LES EXERCICES DES SUJETS BACCALAURÉAT REGROUPÉS PAR TYPE

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

BACCALAURÉAT SECTION SC-EXP

ANNALES DES Exercices DE MATHÉMATIQUES
SESSIONS :

*Principale + Contrôle 2014 **** 2017*

Proposé par Mr : NAIFAR MED YASSINE
LYCEE AHED JADID SKHIRA

REPUBLIQUE TUNISIENNE ◈◈◈ MINISTERE DE L'EDUCATION	EXAMEN DU BACCALAUREAT		
	Epreuve : MATHEMATIQUES		
SECTION : Sciences Expérimentales			

Exercice N°1 : (5 POINTS)

Bac –sciences expérimentales-2017(session principale)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère les points $A(2,2,1)$, $B(0,-2,4)$ et $C(2,0,-4)$.

1) a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{BC}$.

b) On note P le plan (OBC).

En remarquant que $\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{BC}=4\,\overrightarrow{OA}$, justifier que la droite (OA) est perpendicul au plan P en O.

c) Montrer que la distance du point O à la droite (BC) est égale à $\sqrt{2}$.

2) Soit (S) l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace tels que :

$x^2+y^2+z^2-4x-4y-2z-2=0$.

Montrer que (S) est la sphère de centre A et de rayon $\sqrt{11}$.

3) a) Calculer la distance OA.

b) En déduire que le plan P coupe la sphère (S) suivant un cercle (C) de centre O et de rayon $\sqrt{2}$.

c) Montrer que la droite (BC) est tangente au cercle (C).

4) On considère le point $H(1,-1,0)$.

a) Montrer que H est le point de contact de la droite (BC) et du cercle (C).

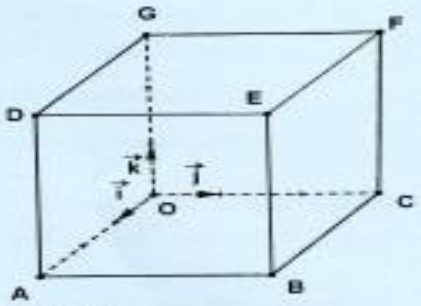
b) Déterminer une équation cartésienne du plan Q tangent à (S) en H.

Exercice N°2 : (5POINTS)

Bac –sciences expérimentales-2017(session controle)

On munit l'espace d'un repère orthonormé direct (O,i,j,k).

Dans la figure ci-contre OABCGDEF est un cube tel que A(3,0,0) ; C(0,3,0) et G(0,0,3).



1) a) Justifier que E a pour coordonnées (3,3,3) et donner celles de D.

b) Déterminer les coordonnées du point Ω milieu de[CD].

2) a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AE}\wedge\overrightarrow{AG}$.

b) Calculer le volume du tétraèdre OAEG.

3) On désigne par P le plan passant par les points A, E et G.

a) Montrer que la droite (CD) est perpendiculaire au plan P.

b) Montrer qu'une équation cartésienne du plan P est $x-y+z-3=0$.

4) Soit (S) l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace tels que $x^2+y^2+z^2-3x-3y-3z+6=0$

a) Montrer que (S) est une sphère dont on précisera le centre et le rayon.

b) Montrer que (S) et P sont tangents en un point H dont on déterminera les coordonnées.

Exercice N°3: (5 POINTS)

Bac –sciences expérimentales-2016(session principale)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

1) Soit P et Q les plans d'équations respectives $x+y-z-5=0$ et $x+y-z+7=0$.

   Montrer que les plans P et Q sont strictement parallèles.

2) Soit S l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace tels que $x^2+y^2+z^2-2x-4y-2z+1=0$.

   a) Justifier que S est la sphère de centre $I(1, 2, 1)$ et de rayon $R=\sqrt{5}$.

   b) Montrer que $P\cap S$ est un cercle $\mathscr{C}$ de centre $J(2, 3, 0)$ dont on déterminera le rayon.

   c) Déterminer $Q\cap S$.

3) On donne les points $A(0, 0, 1)$, $B(0, 1, 2)$ et $C(2, 2, 5)$.

   a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.

   b) Montrer que pour tout point $M(x, y, z)$ de l'espace, $(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AM}=2(x+y-z+1)$.

4) Déterminer l'ensemble des points M de la sphère S pour lesquels ABCM est un tétraèdre de volume égal à 2.

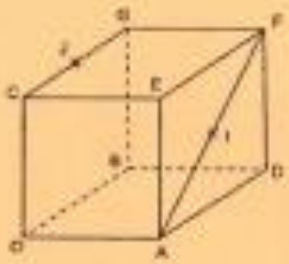
Exercice N°4: (4 POINTS)

Bac –sciences expérimentales-2016(session controle)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v},\vec{w})$.

Soit OADBCEFG le cube tel que $\overrightarrow{OA}=\vec{u}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{v}$ et $\overrightarrow{OC}=\vec{w}$.

On désigne par I et J les milieux respectifs des segments [AF] et [CG].



1) a) Déterminer les coordonnées des points E, I et J.

   b) Vérifier que $\overrightarrow{OI}\wedge\overrightarrow{OJ}=\frac{1}{4}(\vec{u}-4\vec{v}+2\vec{w})$.

2) a) Calculer l'aire du triangle OIJ.

   b) Calculer le volume du tétraèdre OIJE.

   c) La droite passant par E et perpendiculaire au plan (OIJ) coupe le plan (OIJ) en un point H.

   Sans calculer les cordonnées de H, justifier que $EH=\frac{\sqrt{21}}{7}$.

3) Soit (S) l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace tels que $x^2+y^2+z^2-2x-2z+\frac{11}{7}=0$.

   Montrer que (S) est une sphère tangente au plan (OIJ).

Exercice N°5: (5POINTS) Bac –sciences expérimentales-2015(session principale)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère les points $A(1,1,0)$, $B(1,-1,2)$, $C(0,1,1)$ et $D(1,1,4)$.

1/ a) Montrer que A, B et C déterminent un plan qu'on notera (P).

b) Justifier que (P) est d'équation $x+y+z-2=0$.

c) Vérifier que D n'appartient pas au plan (P).

2/ Soit $\mathscr{C}$ le cercle circonscrit au triangle ABC et H le milieu du segment $[AB]$.

a) Montrer que le triangle ABC est rectangle en C.

b) En déduire que H est le centre du cercle $\mathscr{C}$.

3/ Soit Δ la droite perpendiculaire au plan (P) passant par le point H.

Justifier qu'une représentation paramétrique de Δ est $\begin{cases} x=1+\alpha \\ y=\alpha \\ z=1+\alpha \end{cases}$; $\alpha \in \mathbb{R}$.

4/ Soit M un point de Δ.

a) Justifier que $MA=MB=MC$.

b) Montrer qu'il existe un unique point I de Δ tel que $IA=ID$.

Donner ses coordonnées.

c) Déduire de ce qui précède, que les points A, B, C et D appartiennent à une même sphère (S) dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice N°6: (5POINTS) Bac –sciences expérimentales-2015(session controle)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère la sphère (S) d'équation $x^2+y^2+z^2-2x+2y-23=0$.

1/ Justifier que (S) est de centre le point $I(1,-1,0)$ et de rayon 5.

2/ Soit le point $J(-1,1,1)$ et soit (P) l'ensemble des points $M(x,y,z)$ tels que $\overrightarrow{JI}\cdot\overrightarrow{JM}=0$.

a) Justifier que (P) est le plan d'équation $2x-2y-z+5=0$.

b) Montrer que l'intersection de (S) et (P) est le cercle (C) de centre J et de rayon 4.

3/ Soit le point $A(-5,5,3)$ et (S') la sphère de centre A et de rayon $2\sqrt{13}$.

a) Montrer que A appartient à la droite (IJ).

b) Montrer que $AJ=6$.

4/ Soit M un point du cercle (C).

a) Justifier que le triangle AJM est rectangle en J.

b) En déduire que $AM=2\sqrt{13}$.

c) Déterminer alors l'intersection de la sphère (S') et du plan (P).

Exercice N°7: (5POINTS) Bac –sciences expérimentales-2014(session principale)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère la sphère (S) d'équation $x^2+y^2+z^2-8=0$ et le plan P d'équation $x+2y+z-6=0$.

1) a) Déterminer le centre et le rayon de la sphère (S).

   b) Montrer que le plan P coupe la sphère (S) suivant un cercle $(\mathcal{C})$ dont on précisera le centre et le rayon.

2) On donne les points A(2, 0, 2) et B(2, 2,0).

   a) Vérifier que A appartient à la sphère (S) et n'appartient pas au plan P et que B appartient au cercle $(\mathcal{C})$.

   b) Soit Q l'ensemble des points M(x, y, z) de l'espace tels que $MA = MB$.

   Montrer que Q est le plan d'équation $y = z$.

   c) Montrer que les plans P et Q se coupent suivant la droite Δ dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x=6-3\alpha \\ y=\alpha \\ z=\alpha \end{cases}$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

3) Déterminer un point C du cercle $(\mathcal{C})$ tel que ABC est un triangle équilatéral.

Exercice N°8: (5POINTS) Bac –sciences expérimentales-2014(session controle)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère l'ensemble (S) des points M(x, y, z) de l'espace tels que $x^2+y^2+z^2-2x+2y-1=0$.

1) Montrer que (S) est la sphère de centre le point $I(1,-1,0)$ et de rayon $\sqrt{3}$.

2) Soit Δ la droite passant par le point $A(0,0,3)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$.

   a) Donner un système d'équations paramétriques de la droite Δ.

   b) Montrer que l'intersection de Δ et (S) est vide.

3) Soit B le point de coordonnées (3, 0, 0).

   a) Justifier que le point B et la droite Δ déterminent un plan P.

   b) Montrer que P a pour équation cartésienne $x+y+z-3=0$.

   c) Prouver que le plan P est tangent à la sphère (S) et déterminer les coordonnées de leur point de contact.

Exercice N°1: (corrigé)

1°) a) $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}0\\-2\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}2\\2\\-8\end{pmatrix}$,

Donc $\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{BC}=\begin{vmatrix}-2 & 2\\4 & -8\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}0 & 2\\4 & -8\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}0 & 2\\-2 & 2\end{vmatrix}\vec{k}=8\vec{i}+8\vec{j}+4\vec{k}$.

Ainsi $\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}8\\8\\4\end{pmatrix}$.

b) $O\in P\cap(OA)$ ①

$\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{BC}$ est un vecteur normal de P, or $\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{BC}=4\overrightarrow{OA}$, donc $\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{OA}$ sont colinéaires, d'où $\overrightarrow{OA}\perp P$ ②

d'après ① et ② ; on conclut que (OA) est perpendiculaire au plan P en O.

c) On a : $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}2\\2\\-8\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}8\\8\\4\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}8\\8\\4\end{pmatrix}$ ainsi,

$$d(O,(BC))=\frac{\left\|\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{BC}\right\|}{\left\|\overrightarrow{BC}\right\|}=\frac{\sqrt{8^2+8^2+4^2}}{\sqrt{2^2+2^2+8^2}}=\sqrt{2}.$$

2) $x^2+y^2+z^2-4x-4y-2z-2=0$ signifie $(x-2)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=2+2^2+2^2+1^2$

signifie $(x-2)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=11>0$

Donc (S) est la sphère de centre $A(2,2,1)$ et de rayon $R=\sqrt{11}$.

3) a) $OA=\sqrt{2^2+2^2+1^2}=3$.

b) D'après la question **1-b)**, O est le projeté orthogonal de A sur le plan P,

donc $d(A,P)=OA=3<R=\sqrt{11}$.

Ainsi ; P coupe la sphère (S) suivant un cercle de centre O et de rayon

$r=\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{\sqrt{11}^2-3^2}=\sqrt{11-9}=\sqrt{2}$.

c) $(BC)\subset P$; $C\subset P$ et $d(O,(BC))=\sqrt{2}$ donc (BC) est tangente au cercle C.

4) a) On a : $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}2\\2\\-8\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}1\\1\\-4\end{pmatrix}$, d'où $\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{BH}$,

donc $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BH}$ sont colinéaires, ainsi $H\in(BC)$ $(\star)$.

$OH=\sqrt{1^2+(-1)^2+0^2}=\sqrt{2}=r$ $(\star\star)$.

D'apres $(\star)$ et $(\star\star)$, on conclut que $(BC)\cap C=\{H\}$.

Exercice N°2: **(corrigé)**

1°) a) ⇨ $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OG} = 3\vec{i}+3\vec{j}+3\vec{k}$. Ainsi $E(3,3,3)$.

⇨ $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OG} = 3\vec{i}+3\vec{k}$. Ainsi $D(3,0,3)$.

b) ⇨ $\Omega = C * D$ signifie $\Omega\left(\frac{x_C+x_D}{2},\frac{y_C+y_D}{2},\frac{z_C+z_D}{2}\right)$ donc $\Omega\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$.

2) a) $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}0\\3\\3\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}-3\\0\\3\end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{AE}\wedge\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}9\\-9\\9\end{pmatrix}$.

b) $V_{(OAEG)} = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AE}\wedge\overrightarrow{AG}\right).\overrightarrow{AO}\right|$ avec $\overrightarrow{AO}\begin{pmatrix}-3\\0\\0\end{pmatrix}$

$= \frac{1}{6}\left|-27+0+0\right| = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}$.

3) a) $\overrightarrow{AE}\wedge\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}9\\-9\\9\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de P et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}3\\-3\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (CD)

Donc $\overrightarrow{AE}\wedge\overrightarrow{AG} = 3\overrightarrow{CD}$, d'où $\overrightarrow{AE}\wedge\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires, ainsi $P\perp(CD)$.

b) Soit $P' : x - y - z - 3 = 0$

⇨ $3 - 0 + 0 - 3 = 0$ donc $A \in P'$.

⇨ $3 - 3 + 3 - 3 = 0$ donc $E \in P'$.

⇨ $0 - 0 + 3 - 3 = 0$ donc $G \in P'$.

Or $(AEG) = P = P'$, ainsi $P : x - y + z - 3 = 0$.

Autrement : $\overrightarrow{AE}\wedge\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}9\\-9\\9\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de P, donc $P : 9x - 9y + 9z + d = 0$,

Or $A(3,0,3) \in P$ signifie $9\times3-9\times0+\times0+d=0$ signifie $d=-27$

Donc $P : 9x - 9y + 9z - 27 = 0$ signifie $P : x - y + z - 3 = 0$.

4) a) $(S) : x^2+y^2+z^2-3x-3y-3z+6=0$

signifie $(S) : \left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+\left(z-\frac{3}{2}\right)^2 = -6+\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2$

signifie $(S):\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+\left(z-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$.

Ainsi (S) est une sphère de centre $\Omega\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$ et de rayon $R=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

b) $\Omega\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$, $P: x-y+z-3=0$ donc $d(\Omega,P)=\frac{\left|\frac{3}{2}-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}-3\right|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}}=\frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$d(\Omega,P)=R$. Ainsi (S) et P sont tangents en H.

Soit $H(x,y,z)$ le projeté orthogonal de Ω sur P.

Signifie $\begin{cases} H\in P \\ H\in D\left(\Omega,\vec{n}_P\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right)\end{cases}$ signifie $\begin{cases} x-y+z-3=0 \\ x=\frac{3}{2}+\alpha \\ y=\frac{3}{2}-\alpha \\ z=\frac{3}{2}+\alpha \end{cases}$ $\alpha\in\mathbb{R}$

signifie $\begin{cases} \frac{3}{2}+\alpha-\frac{3}{2}+\alpha+\frac{3}{2}+\alpha-3=0 \\ x=\frac{3}{2}+\alpha \\ y=\frac{3}{2}-\alpha \\ z=\frac{3}{2}+\alpha \end{cases}$ signifie $\begin{cases} \alpha=\frac{1}{2} \\ x=2 \\ y=1 \\ z=2 \end{cases}$ Ainsi $H(2,1,2)$

Exercice N°3: (corrigé)

1) Les plans P et Q ont le même vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ et $-5\neq 7$ alors ils sont strictement parallèles.

2) a) $M(x,y,z)\in S \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=5$. Il en résulte que S est la sphère de centre $I(1,2,1)$ et de rayon $R=\sqrt{5}$.

b) $d(I,P)=\sqrt{3}<R$, on en déduit que S et P sont sécants suivant le cercle $\mathscr{C}$ de rayon $\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{2}$ et puisque $J\in P$ et $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ est normal à P donc J est le projeté orthogonal de I sur P par suite J est le centre de $\mathscr{C}$.

c) $d(I,Q)=3\sqrt{3}>R$, on en déduit que $S\cap Q=\varnothing$.

3) a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\2\\4\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix}$.

b) Soit $M(x,y,z)$.

$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x\\y\\z-1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix}$ donc $\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{AM}=2x+2y-2z+2=2(x+y-z+1)$.

4) $\begin{cases} M\in S \\ V_{(ABCM)}=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M\in S \\ \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{AM}\right|=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M\in S \\ \frac{1}{6}\left|2(x+y-z+1)\right|=2\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} M\in S \\ x+y-z-5=0 \text{ ou } x+y-z+7=0\end{cases} \Leftrightarrow M\in(S\cap P)\cup(S\cap Q) \Leftrightarrow M\in S\cap P=\mathscr{C}$

Exercice N°4: **(corrigé)**

1) a) $E(1,0,1)$, $I\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ et $J\left(0,\frac{1}{2},1\right)$.

b) $\overrightarrow{OI}\begin{pmatrix}1\\ \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OJ}\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{2}\\ 1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{OI}\wedge\overrightarrow{OJ}\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\ -1\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$, il en résulte que $\overrightarrow{OI}\wedge\overrightarrow{OJ}=\frac{1}{4}\vec{u}-\vec{v}+\frac{1}{2}\vec{w}=\frac{1}{4}\left(\vec{u}-4\vec{v}+2\vec{w}\right)$.

2) a) $A_{OIJ}=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{OI}\wedge\overrightarrow{OJ}\right\|=\frac{\sqrt{21}}{8}$.

b) $\overrightarrow{OE}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$ et $V_{OIJ}=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{OI}\wedge\overrightarrow{OJ}\right).\overrightarrow{OE}\right|=\frac{1}{8}$.

c) La distance EH est la langueur de la hauteur issue de E dans le tétraèdre OIJE.

Or $V_{OIJ}=\frac{1}{3}\times A_{OIJ}\times EH$ donc $EH=\frac{3V_{OIJ}}{A_{OIJ}}=\frac{\sqrt{21}}{7}$.

3) $M(x,y,z)\in S\Leftrightarrow(x-1)^2+y^2+(z-1)^2=\frac{3}{7}$. Il en résulte que S est la sphère de centre $E(1,0,1)$ et de rayon $R=\frac{\sqrt{21}}{7}$. Or H est le projeté orthogonal de E sur (OIJ), il en résulte que $d(E,(OIJ))=EH=\frac{\sqrt{21}}{7}=R$, on en déduit que S est tangente à (OIJ) en H.

Exercice N°5: **(corrigé)**

1/ a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\ -2\\ 2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\ -2\\ -2\end{pmatrix}\neq\vec{0}$ donc les points A, B et C ne sont pas alignés par suite ils déterminent un plan.

b) $1+1+0-2=0$ donc $A\in(P)$.

$1-1+2-2=0$ donc $B\in(P)$.

$0+1+1-2=0$ donc $C\in(P)$.

Il en résulte que $x+y+z-2=0$ est une équation de (P).

c) $1+1+4-2=2\neq0$ donc $D\notin(P)$.

2/ a) $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CA}=1-1=0$ donc $\overrightarrow{CB}\perp\overrightarrow{CA}$ par suite le triangle ABC est rectangle en C.

b) le triangle ABC est rectangle en C et $H=A*B$ donc c'est le centre du cercle $\mathscr{C}$.

3/ Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$ est un normal à (P) donc il est directeur de Δ de plus le point $H=A*B$ donc $H(1,0,1)$, on en déduit qu'une représentation paramétrique de Δ est $\begin{cases}x=1+\alpha\\ y=\alpha\\ z=1+\alpha\end{cases}$; $\alpha\in\mathbb{R}$.

4/ a) Le point H est le centre du cercle $\mathscr{C}$, circonscrit au triangle ABC et Δ est la perpendiculaire au plan (ABC) en H donc la droite Δ est l'axe du cercle $\mathscr{C}$ et puisque M est un point de Δ donc $MA = MB = MC$.
Ou bien : $M \in \Delta$ donc $M(1+\alpha, \alpha, 1+\alpha)$.

$$\begin{cases} MA^2 = \alpha^2 + (\alpha-1)^2 + (\alpha+1)^2 \\ MB^2 = \alpha^2 + (\alpha+1)^2 + (\alpha-1)^2 \\ MC^2 = (\alpha+1)^2 + (\alpha-1)^2 + \alpha^2 \end{cases} \text{ donc } MA = MB = MC.$$

b) $I \in \Delta$ donc $I(1+\alpha, \alpha, 1+\alpha)$ $IA = ID \Leftrightarrow IA^2 = ID^2 \Leftrightarrow$

$(\alpha+1)^2 = (\alpha-3)^2 \Leftrightarrow \alpha = 1$, il en résulte qu'il existe un unique point $I(2,2,2)$ de Δ tel que $IA = ID$.

c) Le point $I \in \Delta$, d'après a) et b), $IA = IB = IC = ID$, il en résulte que les points A, B, C et D appartiennent à la sphère (S) de centre I et de rayon $IA = \sqrt{5}$.

Exercice N°6: **(corrigé)**

1/ $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 23 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 25$. Il en résulte que (S) est la sphère de centre $I(1,-1,0)$ et de rayon $R = 5$.

2/ a) $\overrightarrow{JI}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{JM}\begin{pmatrix} x+1 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix}$. $M \in (P) \Leftrightarrow \overrightarrow{JI}.\overrightarrow{JM} = 0 \Leftrightarrow 2x - 2y - -z + 5 = 0$. Il en résulte que (P) est le plan d'équation $2x - 2y - -z + 5 = 0$.

b) $d(I,P) = \dfrac{|2+2+5|}{\sqrt{4+4+1}} = 3 < 5$ donc (S) et (P) sont sécants suivant un cercle (C) de rayon $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{25-9} = 4$ et de centre le projeté orthogonal de I sur (P), or $J \in (P)$ et $\overrightarrow{JI}$ est normal à (P), on en déduit que J est le projeté orthogonal de I sur (P), par suite J est le centre de (C).

3/ a) $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{JI}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AI} = 3\overrightarrow{JI}$ par suite les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{JI}$ sont colinéaires, d'où $A \in (IJ)$.

b) $AJ = \sqrt{16+16+4} = 6$.

4/ a) On sait que $\begin{cases} A \in (IJ) \\ (IJ) \perp (P) \text{ en } J \\ M \in (C) \subset (P) \end{cases}$. il en résulte que le triangle AJM est rectangle en J.

b) $AM = \sqrt{AJ^2 + JM^2} = \sqrt{36+16} = 2\sqrt{13}$.

c) Pour tout M du cercle (C), $AM = 2\sqrt{13}$ donc $M \in (S')$, il en résulte que $(C) \subset (S')$ et puisque $(C) \subset (P)$, on en déduit que l'intersection de (P) et (S') est le cercle (C).

Exercice N°7: **(corrigé)**

1) a) $M(x,y,z) \in S \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 8$ donc S est une sphère de centre O et de rayon $R = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

b) $d(O,P) = \dfrac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6} < 2\sqrt{2}$ donc P coupe S suivant un cercle de rayon

$r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{8-6} = \sqrt{2}$ et de centre I le projeté orthogonal de O sur P.

Soit D la droite perpendiculaire à P passant par O donc $D:\begin{cases} x=t \\ y=2t, t\in\mathbb{R} \\ z=t \end{cases}$

$I(x,y,z)\in D\cap P \Leftrightarrow \begin{cases} x=t \\ y=2t \\ z=t \\ x+2y+z-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=t \\ y=2t \\ z=t \\ 6t-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ x=1 \\ y=2 \\ z=1 \end{cases}$, il en résulte que $I(1,2,1)$.

2) a) $\begin{cases} 2^2+0^2+2^2-8=0 \\ 2+0+2-6=-2\neq 0 \end{cases}$ donc $A\in S$ et $A\notin P$.

$\begin{cases} 2^2+2^2+0^2-8=0 \\ 2+4+0-6=0 \end{cases}$ donc $B\in S$ et $B\in P$ donc B appartient à ($\mathscr{C}$).

b) $M(x,y,z)\in Q \Leftrightarrow MA=MB \Leftrightarrow MA^2=MB^2$

$\Leftrightarrow (x-2)^2+y^2+(z-2)^2=(x-2)^2+(y-2)^2+z^2 \Leftrightarrow y=z.$

c) $\overrightarrow{n_P}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\wedge\overrightarrow{n_Q}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\neq\vec{0}$ donc P et Q sont sécants suivant une droite $\Delta:\begin{cases} x+2y+z-6=0 \\ y=z \end{cases}$, on pose

$y=\alpha\in\mathbb{R}$, on aura $\Delta:\begin{cases} x=-3\alpha+6 \\ y=\alpha \\ z=\alpha \end{cases}, \alpha\in\mathbb{R}.$

3) ABC est équilatéral si et seulement si $CA=CB=AB$.
$CA=CB$ donc C est un point de Q et C appartient à ($\mathscr{C}$) qui est contenu dans P donc C est un point de Δ, il en résulte qu'il existe $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que $C(-3\alpha+6,\alpha,\alpha)$.

Ainsi pour que ABC soit équilatéral , il suffit que $CA=AB \Leftrightarrow CA^2=AB^2 \Leftrightarrow$
$(4-3\alpha)^2+\alpha^2+(\alpha-2)^2=8 \Leftrightarrow \alpha=2$ ou $\alpha=\frac{6}{11}$. soit $C(0,2,2)$.

Exercice N°8: (corrigé)

1) $M(x,y,z)\in(S) \Leftrightarrow (x-1)^2+(y+1)^2+z^2=3$ donc (S) est la sphère de centre $I(1,-1,0)$ et de rayon $\sqrt{3}$.

2) a) $\Delta:\begin{cases} x=t \\ y=-t, t\in\mathbb{R}. \\ z=3 \end{cases}$

b) $M(x,y,z)\in(S)\cap\Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x=t \\ y=-t \\ z=3 \\ x^2+y^2+z^2-2x+2y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=t \\ y=-t \\ z=3 \\ t^2-2t+4=0 \end{cases}$ or l'équation

$t^2-2t+4=0$ n'a pas de solution car $t^2-2t+4=(t-1)^2+3>0$ donc $\Delta\cap(S)=\varnothing$.

3) a) $B\notin\Delta$ donc B et Δ déterminent un plan P.

b) $0+0+3-3=0$ donc le point A appartient au plan d'équation $x+y+z-3=0$.

$3+0+0-3=0$ donc le point B appartient au plan d'équation $x+y+z-3=0$.

Soit $C(1,-1,3)$ un point de Δ différent de A et $1-1+3-3=0$ donc le point C appartient au plan d'équation $x+y+z-3=0$ et puisque les points A, B et C déterminent le plan P donc P à pour équation $x+y+z-3=0$.

c) $d(I,P)=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$ donc P et S sont tangent en H, projeté orthogonal de I sur P.

Soit D la droite perpendiculaire à P passant par I donc $D:\begin{cases}x=\alpha+1\\ y=\alpha-1,\alpha\in\mathbb{R}\\ z=\alpha\end{cases}$

$H(x,y,z)\in D\cap P\Leftrightarrow\begin{cases}x=\alpha+1\\ y=\alpha-1\\ z=\alpha\\ x+y+z-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\alpha+1\\ y=\alpha-1\\ z=\alpha\\ 3\alpha-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=1\\ x=2\\ y=0\\ z=1\end{cases}$, il en résulte que $H(2,0,1)$.