t-il de diagonales ?

19/ Calculer le nombre d'anagrammes formées avec les lettres des mots MALIN et TERRIBLEMENT.

20/ Un digicode est composé de 4 chiffres choisis entre 0 et 9 suivis de 2 lettres choisies parmi A, B, C et D. Combien y a-t-il de codes possibles ?

21/ Une urne contient 10 boules rouges, 4 boules blanches et 6 boules noires.

- Déterminer le nombre de tirages successifs sans remise de 3 boules.
- Déterminer le nombre de tirages simultanés de 3 boules
- On tire simultanément 3 boules :
  a/ Déterminer le nombre de tirages unicolores
  b/ Déterminer le nombre de tirages comprenant au moins une boule rouge

22/ A leur entrée en L1, les étudiants choisissent une langue (anglais ou allemand) et une option (informatique, chimie ou astronomie). Dans un groupe d'étudiants, 12 sont inscrits en astronomie, 15 en chimie, 16 étudient l'allemand. Par ailleurs, 8 inscrits en astronomie et 3 inscrits en informatique étudient l'anglais, 6 inscrits en chimie étudient l'allemand.

Indiquer la répartition d'étudiants par discipline, ainsi que le nombre total d'étudiants dans le groupe.

23/ Pour numéroter toutes les pages d'un livre, on a imprimé 14189 chiffres. Quel est le nombre de pages de ce livre ?