PRODUIT SCALAIRE

I) Définitions

1) Norme d'un vecteur

Définition : La norme d'un vecteur $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ est le nombre réel positif $\|\vec{u}\|=AB$.

2) Produit scalaire de 2 vecteurs colinéaires

Définition : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs colinéaires. On appelle produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, le nombre réel noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$ défini par $\begin{cases} \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\| & \text{, lorsque } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont de même sens.} \\ -\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\| & \text{, lorsque } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont de sens contraire.} \end{cases}$

Conséquence : Le produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{u}$ est appelé carré scalaire de $\vec{u}$ et noté $\vec{u}^2$; par définition on a $\vec{u}^2=\|\vec{u}\|^2$.

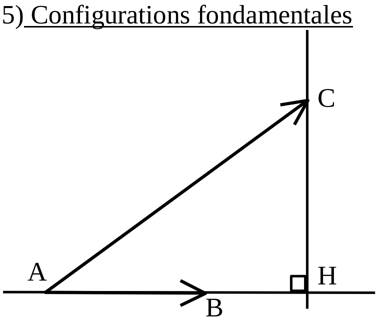
3) Produit scalaire de 2 vecteurs quelconques

Avec le projeté orthogonal	Avec le cosinus de l'angle
Définition : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls et $\vec{v}\,'$ le projeté orthogonal de $\vec{v}$ sur $\vec{u}$. On pose par définition : $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot\vec{v}\,'$.	Théorème : pour deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a : $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u},\vec{v})$

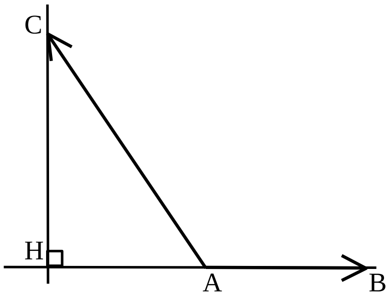
4) Orthogonalité

Définition : Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux lorsque leur produit scalaire est nul ; $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.

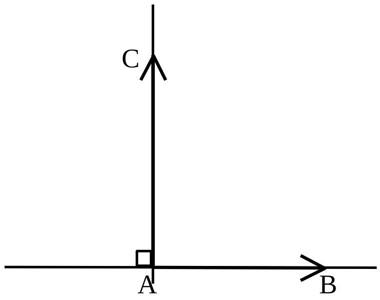
5) Configurations fondamentales



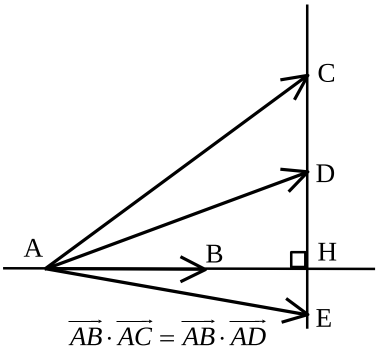
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}=AB\times AH$



$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}=-AB\times AH$



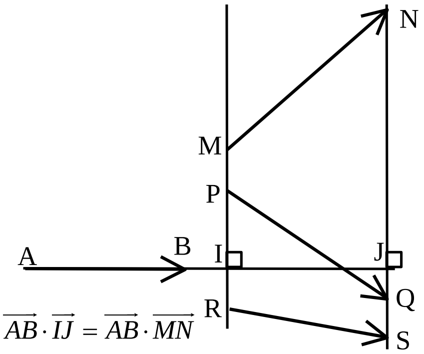
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$



$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$

$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}$

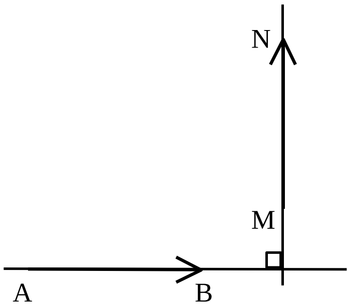
$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}$



$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MN}$

$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{PQ}$

$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{RS}$



$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MN}=0$

II) Propriétés du produit scalaire

1) Produit scalaire et opérations

Propriété : Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ trois vecteurs et α un nombre réel. On a :

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u} \;;\quad \vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w} \;;\quad \vec{u}\cdot(\alpha\vec{v})=\alpha(\vec{u}\cdot\vec{v})$$

2) Norme. Egalités remarquables

Théorème :

$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=(\vec{u}+\vec{v})^2=\vec{u}^2+\vec{v}^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}$ d'où $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right)$;

$\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=(\vec{u}-\vec{v})^2=\vec{u}^2+\vec{v}^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}$ d'où $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$;

$(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=\vec{u}^2-\vec{v}^2=\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2$.

III) Produit scalaire et analytique

Définition : Soit $(\vec{i},\vec{j})$ une base orthonormal et soit $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ deux vecteurs exprimés dans la base $(\vec{i},\vec{j})$.

On a : $\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'$

Remarques : On retrouve alors les résultats :
- $\|\vec{u}\|^2=\vec{u}^2=x^2+y^2 \Leftrightarrow \|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2}$;
- $AB=\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$.

IV) Cercle de diamètre [AB]

1) Caractérisation du cercle de diamètre [AB] avec le produit scalaire

Théorème : Le cercle de diamètre [AB] est l'ensemble des points M du plan tels que : $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$.

2) Equation cartésienne d'un cercle dans un repère orthonormé

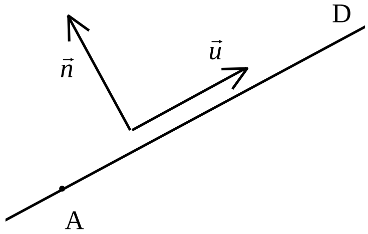
Théorème :
- Le cercle de centre ❹ ($x_❹$; $y_❹$) et de rayon r a pour équation : $(x-x_\Omega)^2+(y-y_\Omega)^2=r^2$
- Le cercle de diamètre [AB] a pour équation $(x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)=0$.

Théorème : Tout cercle a une équation cartésienne de la forme : $x^2+y^2+ax+by+c=0$.

Remarque : L'équation d'un cercle est donnée ; pour déterminer son centre et son rayon, on utilise la forme canonique d'un trinôme du second degré pour écrire l'équation sous la forme $(x-x_\Omega)^2+(y-y_\Omega)^2=r^2$.

V) Droite et vecteur normal

1) Vecteur normal à une droite



Définition : Etant donné une droite D, tout vecteur non nul orthogonal à un vecteur directeur de D est appelé vecteur normal à D.

2) Equation d'une droite définie par un point A et un vecteur normal $\vec{n}(a;b)$

Théorème : Soit A un point et un vecteur non nul $\vec{n}$. L'ensemble des points M du plan tels que $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AM}=0$ est la droite de vecteur normal $\vec{n}$ et passant par A.

Théorème : soit $\vec{n}(a;b)$ un vecteur non nul avec a ☏ 0 ou b ☏ 0.
- Une droite admettant $\vec{n}(a;b)$ comme vecteur normal a une équation de la forme $ax+by+c=0$, où c est un nombre réel.
- Réciproque : toute droite dont une équation est de la forme $ax+by+c=0$ admet le vecteur $\vec{n}(a;b)$ comme vecteur normal.

Remarque : Cette définition par vecteur normal est très pratique pour les hauteurs et médiatrices d'un triangle.