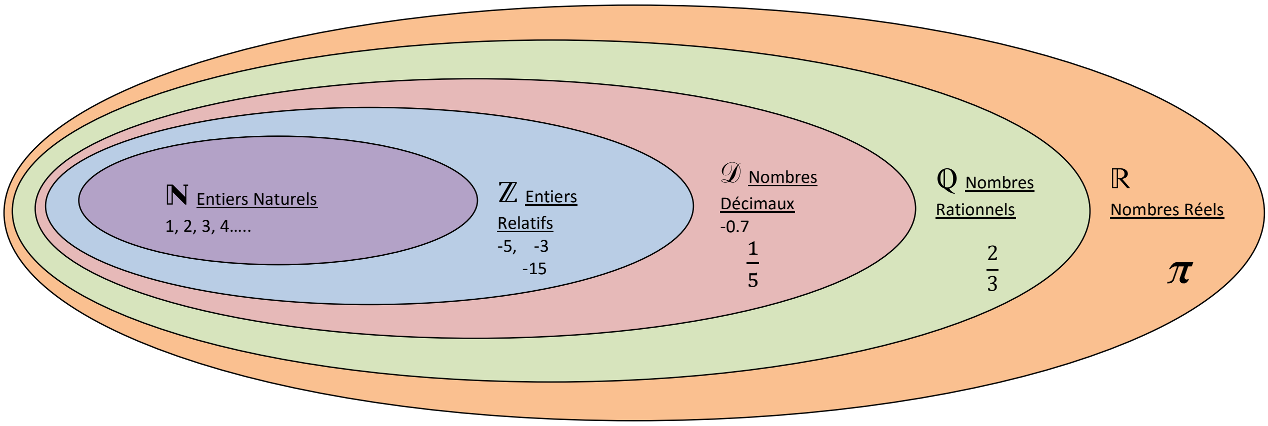
Les ensembles de nombres



RAPPEL :
Un nombre premier est un entier naturel qui admet exactement 2 diviseurs distincts entiers positifs (1 + lui-même).

6 est divisible par 6, 3, 2 et 1 ; 8 par 8, 4, 2 et 1 etc …

Liste des nombres premiers : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 …

Les Nombres Entiers

Les nombres entiers sont obtenus en ajoutant ou retranchant des unités à zéro.

Entiers supérieurs à 0 = **entiers positifs** (**entiers naturels**)

Entiers inférieurs à 0 = entiers **négatifs**

L'ensemble des entiers positifs et négatifs est l'ensemble ℤ (entiers relatifs)

Les Nombres Décimaux

- **Une fraction :** quotient de 2 nombres entiers $\frac{a}{b} = x$
  a est le **numérateur**, *b* est le **dénominateur** ($\neq$ 0).

- **Une fraction décimale :** fraction dont le dénominateur est une puissance de 10 (1, 10, 100, 1000 …)

- **Un nombre est décimal :** s'il peut s'écrire sous la forme de fraction décimale $\frac{a}{10^n}$
  12.5 est un nombre décimal car il peut s'écrire $\frac{125}{10}$
  12 est aussi décimal car peu s'écrire $\frac{120}{10}$ ou $\frac{12}{1}$

Un nombre décimal est composé d'une **partie entière** et d'une **partie décimale limitée**. Il s'écrit avec une virgule et un nombre fini de chiffres à droite de la virgule. Il est **égal à la somme de sa partie entière et de sa partie décimale**.

Exemple : $12{,}23 = \frac{1223}{10^2} = \frac{1223}{100} = 12 + \frac{23}{10}$ Et $12{,}23 = 1223 \times 10^{-2}$

Reconnaitre si une fraction $\frac{a}{b}$ représente un nombre décimal

Définition : une fraction représente un nombre décimal si sa fraction irréductible a un dénominateur pouvant être multiplié par une puissance de 2 ou de 5. Car $10^n = 2^n \times 5^n$

Exemple : $\frac{45}{600}$ $45 = 3^2 \times 5^1$ $600 = 2^3 \times 5^2 \times 3^1$ $\frac{45}{600} = \frac{3^2 \times 5^1}{2^3 \times 5^2 \times 3^1} = \frac{3}{2^3 \times 5}$ **FRACTION DECIMALE**

Exemple : $\frac{45}{10500}$ $45 = 3^2 \times 5^1$ $10500 = 2^2 \times 5^3 \times 3^1 \times 7^1$ $\frac{45}{10500} = \frac{3^2 \times 5^1}{2^2 \times 5^3 \times 3^1 \times 7^1} = \frac{3}{2^2 \times 5^2 \times 7^1}$ **FRACTION NON DECIMALE**

Valeur d'un chiffre dans l'écriture à virgule d'un nombre décimal

La valeur d'un chiffre est donnée par sa position par rapport à la virgule.

Exemple : 205,502

10^3	10^2	10^1	10^0	,	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}
	2	0	5	,	5	0	2	

*Valeur des chiffres de la **partie entière** liée aux **puissances positives de 10***

*Valeur des chiffres **à droite de la virgule** liée aux **puissances négatives de 10***

205,502 = 2 X 10 + 5 + 5 X 0.1 + 2 X 0.001
Ou 205,502 = 20 X 10 + 5,502
Ou 205,502 = 2055 X 0.1 + 0,002

Comparer et ranger des nombres décimaux positifs

Comparer les valeurs des parties entières. Puis comparer les dixièmes, puis les centièmes, puis les millièmes.

Exemple : 3,57 < 3,583 < 3,6 < 10,01

Comparer et ranger des nombres décimaux négatifs

Comparer les valeurs des parties entières. Situer par rapport à zéro, Puis comparer les dixièmes, puis les centièmes, puis les millièmes, toujours par rapport à zéro.

Exemple : -3,3 < -2,3

Intercaler des nombres décimaux entre eux

On peut intercaler une infinité de nombres décimaux entre deux nomres décimaux.

Exemple : Entre 5,029 et 5,03 on peut intercaler 5,0295 ; 5,297 etc .....

Les Nombres Rationnels

Définition :

C'est un nombre qui comprend **une partie décimale illimitée et périodique.**

Exemple : $\frac{3}{7}$ = 0.428571428571…

- ***Si*** $\frac{a}{b} = x$ ***(le quotient de a par b)***

Alors le nombre rationnel x est la solution de l'équation $b \times x = a$

- $\frac{5}{3} = 5 \times \frac{1}{3}$

Reconnaitre des fractions égales

Définition : **Les fractions** $\frac{a}{b}$ **et** $\frac{c}{d}$ **sont égales si et seulement si** $a \times d = b \times c$

Exemple : $\frac{12}{15} = \frac{8}{10}$ 12 X 10 = 120 et 15 X 8 = 120. Ces fractions sont égales. Egalité vraie.

Trouver une fraction égale à $\frac{a}{b}$

Multiplier ou diviser son numérateur et son dénominateur par un même nombre entier relatif non nul.

$$\frac{a}{b} = \frac{a\,Xk}{bX\,k} \quad \text{ou} \quad \frac{a}{b} = \frac{a{:}k}{b{:}\,k}$$

Exemple : $\frac{12}{15} = \frac{12\,X3}{15X\,3} = \frac{36}{45}$

Trouver une fraction irréductible égale à $\frac{a}{b}$

Une fraction est irréductible lorsque le numérateur et le dénominateur n'ont aucun diviseur commun autre que 1.
Le numérateur et le dénominateur sont alors premiers entre eux.

Chercher le PGCD (Plus Grand Commun Diviseur) des nombres *a* et *b*. Diviser *a* et *b* par le PGCD.

Exemple : trouver la fraction irréductible de $\frac{440}{336}$

440 = 2^3 X 5 X 11 336 = 2^4 X 3 X 7 Le PGCD de 440 et 336 est = 2^3

$$\frac{440}{336} = \frac{2^3 \times 5 \times 11}{2^4 \times 3 \times 7} = \frac{5\,X\,11}{2\,X\,3\,X\,7} = \frac{55}{42}$$

Trouver la fraction inverse de $\frac{a}{b}$

Deux fractions sont inverses si leur produit est égal à 1.

L'inverse de la fraction $\frac{a}{b}$ est la fraction $\frac{b}{a}$ car $\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = \frac{a\,X\,b}{b\,X\,a} = \frac{ab}{ba} = 1$

Il faut donc inverser le numérateur et le dénominateur.

Exemple : l'inverse de $\frac{5}{3}$ est $\frac{3}{5}$

Comparer deux fractions

- **Les dénominateurs sont égaux** $\Longrightarrow$ comparer les numérateurs.
La fraction ayant le plus grand numérateur est la plus grande
Exemple : $\frac{27}{7} > \frac{20}{7}$ car 27 est plus grand que 20.

- **Les numérateurs sont égaux** $\Longrightarrow$ comparer les dénominateurs.
La fraction ayant le plus petit dénominateur est la plus grande.
Exemple : $\frac{2}{5} > \frac{2}{9}$ car 5 est plus petit que 9.

- **Les dénominateurs et numérateurs sont différents**

$\Longrightarrow$ réduire les fractions au même dénominateur
Exemple : $\frac{17}{27}$ et $\frac{11}{18}$ $\quad \frac{17}{27} = \frac{34}{54}$ et $\frac{11}{18} = \frac{33}{54}$ donc $\frac{34}{54} > \frac{33}{54}$ donc $\frac{17}{27} > \frac{11}{18}$

$\Longrightarrow$ calculer la valeur décimale
Exemple : $\frac{17}{27}$ et $\frac{11}{18}$ $\quad \frac{17}{27} \simeq 0.63$ et $\frac{11}{18} \simeq 0.61$ donc $\frac{17}{27} > \frac{11}{18}$

$\Longrightarrow$ comparer à des nombres simples
Exemple : $\frac{7}{15}$ et $\frac{17}{32}$ on sait que $\frac{7}{15} < \frac{1}{2}$ et que $\frac{17}{32} > \frac{1}{2}$ donc $\frac{7}{15} < \frac{17}{32}$

Intercaler une fraction entre deux fractions

Exemple : $\frac{5}{32}$ et $\frac{6}{32}$ on calcule $\frac{5}{32} = \frac{50}{320}$ et $\frac{6}{32} = \frac{60}{320}$ donc entre $\frac{5}{32}$ et $\frac{6}{32}$ on peut mettre $\frac{51}{320}$, $\frac{52}{320}$, $\frac{53}{320}$ etc ...

Trouver la partie entière d'une fraction

La partie entière d'une fraction est le plus grand nombre entier inférieur à cette fraction.

$$\frac{a}{b} = q + \frac{r}{b} \text{ soit } a = (b \times q) + r$$

Exemple : pour $\frac{178}{15}$ $\quad \frac{178}{15} = 11 + \frac{13}{15}$ $\quad 178 = (15 \times 11) + 13$

La partie entière est donc 11. Le reste r est donc le numérateur de la fraction complémentaire, inférieur à 1 : $\frac{13}{15}$

Les Nombres Réels

Ensemble des nombres pouvant correspondre à TOUS les points d'une droite.

Ils sont soit **rationnels** ($\mathbb{Q}$) soit **irrationnels** (ne peuvent pas s'écrire sous la forme d'un quotient de deux nombres entiers $\frac{p}{q}$).

Leur partie décimale est illimitée et non périodique. Il ne peut s'écrire sous forme de fraction.

Comparer des nombres réels

Ordre et opposé

$\boldsymbol{a + -a = 0}$

Deux nombres sont opposés si leur somme est égale à 0. Exemple : 6 et -6 sont opposés.

Ordre et inverse

$\boldsymbol{a \times \frac{1}{a} = 1}$ **et** $\boldsymbol{\text{si } a < b \text{ alors } \frac{1}{a} > \frac{1}{b}}$

Deux nombres sont inverses si leur produit est égal à 1. Exemple : 6 et $\frac{1}{6}$ sont opposés.

Ordre et addition

$\boldsymbol{a < b \;=\; a + c < b + c}$

En ajoutant un même nombre à *a* et *b*, on obtient le même sens d'inégalité Exemple : 5 < 7 = 5 + 3 < 7 + 3

Si $\boldsymbol{a < b}$ et $\boldsymbol{c < d}$ alors $\boldsymbol{= a + c < b + d}$

En ajoutant des membres avec le même sens d'inégalités à *a* et *b*, on obtient le même sens d'inégalité

Ordre et multiplication

$\boldsymbol{a < b \;=\; a \times c < b \times c}$

En multipliant par un même nombre positif *a* et *b*, on obtient le même sens d'inégalité

Si $\boldsymbol{a < b = a \times -c > b \times -c}$

En multipliant par un même nombre négatif *a* et *b*, le sens d'inégalité s'inverse Exemple : 5 < 7 = 5 X -3 > 7 X – 3

Ecrire un nombre rationnel non décimal sous forme décimale

Exemple : Ecrire $\frac{43}{7}$ sous forme décimale

43	7
10	6,1428571…
30	
20	
60	
40	
50	
10	
30	

Les restes successifs sont : 1, 3, 2, 6, 4, 5, 1 …
On obtient toujours la même suite. La suite décimale est donc illimitée et périodique, la suite étant 142857.

L'écriture décimale est donc : $\boldsymbol{\frac{43}{7} = 6,\overline{142857}}$

Ecrire un nombre rationnel sous forme fractionnaire

Exemple : Trouver la forme fractionnaire de $15,0\overline{32}$ (soit 15,032323232 …..)

x = 15,0323232….. — la période est la suite 32

$1000x$ = 15032,323232… — Multiplier x par une puissance de 10 de façon à englober la première période.

$10x$ = 150,32323232 — Multiplier x par une puissance de 10 de façon à obtenir la partie entière sans cette période, que la période commence après la virgule

$1000x - 10x = 15032 - 150$ Soustraire le 2e nombre du 1er (les parties après la virgule sont identiques)

$990x = 14882$

$x = \frac{14882}{990}$ Résoudre l'équation et réduire la fraction.

$x = 15.0\overline{32} = \frac{14882}{990} = \frac{7441}{495}$

Approximation décimale d'un nombre réel

Valeur approchée

Valeur approchée par défaut : $a \leqslant x \leqslant a + p$

Valeur approchée par excès : $a - p \leqslant x \leqslant a$

Exemple : $\frac{22}{7} = 3{,}1428571429...$

$3{,}1 \leqslant \frac{22}{7} \leqslant 3{,}1 + 0{,}1$ **Soit 3,1 est la valeur approchée par défaut**

$3{,}2 - 0{,}1 \leqslant \frac{22}{7} \leqslant 3{,}2$ **Soit 3,2 est la valeur approchée par excès**

Arrondi

Exemple : Pour $\frac{22}{7} = 3{,}1428571429...$

L'arrondi à l'unité près est 3

L'arrondi au dix-millième près est 3,1429 (on a arrondi au 10000e)

Troncature

Exemple : Pour $\frac{22}{7} = 3{,}1428571429...$

La troncature à l'unité près est 3

La troncature au dix-millième près est 3,1428 (on a coupé au 10000e)