Université Mohammed V

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

& d'Informatique

Rabat, Maroc

Cours d'Analyse 4

Zine El Abidine ABDELALI

Table des matières

CHAPITRE 1

Notions sur la topologie de $\mathbb{R}$

1. Rappel de quelques propriétés de $\mathbb{R}$.

Proprieté 1.1. ***(Caractérisation de $\mathbb{R}$) L'ensemble $\mathbb{R}$ possède les propriétés suivantes :***

1) $(\mathbb{R}, +, ., \leq)$ ***est un corps comutatif totalement ordonné,***

2) $\mathbb{R}$ ***vérifie la propriété de la borne supérieure,***

3) $\mathbb{R}$ ***est un corps archimédien.***

Exercices 1.1. *1) Déduire de la propriété **1.1**, que $\mathbb{R}$ vérifie la propriété de la borne inférieure.*

2) Montrer que si $(u_n)_n$ est une suite croissante majorée (resp. décroissante minorée), alors elle est convergente et on a $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ (resp. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$).

3) Vérifier que la suite $(1/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

Remarque 1.1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on peut définir :

1) La valeur absolue $|x| = \max\{-x, x\}$.

• L'existence de la valeur absolue découle de 1) propriété **1**.1.

2) La partie entière $[x]$ qui n'est autre que l'unique entier relatif vérifiant $[x] \leq x < [x] + 1$.

• L'existence de la partie entière découle de 2) propriété **1**.1, et le fait que $\mathbb{N}$ est bien-ordonné.

Définition 1.1. Un sous ensemble A de $\mathbb{R}$ est dit dense dans $\mathbb{R}$ si tout élément de $\mathbb{R}$ est une limite d'une suite d'éléments de A.

Proposition 1.1. $\mathbb{Q}$ ***dense dans*** $\mathbb{R}$***.***

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$, alors on a

$$\frac{[10^n \cdot x]}{10^n} \leq x < \frac{[10^n \cdot x] + 1}{10^n},$$

ainsi

$$x = \lim_{n\to\infty} \frac{[10^n \cdot x]}{10^n}. \square$$

Exercices 1.2. *1) Montrer que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dense dans $\mathbb{R}$.*

2) Montrer q'un sous ensemble A de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si, et seulement si, tout intervalle, non vide, $]a, b[$ de $\mathbb{R}$ contient un élément de A.

3) Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, si $x < y$, alors $]x, y[$ contient une infinité de rationnels et une infinité d'irrationnels.

2. Théorème de Bolzano-Weierstrass.

Définition 1.2. Soit $(u_n)_n$ une suite réelle, on appelle sous suite extraite de $(u_n)_n$, toute suite de la forme $(u_{\sigma(n)})_n$ où $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est une application strictement croissante.

Remarque 1.2. 1) On a pour tout entier n, $\sigma(n) \geq n$.

2) On a $(u_n)_n$, $(u_{2n})_n$, $(u_{2n+1})_n$, $(u_{3n})_n$, $(u_{3n+1})_n$, $(u_{3n+2})_n$ sont des sous suites extraites de la suite $(u_n)_n$.

3) Si $(k_n)_n$ est une suite d'entier strictement croissante, alors $(u_{k_n})_n$ est une sous suite extraite de $(u_n)_n$.

4) Une sous suite extraite d'une sous suite extraite de $(u_n)_n$ est une sous suite extraite de $(u_n)_n$.

Proposition 1.2. ***Soit $(u_n)_n$ une suite réelle, on a***

1) si $(u_n)_n$ converge vers une limite l, alors toute sous suite extraite de $(u_n)_n$ converge vers l.

2) si $(u_n)_n$ tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$), alors toute sous suite extraite tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Démonstration. Exercice. $\square$

Remarque 1.3. 1) Si deux sous suites extraites d'une suite $(u_n)_n$ convergent vers deux limites différentes, alors la suite est divergente.

2) La proposition précédente donne une méthode pour démontrer que certaines suites ne sont pas convergentes. Par exemple la suite $((-1)^n)_n$ est divergente, car

$$\lim_{n\to\infty} u_{2n} = 1 \neq -1 = \lim_{n\to\infty} u_{2n+1}.$$

Corollaire 1.1. *Soit $(u_n)_n$ une suite réelle, Alors $(u_n)_n$ tend vers une limite, finie ou infinie, l si et seulement si $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ tendent vers l.*

Démonstration. Exercice. □

Une propriété équivalente à celle de la borne supérieure et le théorème suivant :

Théorème 1.1. ***(de Bolzano-Weierstrass) Toute suite réelle bornée admet une sous suite extraite convergente.***

Démonstration. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée. Il existe un segment $[m, M]$ qui contient tous les éléments de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soient $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ les deux suites définies par $a_0 = m,\ b_0 = M$, et si $\{k \in \mathbb{N}\ :\ u_k \in [a_n, \frac{a_n+b_n}{2}]\}$ est infini

$$a_{n+1} = a_n \text{ et } b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$$

dans l'autre cas

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \text{ et } b_{n+1} = b_n$$

alors on a $(a_n)_n$ est une suite croissante, $(b_n)_n$ est une suite décroissante et $b_n - a_n = \frac{M-m}{2^n} \to 0$. Donc $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ convergent vers une même limite l, en effet, l c'est $\sup\{a_n\ :\ n \in I\!N\}$. Rappelons que pour tout entier n l'intervalle $[a_n, b_n]$ contient une infinité de termes de la suite (u_k). Posons $k_0 = 0$ et choisisons pour tout $n > 0$ un entier k_n vérifiant

$$k_n > \max\{k_0, ..., k_{n-1}\} \text{ et } u_{k_n} \in [a_n, b_n]$$

Alors $(u_{k_n})_n$ est une sous suite extraite de $(u_n)_n$ et on a $\lim\limits_{n\to\infty} u_{k_n} = l$. □

3. Suites de Cauchy dans $\mathbb{R}$.

Définition 1.3. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée suite de Cauchy si elle vérifie la propriété suivante, appelée critère de Cauchy :

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}\ :\ \forall n \geq N,\ \forall m \geq N,\ |u_n - u_m| < \varepsilon.$$

Le critère de Cauchy peut être aussi s'énoncer ainsi :

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}\ :\ \forall n \geq N,\ \forall p \geq 0,\ |u_{n+p} - u_n| < \varepsilon.$$

Exercices 1.3. *Vérifier qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy si, et seulement si $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = 0$ où*

$$M_n = \sup_{p\in\mathbb{N}} |u_{n+p} - u_n| = 0.$$

Attention 1.1. La suite $(\ln(n+1))_n$, est une suite qui vérifie pour chaque entier p fixe

$$|u_{n+p} - u_n| = |\ln(\frac{n+p+1}{n+1})|$$

donc

$$\lim_{n\to\infty} |u_{n+p} - u_n| = 0$$

Mais $(\ln(n+1))_n$ n'est pas une suite de Cauchy car par exemple on a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$|u_{2n+1} - u_n| = \ln(2) \not\to 0.$$

Proposition 1.3. ***Toute suite convergente est une suite de Cauchy.***

Démonstration. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente vers une limite l, alors on a :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}\ :\ \forall n \geq N,\ |u_n - l| < \varepsilon$$

par suite

$$\forall n \geq N,\ \forall m \geq N,\ |u_n - u_m| \leq |u_n - l| + |l - u_m| < 2\varepsilon. \ \square$$

Proposition 1.4. ***Toute suite de Cauchy est bornée.***

Démonstration. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. Pour $\varepsilon = 1$, il existe un entier N tel que pour tout $n \geq N$, $|u_n - u_N| < 1$ ainsi $|u_n| \leq 1 + |u_N|$. D'où pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $|u_n| \leq M$, où $M = \max\{|u_0|, |u_1|, ..., |u_{N-1}|, |u_N| + 1\}$. $\square$

Théorème 1.2. ***Toute suite de Cauchy est convergente.***

Démonstration. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. Donc elle est bornée, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass il existe une sous suite extraite $(u_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers une limite l. Montrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l. Soit $\varepsilon > 0$, alors il existe un entier N_1 tel que

$$\forall n \geq N_1,\ |u_{\sigma(n)} - l| < \varepsilon$$

il existe aussi un entier N_2 tel que

$$\forall n, m \geq N_2,\ |u_n - u_m| < \varepsilon$$

Posons $N = \max\{N_1, N_2\}$, pour tout $n \geq N$ on a :

$$|u_n - l| \leq |u_n - u_{\sigma(N)}| + |u_{\sigma(N)} - l| < 2\varepsilon. \ \square$$

On dit alors que $\mathbb{R}$ est un **espace complet**.

Exemples 1.1. *L'espace* $\mathbb{Q}$ *n'est pas complet.*

4. Notions sur la topologie de $\mathbb{R}$.

4.1. Voisinages, ouverts et fermés dans $\mathbb{R}$.

Définition 1.4. **Soit $x \in \mathbb{R}$, un voisinage V de x est un sous ensemble de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle centré en x.**

Remarque 1.4. 1) Un ensemble V est un voisinage d'un élément x si, et seulement si, V contient un intervalle ouvert contenant x.

2) Si V est un voisinage de x et $W \supset V$, alors W est un voisinage de x.

3) Une intersection finie de voisinage de x est un voisinage de x.

4) Une réunion quelconque de voisinages de x est un voisinage de x.

Définition 1.5. **1) Un sous ensemble O de $\mathbb{R}$ est dit ouvert s'il est voisinage de chaqun de ses points.**

2) Un sous ensemble F de $\mathbb{R}$ est dit fermé si son complémentaire $\mathbb{R} \setminus F$ est un ouvert.

Exemples 1.2. *1) L'ensemble* $\mathbb{R}$ *et l'ensemble vide sont des ouverts et des fermés.*

2) Les ouverts sont stables par réunion quelconque et par les intersections finies.

3) Un intervalle ouvert est un ouvert.

4) Une réunion quelconque d'intervalles ouverts est un ouvert.

5) Un intervalle fermé est un fermé. En effet, $\mathbb{R} \setminus [a, b] =]-\infty, a[\cup]b, \infty[$ *est un ouvert.*

6) Un singleton est un fermé.

7) Un ensemble fini est un fermé.

8) L'ensemble $\mathbb{Z}$ *est un fermé dans* $\mathbb{R}$.

Exercices 1.4. *Soit E un sous ensemble de* $\mathbb{R}$.

1) Montrer que l'ensemble $\mathbf{F}$ *des fermés de* $\mathbb{R}$ *contenant E est non vide et* $\bigcap_{F \in \mathbf{F}} F$ *est le plus petit fermé contenant E.*

2) Montrer que l'ensemble $\mathbf{O}$ *des ouverts de* $\mathbb{R}$ *contenus dans E est non vide et* $\bigcup_{O \in \mathbf{O}} O$ *est le plus grand ouvert contenu dans E.*

Définition 1.6. **1) L'intérieur d'un ensemble E, noté $\overset{\circ}{\mathbf{E}}$ est le plus grand ouvert contenu dans E.**

2) L'adhérence d'un ensemble E, noté $\overline{\mathbf{E}}$ est le plus petit fermé contenant E.

4.2. Ouverts et fermés d'une partie de $\mathbb{R}$. Soit A un sous ensemble de $\mathbb{R}$ et soit $x \in A$, alors on a la définition suivante :

Définition 1.7. 1) Un voisinage V de x dans A est une intersection d'un voisinage W de x dans $\mathbb{R}$ et A.

2) Un ouvert O dans A est une intersection d'un ouvert U dans $\mathbb{R}$ et A.

3) Un fermé F dans A est une intersection d'un fermé H dans $\mathbb{R}$ et A.

Remarque 1.5. 1) Toutes les propriétés vérifies par les voisinages (resp. ouverts, fermés) restent vraies pour les voisinages (resp. ouverts, fermés) relativement à un sous ensemble de $\mathbb{R}$.

2) Si A est un sous ensemble fermé dans $\mathbb{R}$, alors un sous ensemble F de A et fermé dans A si, et seulement si, il est fermé dans $\mathbb{R}$.

3) Si A est un sous ensemble ouvert dans $\mathbb{R}$, alors un sous ensemble O de A et ouvert dans A si, et seulement si, il est ouvert dans $\mathbb{R}$.

4) En général les voisinages (resp. ouverts, fermés) relativement à un sous ensemble de $\mathbb{R}$ ne sont pas nécessairement des voisinages (resp. ouverts, fermés) dans $\mathbb{R}$.

4.3. Limites et continuité.

Proposition 1.5. ***Soit $(u_n)_n$ une suite réelle et soit $l \in \mathbb{R}$, alors on a l'équivalence :***

1) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l$***,***

2) pour tout voisinage V de l, il existe un entier $N \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n \geq N$, $u_n \in V$.

Définition 1.8. Soit f une application définie d'une partie A de $\mathbb{R}$ a valeurs réelles. Soit $x_0 \in \overline{A}$,

1) on dit que f converge vers un élément $y_0 \in \mathbb{R}$ lorsque x converge vers x_O, et on note $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$, si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ :\quad \forall x \in A,\ |x - x_0| < \eta \\ \Longrightarrow |f(x) - y_0| < \varepsilon,$$

2) si $x_0 \in A$, f est dite continue en x_0 si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$,

3) f est continue sur A, si f est continue en tout point x de A.

Proposition 1.6. ***Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une applications. Alors***

1) Pour un élément $x \in A$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) f est continue au point x,

b) l'image réciproque de tout voisinage de $f(x)$ est un voisinage de x dans A,

c) pour toute suite $(u_n)_n$ dans A qui converge vers x, la suite $(f(u_n))_n$ converge vers $f(x)$

2) Les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) f est continue sur A,

b) l'image réciproque de tout ouvert est un ouvert de A,

c) l'image réciproque de tout fermé est un fermé de A.

Remarque 1.6. On a les critères pratiques suivants pour reconnaître certains ouverts et fermés de $\mathbb{R}$.

1) Si F est un fermé dans $\mathbb{R}$, si de plus f_1, f_2, ..., f_n sont des applications, à valeurs réelles, continues sur F, alors l'ensemble $\{x \in F \ : \ f_i \geq 0, \ 1 \leq i \leq n\}$ est un fermé dans $\mathbb{R}$.

2) Si O est un ouvert dans $\mathbb{R}$, si de plus f_1, f_2, ..., f_n sont des applications, à valeurs réelles, continues sur O, alors l'ensemble $\{x \in O \ : \ f_i > 0, \ 1 \leq i \leq n\}$ est un ouvert dans $\mathbb{R}$.

4.4. Parties fermées et suites.

Proposition 1.7. ***Soit F sous ensemble de $\mathbb{R}$, alors on a l'équivalence :***

1) F est fermé dans $\mathbb{R}$,

2) pour toute suite $(u_n)_n \subseteq F$, qui converge vers une limite $l \in \mathbb{R}$, on a $l \in F$.

Démonstration. Soit F un fermé dans $\mathbb{R}$, et supposons que $(u_n)_n$ une suite d'éléments de F qui converge dans $\mathbb{R}$ vers une limite l. Supposons que $l \notin F$, donc l est in élément de l'ouvert $\mathbb{R} \setminus F$. Donc il existe un entier N, tel que pour tout $n \geq N$, $u_n \in \mathbb{R} \setminus F$. En particulier $u_N \in \mathbb{R} \setminus F$, absurde.

Réciproquement, Supposons que 2) est vraie et que F n'est pas fermé, donc $\mathbb{R} \setminus F$ n'est pas un ouvert. Donc il existe $a \in \mathbb{R} \setminus F$ tel que aucun intervalle centré en a n'est contenu dans $\mathbb{R} \setminus F$. Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $F \cap]a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}[$ est non vide, soit x_n un élément quelconque de cette intersection. La suite $(x_n)_n$, est une suite d'éléments de F qui converge vers $a \notin F$, ce qui est absurde. $\square$

Exercices 1.5. *I) Soit A une partie de $\mathbb{R}$, montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1) $x \in \overline{A}$,

2) x est une limite d'une suite d'éléments de A

3) $\inf\{|x-a| \ : \ a \in A\} = 0$.

II) Un sous ensemble A de $\mathbb{R}$ est dit ***complet*** *si toute suite de Cauchy dans A est convergente dans A. Montrer A est complet si et seulement si A est fermé.*

Définition 1.9. Soit F un ensemble fermé un sous ensemble A de F est dit **dense** dans F si $\overline{A} = F$.

Exemples 1.3. *1) L'ensemble $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.*

2) L'ensemble $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ est dense dans $[0,1]$.

5. Applications continues et parties compacts.

Définition 1.10. Un sous ensemble K de $\mathbb{R}$ est dit compact si toute suite d'éléments de K admet une sous suite extraite qui converge dans K.

Proposition 1.8. ***Les compact dans $\mathbb{R}$ sont les parties fermées bornées.***

Démonstration. Soit K est une parties fermée bornée de $\mathbb{R}$. Si $(u_n)_n$ est une suite d'élément de K, alors $(u_n)_n$ est bornée donc elle possède une sous suite extraite $(u_{\sigma(n)})_n$ convergente dans $\mathbb{R}$. L'ensemble K est fermé donc la limite de $(u_{\sigma(n)})_n$ est un élément de K, ainsi K est un compact.
Inversement, supposons que K est un compact, alors K est borné sinon il existe alors une suite d'éléments de K qui diverge vers ∞ ou $-\infty$. Une telle suite ne possède aucune sous suite extraite convergente, absurde donc K est borné. L'ensemble K est fermé, car pour tout $x \in \overline{K}$ il existe une suite $(u_n)_n$ dans K qui converge vers x. Donc il existe une sous suite extraite de $(u_n)_n$ qui converge dans K, une telle sous suite converge vers x, ainsi $x \in K$. $\square$

Exercices 1.6. *Tout compact de $\mathbb{R}$ admet un plus grand élément et un plus petit élément.*

Proposition 1.9. ***L'image d'un compact par une application continue est un compact.***

Démonstration. Soit K un compact est f une application continue sur K. Soit $(y_n)_n$ une suite dans $f(K)$, pour tout entier n il existe $x_n \in K$, tel que $f(x_n) = y_n$. La suite $(x_n)_n$ possède une sous suite extraite $(x_{\sigma(n)})_n$ convergente vers un élément x de K, f est continue en x donc la suite $(f(x_{\sigma(n)}))_n$ qui n'est autre que la sous suite extraite $(y_{\sigma(n)})_n$ de $(y_n)_n$, converge vers $f(x) \in f(K)$. D'où $f(K)$ est un compact. $\square$

Corollaire 1.2. ***Toute application continue d'un compact de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est bornée et elle atteint ses bornes.***

Démonstration. Exercice. $\square$

Définition 1.11. Soit $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ une application, on dit que f est uniformément continue sur A si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \ :\quad \forall x, y \in A,\ |x - y| < \eta \\ \Longrightarrow\ |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Remarque 1.7. 1) Soit $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ une application, si f est uniformément continue sur un ensemble A, alors f est continue sur A.

2) L'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R};\ x \mapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$, mais elle n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

3) L'application $f :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R};\ x \mapsto x^{-1}$ est continue sur $]0,1[$, mais elle n'est pas uniformément continue sur $]0,1[$.

Théorème 1.3. ***(de Heine) Toute application continue sur un ensemble fermé borné est uniformément continue.***

Démonstration. Supposons que E est un fermé borné et que f est continue mais non uniformément continue. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout entier $n > 1$, il existe $x_n, y_n \in E$ vérifiant $|x_n - y_n| < 1/n$ et $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$.
Il existe une sous suite extraite $(x_{\sigma(n)})_n$ de $(x_n)_n$ qui converge vers un élément $l \in E$.
On a $|x_n - y_n| < 1/n$, donc $(y_{\sigma(n)})_n$ converge vers l.
La fonction f est continue au point l, donc $(f(x_{\sigma(n)}))_n$ et $(f(y_{\sigma(n)}))_n$ converge vers $f(l)$, ceci contredit le fait que $|f(x_{\sigma(n)}) - f(y_{\sigma(n)})| \geq \varepsilon,\ n \in \mathbb{N}$. $\square$

6. Série n^o 1

Exercice 1. Soit $u = (u_n)_n$ une suite.

1) Vérifier que si les deux sous suites extraites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent vers une même limite, alors u est convergente.

2) Vérifier que si les sous suites extraites $(u_{2n})_n$, $(u_{2n+1})_n$ et $(u_{n^2})_n$ convergent, alors u est convergente.

3) Vérifier que si les sous suites extraites $(u_{3n})_n$, $(u_{3n+1})_n$ et $(u_{3n+2})_n$ convergent, alors u est convergente.

Exercice 2. Donner la nature des suites suivantes :

$$\sin(n\frac{\pi}{3}),\ \ \frac{n^2+\sqrt{n}}{(n+1)^2\cos(n\frac{\pi}{5})}$$

Exercice 3. (e est irrationnel) Soient u et v les suites définies par

$$u_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\text{ et }v_n=\frac{1}{n!}+\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$$

1) Vérifier que u et v sont deux suites adjacentes.

2) Soit l leur limite commune et supposons que l est un rationnel, c'est à dire que $l=p/q$ pour un certain $(p,q)\in I\!N\times I\!N^*$,

a) dire pour quoi $u_q<l<v_q$,

b) déduire un encadrement de

$$N=(l-\sum_{k=0}^{q}\frac{1}{k!})\cdot q!,$$

c) le nombre N est-il un entier, conclure.

3) En utilisant la formule de Taylor-Lagrange, vérifier que pour tout entier n,

$$|e-u_n|\leq\frac{e}{(n+1)!}$$

4) conclure que e est irrationnel.

Exercice 4. Soit I un intervalle de $I\!R$, et soit $f\ :\ I\longrightarrow I\!R$ une une application telle que l'image de toute suite convergente est une suite convegente. Montrons que f est continue.

1) Soient $x\in I$ et $(u_n)_n$ une suite de I qui converge vers x, construire dans I une suite convergente $(w_n)_n$ admettant $(u_n)_n$ et une suite constante comme deux sous suites extraites.

2) Que peut on dire de la suite $(f(w_n))_n$.

3) En déduire que la suite $(f(u_n))_n$ converge vers $f(x)$, conclure.

Exercice 5. I) Vérifier que pour tout réel $\omega>0$, l'ensemble $(\omega Z\!\!\!Z,+)$ est un sous groupe additif fermé de $I\!R$.

II) Soit $(G,+)$ un sous groupe additif propre de $I\!R$, supposons de plus que G est fermé. Posons $\omega=\inf\{g\in G\ :\ g>0\}$.

1) supposons que $\omega=0$,

a) vérifier qu'il existe une suite $(g_n)_n$ d'éléments de $]0,1]\cap G$ qui converge vers zéro.

b) Soit $x\in I\!R^+$ vérifier que pour tout entier n il existe un entier u_n tel que $u_ng_n\leq x<(u_n+1)\cdot g_n$.

c) Vérifier que la suite $(u_n g_n)_n$ converge vers x.

d) En déduire que $x \in G$, et que $\mathbb{R} \subseteq G$, conclure.

2) D'après ce qui précède $\omega > 0$,

a) vérifier que $\omega \in G$,

b) montrer que $G = \omega\mathbb{Z}$ (Ind. s'il existe $g \in G \cap \mathbb{R}^+$ qui n'est pas de la forme $\omega\mathbb{N}$, considérer l'élément $g - [g/\omega]\omega$).

III) Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que x/π est irrationnel, et soit $E = \{\cos(nx) \ : \ n \in \mathbb{Z}\}$.

1) Vérifier que $E = \{\cos(g) \ : \ g \in G\}$ où $G = x\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$.

2) Vérifier que G est dense dans $\mathbb{R}$.

3) Conclure que E est dense dans $[-1, 1]$.

Exercice 6. Soit I un intervalle fermé et soit f une application contractante, c'est à dire k-lipschitzienne $0 < k < 1$. Supposons de plus que $f(I) \subseteq I$.

1) Soit $x \in I$, montrer $(f^n(x))_n$ est une suite de Cauchy.

2) En déduire que f admet un point fixe unique.

3) Que peut on dire dans les deux cas suivants :

a) f est lipschitzienne, c'est à dire 1-lipschitzienne,

b) I n'est pas fermé.

Exercice 7. Montrer qu'une application continue sur $[0, 1[$ est uniformément continue si, et seulement si, elle est prolongeable par continuité au point 1 (Ind. Si f est est uniformément continue, soit $(u_n)_n$ une suite d'éléments de $[0, 1[$ qui converge vers 1, vérfier que $(f(u_n))_n$ est de Cauchy donc elle converge vers un réel l. Soit $(v_n)_n$ une suite quelconque d'éléments de $[0, 1[$ qui converge vers 1 vérfier que $(f(v_n))_n$ converge vers l).

Série 1, Solution.

Exercice 5. II) 1) a)Par hypothèse $0 = \inf\{g \in G \ : \ g > 0\}$, donc pour tout entier $n > 0$, il existe $g_n \in \{g \in G \ : \ g > 0\}$ tel que $0 \leq g_n < 1/n$. D'où $(g_n)_n \subseteq]0,1] \cap G$ et $g_n \to 0$.

b) Il suffit de poser $u_n = [x/g_n]$ (partie entière de x/g_n).

c) On a $0 \leq x - u_n g_n < g_n$ et $g_n \to 0$. Donc $(u_n g_n)_n$ converge vers x.

d) G est fermé, $(g_{\sigma(n)})_n \subseteq G$ et $u_n g_n \to x$. Donc $x \in G$. Donc $I\!R^+ \subseteq G$, or G est un groupe donc $I\!R^- \subseteq G$.

2) a) Par hypothèse $\omega = \inf\{g \in G \ : \ g > 0\}$, donc pour tout entier $n > 0$, il existe $g_n \in \{g \in G \ : \ g > 0\}$ tel que $\omega \leq g_n < \omega + 1/n$. D'où $(g_n)_n \subseteq G$ et $g_n \to \omega$. D'où $\omega \in G$ car G est fermé.

b) Si $g \in G$ et $g \geq 0$. Posons $g' = g - [g/\omega]\omega$. On a $g' \in G$ et $0 \leq g' < \omega$ donc $g' = 0$ car $\omega = \inf\{g \in G \ : \ g > 0\}$. D'où $g = [g/\omega]\omega \in \omega I\!N$.

III) 2) a) $\overline{G}$ est aussi un groupe car $\overline{G} \neq \emptyset$ et si $x, y \in \overline{G}$, il existe $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ deux suites dans G telles que $x_n \to x$ et $y_n \to y$, d'où $x_n - y_n \to x - y$, ainsi $x - y \in \overline{G}$.

b) Si $\overline{G}$ est de la forme $\omega Z\!\!\!Z$, alors $xZ\!\!\!Z + 2\pi Z\!\!\!Z = G \subseteq \omega Z\!\!\!Z$. Ainsi $x \in \omega Z\!\!\!Z$ et $\pi \in \omega Z\!\!\!Z$. Donc il existe $n, m \in Z\!\!\!Z^*$ tels que $x = \omega n$ et $y = \omega m$. Ainsi $x/\pi \in \mathbb{Q}$, ce qui est absurde.

3) Soit $y \in [-1,1]$, il existe $x \in I\!R$ tel que $\cos(x) = y$. Il existe $(g_n)_n \subseteq G$ telle que $g_n \to x$, donc $\cos(g_n) \to y$, mais pour tout entier n, $g_n = a_n + b_n$ avec $a_n \in xZ\!\!\!Z$ et $b_n \in 2\pi Z\!\!\!Z$. Donc $\cos(a_n) = \cos(g_n) \to y$, remarquons que $(\cos(a_n))_n \subseteq E$ d'où E est dense dans $[-1,1]$.

Exercice 6. On a pour tout $(x,y) \in I^2$, $|f(x) - f(y)| \leq k|x-y|$. fixons $x \in I$.

1) Soit $m \geq n$,

$$|f^m(x) - f^n(x)| = |(f^m(x) - f^{m-1}(x)) + (f^{m-1}(x) - f^{m-2}(x)) + \cdots + (f^{n+1}(x) - f^n(x))|$$

$$\leq |f^m(x) - f^{m-1}(x)| + |f^{m-1}(x) - f^{m-2}(x)| + \cdots + |f^{n+1}(x) - f^n(x)|$$

Or on a pour tout entier k, $|f^{n+1}(x) - f^n(x)| \leq k^n |f(x) - x|$. D'où

$$|f^m(x) - f^n(x)| \leq k^{m-1} + k^{m-2} + \cdots + k^n = k^n \frac{1 - k^{m-n}}{1-k} \leq \frac{k^n}{1-k}$$

Ainsi $(f^n(x))_n$ est une suite de Cauchy. Donc elle converge vers une limite a.

2) On a $a \in I$, car $f(I) \subseteq I$. Donc

$$f(a) = \lim_{n\to\infty} f(f^n(x)) = \lim_{n\to\infty} f^{n+1}(x) = a.$$

3) Posons $I = I\!R$, $x \to x + 1$ est 1-lipschitzienne mais elle n'admet aucun point fixe.

4) Pour $I =]0,1]$, $x \to x/2$ est 1/2-lipschitzienne mais elle n'admet aucun point fixe.

Exercice 7. Soit $f : [0,1[\to I\!R$, une application.

1) Si f est prolongeable par continuité au point 1 en une fonction g, alors g est continue sur le compact $[0,1]$, donc g est uniformément continue sur $[0,1]$. Ainsi f est uniformément continue sur $[0,1[$.

2) Supposons que f est uniformément continue sur $[0,1[$.

a) Montrons que l'image par f d'une suite $(a_n)_n$ qui converge vers 1, est une suite convergente. On a,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ |x - y| < \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Donc il existe un entier N, tel que pour tous $m \geq n \geq N$, $|a_n - a_m| < \eta$ donc

$$|f(a_n) - f(a_m)| < \varepsilon$$

Donc $(f(a_n))_n$ est de Cauchy. Donc elle converge vers une limite l.

b) Montrons que l est unique. Si $(b_n)_n$ une suite d'éléments de $[0,1[$ qui converge vers 1. Soit $(c_n)_n$ la suite définie par $c_{2n} = a_n$ et $c_{2n+1} = b_n$. Alors la suite $(c_n)_n$ converge vers 1, ainsi $(f(c_n))_n$ converge vers une limite l'. Ainsi

$$l = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_{2n} = l' = \lim_{n\to\infty} c_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} b_n$$

D'où si $b_n \to 1$ on a $f(b_n) \to l$. Ainsi f admet une limite quand $x \to 1$, par suite f prolongeable par continuité au point 1.

CHAPITRE **2**

Séries numériques

1. Suites dans $\mathbb{C}$.

Une suite complexe est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{C}$. Toutes les propriétés des suites réelles, autres que celles qui dépendent de l'ordre, restent vrais pour les suites complexes. Dans le reste de ce paragraphe, et sauf montion explicite du contraire, toutes les suites considérées sont complexes.

Définition 2.1. Une suite complexe $(u_n)_n$ est dite convergente vers un élément $l \in \mathbb{C}$ si la suite réelle $(|u_n - l|)_n$ converge vers zéro.

Soit $(u_n)_n$ une suite complexe et soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n (resp. b_n) la partie réelle (resp. imaginaire) de u_n. Donc on a pour tout entier n, $u_n = a_n + \mathrm{i}b_n$. Avec ces notations on a

Proposition 2.1. $(u_n)_n$ ***convergente vers une limite*** $l = a + \mathrm{i}b \in \mathbb{C}$ ***si, et seulement si***

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \;\; \textit{\textbf{et}} \;\; \lim_{n\to\infty} b_n = b.$$

Démonstration. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|a_n - a| \leq |u_n - l| \text{ et } |b_n - b| \leq |u_n - l|.$$

Donc

$$\lim_{n\to\infty} |u_n - l| = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = a \text{ et } \lim_{n\to\infty} b_n = b.$$

Réciproquement, si $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n - a| = \lim\limits_{n\to\infty} |b_n - b| = 0$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n - a|^2 + |b_n - b|^2 = 0$, c'est à dire que $\lim\limits_{n\to\infty} |u_n - l| = 0$. $\square$

2. Séries numériques.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique et pour chaque $n \in \mathbb{N}$ soit $S_n = u_0 + \cdots + u_n$ la somme de $n+1$ premiers termes de cette suite. Alors on a

Définition 2.2. 1) La suite $(S_n)_n$ est appelée série de terme général u_n, cette série sera notée $\sum\limits_n u_n$ ou $\sum u_n$.

2) $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ est appelée la somme partielle d'ordre n de la série.

3) La série $\sum\limits_n u_n$ est dite convergente si la suite $(S_n)_n$ est convergente, dans ce cas $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$, est alors appelée somme de la série $\sum\limits_n u_n$, et désignée par $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ ou $u_0 + \cdots + u_n + \cdots$.

4) La série $\sum\limits_n u_n$ est dite divergente si elle n'est pas convergente.

Remarque 2.1. 1) On peut avoir une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ qui n'est définie qu'à partir d'un certain indice $n_0 \geq 1$. Dans ce cas la série $\sum\limits_n u_n$ est la série de terme général u_n, où $u_n := 0$ pour $0 \leq n \leq n_0 - 1$.

2) Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite. Par abus de langage, et aussi suivant certains auteurs, on va se permettre d'utiliser la notation $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} u_n$ pour désigner à la fois la série $\sum\limits_n u_n$ et la somme $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} u_n$, si elle existe. Mais pour éviter toute confusion, les expressions : série $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} u_n$, $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} u_n$ converge (ou diverge) ..., signifient qu'il s'agit d'une série, par contre les expressions : la somme $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} u_n$, $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} u_n$ égale à un scalaire (ou à l'infinie) ..., signifient qu'il s'agit d'une somme.

Exemples 2.1. *1) Soit $r \in \mathbb{R}$, la* ***série géométrique*** *de raison r est la série $\sum\limits_n r^n$, on a $\sum\limits_n r^n$ converge si, et seulement si $-1 < r < 1$. En effet, si $r \in]-1, 1[$,*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} \Longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1 - r}.$$

Pour $r = 1$, $S_n = n + 1$, donc $\sum\limits_{k=0}^{\infty} r^k = \infty$.

Pour $r \geq 1$, $S_n \geq n + 1$, donc $\sum\limits_{k=0}^{\infty} r^k = \infty$.

Pour $r = -1$, $\sum\limits_k r^k$ diverge. En effet,

$$S_{2n} = \frac{1 - (-1)^{2n+1}}{1 - (-1)} = 1$$

et

$$S_{2n+1} = \frac{1 - (-1)^{2n+2}}{1 - (-1)} = 0.$$

Pour $r < -1$, $\sum_k r^k$ diverge. En effet,

$$S_{2n} = \frac{1 - r^{2n+1}}{1 - r} \text{ donc } \lim_{n\to\infty} S_{2n} = \infty$$

et

$$S_{2n+1} = \frac{1 - r^{2n+2}}{1 - r} \text{ donc } \lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = -\infty.$$

2) La série

$$\sum_n \frac{1}{n(n+1)}$$

est convergente, car pour tout entier $n \geq 1$,

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

Donc

$$\begin{aligned} S_n &= (1 - \tfrac{1}{2}) + (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}) + \cdots + (\tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{n+1}) \\ &= 1 - \tfrac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

Définition 2.3. La somme de deux séries $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$, notée $\sum_n u_n \; + \; \sum_n v_n$, est la série

$$\sum_n u_n + v_n.$$

Pour tout scalaire $\lambda \in \mathbb{C}$, le produit de λ et la série $\sum_n u_n$, notée $\lambda \cdot \sum_n u_n$, est la série

$$\sum_n \lambda u_n.$$

Proposition 2.2. ***Si $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ sont deux séries convergentes et si λ et β sont deux scalaires alors la série***

$$\lambda \cdot \sum_n u_n \; + \; \beta \cdot \sum_n v_n$$

est convergente et on a

$$\lambda \cdot \sum_{n=0}^{\infty} u_n \; + \; \beta \cdot \sum_{n=0}^{\infty} v_n = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda u_n + \beta v_n.$$

Démonstration. Découle du faite que cette propriété est vraie pour les suites formées par les sommes partielles. □

Proposition 2.3. ***Une série $\sum_n u_n$ est convergente si, et seulement si elle vérifie le critère de Cauchy suivant :***

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}\ :\ \forall m > n \geq N,\ |\sum_{k=n+1}^{m} u_k| < \varepsilon.$$

Démonstration. Découle du critère de Cauchy pour la suite $(\sum_{k=0}^{n} u_k)_n$. $\square$

Proposition 2.4. ***Si une série $\sum_n u_n$ converge, alors*** $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Démonstration.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} u_n &= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} u_k - \sum_{k=0}^{n-1} u_k\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k - \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} u_k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} u_k - \sum_{k=0}^{\infty} u_k = 0. \ \square\end{aligned}$$

Attention 2.1. La réciproque de la proposition **2**.4 n'est pas vraie en général. Voici deux exemples :

1) Soit la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right).$$

Le terme général de cette série converge vers zéro. Mais

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\tfrac{k+1}{k}\right) &= \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln(k) \\ &= \ln(n+1) \to \infty.\end{aligned}$$

2) Un exemple remarquable est donné par la **série harmonique**

$$\sum_n \frac{1}{n}.$$

Le terme général de cette série est $1/n$ qui converge vers zéro. Mais on a

$$\begin{aligned}S_{2n} - S_n &= \tfrac{1}{n+1} + \tfrac{1}{n+2} + \cdots + \tfrac{1}{2n} \\ &\geq \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n}}_{n \text{ termes}} \\ &= n \cdot \tfrac{1}{2n} = \tfrac{1}{2},\end{aligned}$$

donc la série harmonique ne vérifie pas le critère de Cauchy donc elle est divergente.

3. Séries numériques à termes positifs.

Dans se paragraphe on s'intéresse aux séries à termes généraux positifs, c'est à dire les séries $\sum_n u_n$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$.

Proposition 2.5. ***Une série $\sum_n u_n$ à termes positifs est convergente si, et seulement si elle est bornée.***

Démonstration. La suite $(\sum_{k=0}^{n} u_k)_n$ est croissante, donc elle converge si, et seulement si elle est bornée. □

Remarque 2.2. Si $\sum_n u_n$ une série à termes positifs, alors $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=0}^{n} u_k$. D'où

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}.$$

Proposition 2.6. ***Soient $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ deux séries à termes positifs, supposons de plus que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$, alors :***

1) si la série $\sum_n v_n$ converge la série $\sum_n u_n$ converge et on a $\sum_{k=0}^{\infty} u_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} v_k$.

2) si la série $\sum_n u_n$ diverge la série $\sum_n v_n$ diverge.

Démonstration. Si $\sum_n v_n$ converge, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} u_k \leq \sum_{k=0}^{n} v_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} v_k < \infty$. D'où $\sum_{k=0}^{\infty} u_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} v_k$. □

Exemples 2.1. *Etudions la nature de la série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

On a pour tout entier $n \geq 2$,

$$\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{(n-1) \cdot n},$$

or $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)n}$ est convergente, d'où $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge.

Corollaire 2.1. ***Soient $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ deux séries à termes positifs, supposons de plus que $u_n = O(v_n)$ lorsque n tend vers ∞. Si $\sum_n v_n$ converge, alors $\sum_n u_n$ converge.***

Démonstration. Il existe un réel $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M v_n$. La série $\sum_n M v_n$ est convergente, donc $\sum_n u_n$ converge. $\square$

Corollaire 2.2. ***Soient*** $\sum_n u_n$ ***et*** $\sum_n v_n$ ***deux séries à termes positifs, supposons de plus que*** $u_n \sim v_n$ ***lorsque*** n ***tend vers*** ∞***. Alors les séries*** $\sum_n u_n$ ***et*** $\sum_n v_n$ ***sont de même nature.***

Démonstration. Il suffit de remarquer que $u_n = O(v_n)$ et $v_n = O(u_n)$. $\square$

4. Règles de convergence.

4.1. Règle de Riemann.

Proposition 2.7. ***Soit*** $\alpha \in \mathbb{R}$***, la série de Riemann*** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ ***est convergente si, et seulement si*** $\alpha > 1$***.***

Démonstration. Cas $\alpha = 1$, (voir aussi Attention **2**.1, 2)) on a

$$\frac{1}{n} \sim \ln(1 + \frac{1}{n}) = \ln(n+1) - \ln(n)$$

donc la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

Cas $\alpha \neq 1$, pour tout entier $n \geq 2$ on a :

$$\frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}} = \frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}}\big(1 - \big(1 - \frac{1}{n}\big)^{\alpha-1}\big).$$

Remarquons que

$$\big(1 - \frac{1}{n}\big)^{\alpha-1} \sim 1 - (\alpha-1)\frac{1}{n},$$

d'où

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \tfrac{1}{n^{\alpha-1}} &\sim (\alpha-1)\tfrac{1}{(n-1)^{\alpha-1}n} \\ &\sim \tfrac{\alpha-1}{n^\alpha}. \end{aligned}$$

Or on a

$$\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{(k-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{k^{\alpha-1}}\right) = 1 - \frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

Ainsi, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$. $\square$

Corollaire 2.3. ***(Règle de Riemann) Soit $\sum_n u_n$ une série à termes positifs.***

1) S'il existe un $M > 0$ et $\alpha > 1$ tels que $n^\alpha u_n \leq M$, en particulier si $\lim_{n\to\infty} n^\alpha u_n$ existe, alors la série $\sum_n u_n$ converge.

2) S'il existe un $M > 0$ et $\alpha \leq 1$ tels que $n^\alpha u_n \geq M$, alors la série $\sum_n u_n$ diverge.

Démonstration. Exercice. $\square$

4.2. Règle de Cauchy.

Ici on vas étudier les séries comparables aux séries géométiriques.

Proposition 2.8. ***(Règle de Cauchy) Soit $\sum_n u_n$ une série à termes positifs.***

1) S'il existe $0 \leq \lambda < 1$ tel que pour n assez grand $\sqrt[n]{u_n} \leq \lambda$, alors la série $\sum_n u_n$ converge.

2) Si pour une infinité d'indices on a $\sqrt[n]{u_n} \geq 1$, alors la série $\sum_n u_n$ diverge.

Remarque 2.3. Comme cas particulier de la règle de Cauchy, on a si $\sum_n u_n$ une série à termes positifs, et si de plus $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lambda$, alors :

- si $\lambda < 1$, la série converge,
- si $\lambda > 1$, la série diverge,
- si $\lambda = 1$, on peut rien dire.

4.3. Règle de d'Alembert.

Proposition 2.9. ***Soient $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ deux séries, supposons de plus qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq n_0$, $u_n > 0$, $v_n > 0$ et***

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

1) Si $\sum_n v_n$ converge alors $\sum_n u_n$ converge.

2) Si $\sum_n u_n$ diverge alors $\sum_n v_n$ diverge.

Démonstration. Pour tout entier $n \geq n_0$, $\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \leq \frac{u_n}{v_n}$. D'où $\frac{u_n}{v_n} \leq \frac{u_{n_0}}{v_{n_0}}$, ainsi $u_n \leq \frac{u_{n_0}}{v_{n_0}} v_n$. D'où le résultat. $\square$

Corollaire 2.4. ***(Règle de d'Alembert) Soit*** $\sum_n u_n$ ***une série à termes positifs, supposons de plus que*** $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lambda$***, alors :***

1) Si $\lambda < 1$***, la série*** $\sum_n u_n$ ***converge.***

2) Si $\lambda > 1$***, la série*** $\sum_n u_n$ ***diverge.***

Démonstration. Exercice. □

5. Comparaison série-integrale.

Soit $f : [n_0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, où $n_0 \in \mathbb{N}$, une fonction décroissante et positive alors on a :

Théorème 2.1. ***La série*** $\sum_{n=n_0}^{\infty} f(n)$ ***et l'integrale*** $\int_{n_0}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ ***sont de même nature. De plus :***

1) La série

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \big(\int_{n-1}^{n} f(x)\mathrm{d}x \ - \ f(n)\big)$$

est une série à termes positifs convergente.

2) Si la série $\sum_{n=n_0}^{\infty} f(n)$ ***converge, alors :***

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} f(n) \ \leq \ \int_{n_0}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x \ \leq \ \sum_{n=n_0}^{\infty} f(n).$$

Démonstration. 1)

$$\begin{aligned}\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \big(\int_{n-1}^{n} f(x)\mathrm{d}x \ - \ f(n)\big) &\leq \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \big(f(n-1) \ - \ f(n)\big) \\ &= \lim_{n\to\infty} f(n_0) - f(n)\end{aligned}$$

Une telle limite existe car f est décroissante.

2) Exercice. □

Exemples 2.2. *Considérons la **Série de Bertrand** :*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}(\ln(n))^{\beta}}, \ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

- *si* $\alpha > 1$, *la série converge* ($\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{\alpha+1}{2}}}{n^\alpha(\ln(n))^\beta} = 0$),
- *si* $\alpha < 1$, *la série diverge* ($\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{\alpha+1}{2}}}{n^\alpha(\ln(n))^\beta} = \infty$),
- *si* $\alpha = 1$, $x \to \frac{1}{x\ln(x)}$ *est une fonction définie sur* $[2,\infty[$ *décroissante et positive de plus*

$$\int_2^\infty \frac{1}{x(\ln(x))^\beta}\mathrm{d}x = \int_2^\infty \frac{1}{t^\beta}\mathrm{d}t \ (\textit{en posant } t = \ln(x))$$

d'où l'integrale est convergente si, et seulement si $\beta > 1$, *ainsi* $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln(n))^\beta}$.

6. Série à termes réels ou complexes.

6.1. Séries absolument convergentes.

Définition 2.4. Une série à termes réels ou complexes $\sum\limits_n u_n$ est dite absolument convergente si la série $\sum\limits_n |u_n|$, est convergente.

Proposition 2.10. ***Une série absolument convergente est une série convergente.***

Démonstration. On va appliquer le critère de Cauchy. La série $\sum\limits_n |u_n|$ est convergente donc

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}\ :\ \forall q \geq p \geq N, \sum_{n=p}^{q} |u_n| < \varepsilon.$$

L'inégalité triangulaire donne

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}\ :\ \forall q \geq p \geq N, |\sum_{n=p}^{q} u_n| < \varepsilon.$$

D'où la série $\sum\limits_n u_n$ vérifie le critère de Cauchy donc elle converge. □

Remarque 2.4. Tous les résultats et les règles du paragraphe précédant s'étendent au cas général mais en remplaçant 'convergente' par 'absolument convergente', les termes généraux par leurs modules et 'divergente' par 'ne converge pas absolument'.

Attention 2.2. L'**équivalence** des termes généraux de deux séries qui **ne gardent pas un signe constant, n'entraîne pas** le fait que les deux séries sont de **même nature**. Cosidérons les deux séries suivantes :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} \text{ et } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}+(-1)^n}$$

les termes généraux de ces deux séries sont équivalents, mais la première série est convergente (voir le sous paragraphe sur les séries alternée) et la deuxième est divergenente. En effet, on a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}+(-1)^n}$ et $S = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}+(-1)^n})$ sont de même natures. De plus

$$\begin{aligned}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}+(-1)^n} &= \frac{(-1)^n\sqrt{n+1}+1-(-1)^n\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+(-1)^n)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+(-1)^n)}\end{aligned}$$

Donc S est une série de terme général positif $\frac{1}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+(-1)^n)} \geq \frac{1}{n+1}$ pour $n \geq 2$, d'où elle diverge, ainsi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}+(-1)^n}$ diverge.

6.2. Séries produit.

Définition 2.5. Soient $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} u_n$ et $\sum\limits_{n=n'_0}^{\infty} v_n$ deux séries, la série produit des séries $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} u_n$ et $\sum\limits_{n=n'_o}^{\infty} v_n$ est la série :

$$\sum_{n=n_0+n'_0}^{\infty} w_n$$

où

$$w_n = \sum_{\substack{p+q=n \\ p\geq n_0,\ q\geq n'_0}} u_p v_q$$

Remarque 2.5. 1) Dans la définition précédante si $n_0 = n'_0 = 0$, alors

$$\begin{aligned}w_n = \sum_{p+q=n} u_p v_q &= u_n v_0 + u_{n-1}v_1 + \cdots + u_0 v_n \\ &= \sum_{k=0}^{n} u_{n-k}v_k.\end{aligned}$$

2) La série produit de deux série est appelée aussi **produit de Cauchy**.

Proposition 2.11. ***La série prduit $\sum\limits_{n=n_0+n'_0}^{\infty} w_n$ de deux série absolument convergentes $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} u_n$ et $\sum\limits_{n=n'_0}^{\infty} v_n$ est absolument convergente et on a***

$$\sum_{n=n_0+n'_0}^{\infty} w_n = (\sum_{n=n_0}^{\infty} u_n)\cdot(\sum_{n=n'_0}^{\infty} v_n)$$

Démonstration. a) Cas où les deux séries $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} u_n$ et $\sum\limits_{n=n'_0}^{\infty} v_n$ sont à termes positifs, on a pour tout entier $m \geq n_0 + n'_0$,

$$(\sum_{n=n_0}^{m} u_n)\cdot(\sum_{n=n'_0}^{m} v_n) \leq \sum_{n=n_0+n'_0}^{2m} w_n \leq (\sum_{n=n_0}^{2m} u_n)\cdot(\sum_{n=n'_0}^{2m} v_n)$$

donc si les deux séries sont convergente alors la séries $\sum\limits_{n=n_0+n'_0}^{\infty} w_n$ converge. Il découle des deux inégalités précédantes que

$$\sum_{n=n_0+n'_0}^{\infty} w_n = (\sum_{n=n_0}^{\infty} u_n) \cdot (\sum_{n=n'_0}^{\infty} v_n).$$

b) Cas général. Soit pour tout entier $m \geq n_0 + n'_0$,

$$\begin{aligned} \mid \sum_{n=n_0+n'_0}^{m} w_n \ - \ (\sum_{n=n_0}^{m} u_n) \cdot (\sum_{n=n'_0}^{m} v_n) \mid \ &= \mid \sum_{\substack{m<p+q \\ p\leq m,\ q\leq m}} u_p v_q \mid \\ &\leq \sum_{\substack{m<p+q \\ p\leq m,\ q\leq m}} |u_p v_q| \end{aligned}$$

Soit $\sum\limits_{n=n_0+n'_0}^{\infty} w'_n$ la série produit de $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} |u_n|$ et $\sum\limits_{n=n'_0}^{\infty} |v_n|$. Alors on a

$$\sum_{\substack{m<p+q \\ p\leq m,\ q\leq m}} |u_p v_q| = \sum_{n=n_0+n'_0}^{m} w'_n \ - \ (\sum_{n=n_0}^{m} |u_n|) \cdot (\sum_{n=n'_0}^{m} |v_n|).$$

Donc d'après a), $\lim\limits_{m\to\infty} \sum\limits_{\substack{m<p+q \\ p\leq m,\ q\leq m}} |u_p v_q| = 0$. D'où

$$\lim_{m\to\infty} \mid \sum_{n=n_0+n'_0}^{m} w_n \ - \ (\sum_{n=n_0}^{m} u_n) \cdot (\sum_{n=n'_0}^{m} v_n) \mid = 0.$$

Ainsi, la série produit est convergente et on a

$$\sum_{n=n_0+n'_0}^{\infty} w_n \ = \ (\sum_{n=n_0}^{\infty} u_n) \cdot (\sum_{n=n'_0}^{\infty} v_n).$$

De plus pour tout entier $n \geq n_0 + n'_0$, on a $|w_n| \leq w'_n$, donc la série produit est absolument convergente. □

Exemples 2.3. *Soit $r \in]-1, 1[$, étudions la série*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) r^n.$$

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)r^n = \sum\limits_{k=0}^{n} r^{n-k} r^k$. Donc la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1)r^n$ n'est autre que la série produit de $\sum\limits_{n=0}^{\infty} r^n$ et $\sum\limits_{n=0}^{\infty} r^n$. D'où elle est absolument convergente et on a

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) r^n \ &= (\sum_{n=0}^{\infty} r^n) \cdot (\sum_{n=0}^{\infty} r^n) \\ &= \tfrac{1}{1-r} \cdot \tfrac{1}{1-r} \end{aligned}$$

Attention 2.3. En général

$$(\sum_{n=0}^{\infty} u_n) \cdot (\sum_{n=0}^{\infty} v_n) \neq \sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n$$

par exemple

$$(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n})^2 = 2^2 \neq \frac{4}{3} = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{2^n})^2$$

6.3. Séries alternées.

Définition 2.6. **Soit $\sum_n u_n$ une série convergente, le reste d'ordre n de cette série est la somme $\sum_{\mathbf{k=n+1}}^{\infty} \mathbf{u_n}$.**

Remarque 2.6. En général le reste d'ordre n d'une série est noté R_n, donc on a $S = S_n + R_n$ où S et S_n sont respectivement la somme et la somme partielle d'ordre n de la série.

Définition 2.7. **Une série alternée est une série dont le terme général u_n est de la forme $u_n = (-1)^n v_n$, où**

- $(v_n)_n$ **est une suite décroissante,**
- $(v_n)_n$ **est une suite positive,**
- $(v_n)_n$ **converge vers zéro.**

Remarque 2.7. Il existe d'autres définitions des série alternées la plus générale dit qu'une série de terme général u_n est alternée si $(-1)^n u_n$ garde un signe constant. Dans une autre définition une telle série est alternée si $(-1)^n u_n$ est décroissante positive.

Proposition 2.12. ***Toute série alternée $\sum_n (-1)^n v_n$ est convergente. De plus :***

1) (Formule de majoration du reste) Pour tout entier n, $|\mathbf{R_n}| \leq \mathbf{v_{n+1}}$.

2) La somme partielle S_n vérifie

$$S_{2n+1} \;\leq\; \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n v_n \;\leq\; S_{2n}.$$

De plus les deux suites $(S_{2n+1})_n$ et $(S_{2n})_n$ sont adjacentes.

Démonstration. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = S_{2n+1} \text{ et } b_n = S_{2n}.$$

On a

$$\begin{array}{lll} a_{n+1} & -a_n & = v_{2n+2} - v_{2n+3} \quad \geq 0, \\ b_{n+1} & -b_n & = -v_{2n+1} + v_{2n+2} \quad \leq 0, \\ b_n & -a_n & = v_{2n+1} \longrightarrow 0^+. \end{array}$$

Donc les deux suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ converge vers une même limite qui n'est autre que la somme S de la série $\sum\limits_n (-1)^n v_n$. Par suite $S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n}$.

Il reste à montrer 1). On a pour tout entier n :

$$\begin{array}{lll} |R_{2n}| & = \lim\limits_{m\to\infty} & |S_{2m+1} - S_{2n}| = \lim\limits_{m\to\infty} S_{2n} - S_{2m+1} \\ & \leq & S_{2n} - S_{2n+1} = v_{2n+1} \\ & \leq & v_{2n+1}. \\ |R_{2n+1}| & = \lim\limits_{m\to\infty} & |S_{2m} - S_{2n+1}| \\ & = \lim\limits_{m\to\infty} & S_{2m} - S_{2n+1} \\ & \leq & S_{2n+2} - S_{2n+1} = v_{2n+2}. \ \Box \end{array}$$

Exemples 2.4. *Les séries*

$$\sum_n \frac{\cos(n\pi)}{n+1}, \ \sum_n \frac{(-1)^n \ln(n+1)}{\sqrt{n+1}}$$

sont des séries alternée donc elle convergent.

7. Série n^o 2.

Exercice 1. Déterminer la nature des séries ($a \in I\!R$) :

$$\sum_n \frac{1+\sin(n^2)}{n^2+1-\sin(2n)}; \ \sum_n e^{-(n^2+1)^a}; \ \sum_n \frac{(na)^n}{n!}, \ 0 \leq a \neq \frac{1}{e};$$

$$\sum_n \frac{1}{n\ln(n)(\ln(\ln(n)))^a}; \ \sum_n \frac{(n!a^n)^2}{(2n)!}, \ 0 \leq a \neq 2; \ \sum_n \arccos(\frac{n^a}{1+n^a}).$$

Exercice 2. Déterminer la nature de $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)(n+1)}{2} a^n$, $a \in I\!R$, et calculer sa somme dans le cas où elle existe (Ind. donner l'expression de la série produit $(\sum\limits_{n=0}^{\infty} a^n) \cdot (\sum\limits_{n=0}^{\infty} a^n)^2$).

Exercice 3. (Formule de Stirling). On considère la suite :

$$x_n = \frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{n!} e^{-n} \text{ et on pose } u_n = \ln(\frac{x_{n+1}}{x_n})$$

1) Montrer que $u_n = O(\frac{1}{n^2})$.

2) En déduire que la série $\sum_n u_n$ converge et que la suite $(x_n)_n$ converge vers une limite $x > 0$.

3) En utilisant la formule de Wallis :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdots\frac{2n\cdot 2n}{(2n-1)\cdot(2n+1)} = \frac{\pi}{2}$$

montrer que $\lim_{n\to\infty} \frac{(2^n\cdot n!)^2}{(2n)!\cdot\sqrt{2n+1}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

4) En remarquant que $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{2n}}{(x_n)^2} = \frac{1}{x}$, déduire que $\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

5) En déduire que $(n!)_n$ et $((ne^{-1})^n\sqrt{2\pi n})_n$ sont équivalents.

6) En déduire la nature de la série $\sum_n \frac{(ne^{-1})^n}{n!}$.

Exercice 4. 1) En utilisant le théorème de comparaison série-integrale, vérifier que

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n)$$

converge vers une constante C (constante d'Euler).

2) Soit la série harmonique alternée :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$$

Démontrer que la some partielle S_{2n+1} de cette série vaut : $\sigma_{2n+1} - \sigma_n$ où $\sigma_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}$.

3) Prouver que $\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \ln 2$ et que la somme de la série harmonique alternée existe et elle vaut $\ln 2$.

4) En déduire une valeur approchée de $\ln 2$ à l'ordre $\frac{1}{10}$.

Exercices facultatifs

Exercice 5. (**Règle de Duhamel**) 1) Soit $(u_n)_n$ une suite de termes positifs vérifiant :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\beta}{n} + o(\frac{1}{n})$$

Montrer que pour $\beta \in I\!R \setminus \{1\}$, $\sum_n u_n$ converge si et seulement si $\beta > 1$.

2) Soit $(u_n)_n$ une suite de termes positifs vérifiant :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O(\frac{1}{n^\beta}) \quad \alpha > 0,\ \beta > 1$$

On pose $v_n = n^\alpha u_n$, étudier la série $\sum_n \ln(\frac{v_{n+1}}{v_n})$ et déduire que la suite $(v_n)_n$ possède une limite $l > 0$. En déduire la nature de la série $\sum_n u_n$.

3) Etudier la nature des séries de termes généraux :

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k};\ (n!)^{1/2} \prod_{k=1}^{n} \sin(k^{-1/2});\ \frac{(ne^{-1})^n}{n!};$$

$$\frac{(n!p^n)^p}{(pn)!};\ a^{\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p+1}+\cdots+\frac{1}{p+n}\right)};\ (p \in I\!N^*,\ a > 0)$$

Exercice 6. Dans cet exercice nous admettons le résultat suivant dit **règle de Abel** : *Si $(u_n)_n$ est une suite à termes positifs décroissante et converge vers zéro et si $(v_n)_n$ est une suite telle que pour tout $\sum_{k=0}^{n} v_n$ est bornée alors la série $\sum_{n} u_n v_n$ est convergente.*

Montrer que pour $\theta \in]0, 2\pi[$, la série $\sum_{n} \frac{e^{in\theta}}{n}$ est convergente. En déduire la nature des séries $\sum_{n} \frac{\sin(n\theta)}{n}$ et $\sum_{n} \frac{\cos(n\theta)}{n}$.

Exercice 7. 1) Soit $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites positives équivalentes. Montrer que :

1) Si $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ diverge, alors les sommes partielles $\sum_{k=0}^{n} u_k$ et $\sum_{k=0}^{n} v_k$ sont équivalentes.

2) Si $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge, alors les restes $\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$ et $\sum_{k=n+1}^{\infty} v_k$ sont équivalentes.

3) Donner la nature de la série de terme général $(\sum_{k=1}^{n} k \ln(1+\frac{1}{k}))^a$, $a \in I\!R$.

Série 2, Solution.

Exercice 1.

- $0 \leq \frac{1+\sin(n^2)}{n^2+1-\sin(2n)} \leq \frac{2}{n^2}$, la série converge;
- si $a \leq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} e^{-(n^2+1)^a} \neq 0$, la série diverge, (terme général $\not\to 0$),

si $a > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 e^{-(n^2+1)^a} = 0$, la série converge, (Riemann);

- $u_n = \frac{(n!a^n)^2}{(2n)!}$, $a \neq 2$,

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{((n+1)a)^2}{(2n+2)(2n+1)} \to \frac{a^2}{4}$, la série converge $\iff a < 2$, (d'Alembert);

- $u_n = \frac{(na)^n}{n!}$, $a \neq \frac{1}{e}$,

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = a(1+\frac{1}{n})^n \to ae$, la série converge $\iff a < \frac{1}{e}$, (d'Alembert);

- $\frac{1}{n\ln(n)(\ln(\ln(n)))^a}$ comarable à $I = \int_3^\infty \frac{1}{x\ln(x)(\ln(\ln(x)))^a}\mathrm{d}x$, posons $t = \ln(x)$,

on a $I = \int_{\ln(3)}^\infty \frac{1}{t^a}\mathrm{d}t$, la série converge $\iff a > 1$, (série-intégrale);

- $\arccos(\frac{n^a}{1+n^a})$, l'équivalence au voisinage de 1, $\arccos(y) \simeq \sqrt{2(1-y)}$,

entraîne $\arccos(\frac{n^a}{1+n^a}) \simeq \sqrt{2\frac{1}{1+n^a}} \simeq \frac{\sqrt{2}}{n^{\frac{a}{2}}}$,

la série converge $\iff a > 2$;

Exercice 2. Si $|a| \geq 1$, la série diverge, car le terme général ne tend pas vers zéro.

si $a \in]-1,1[$, la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a^n$ est absolument convergente, donc la série produit $(\sum\limits_{n=0}^{\infty} a^n)^2$ est absolument convergente, et on a

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a^n = \sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{k=0}^{n} a^{n-k}a^k) = (\sum_{n=0}^{\infty} a^n)^2 = (\frac{1}{1-a})^2,$$

donc la la série produit $(\sum\limits_{n=0}^{\infty} a^n)(\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)a^n)$ est absolument convergente, et on a

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+2)(n+1)}{2}a^n = \sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{k=0}^{n} a^{n-k}(k+1)a^k) = \frac{1}{1-a}(\frac{1}{1-a})^2 = (\frac{1}{1-a})^3.$$

Exercice 3. 1) $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)^{n+1+\frac{1}{2}}}{n^{n+\frac{1}{2}}(n+1)}e^{-1} = (1+\frac{1}{n})^{n+\frac{1}{2}}e^{-1}$. Donc

$$\begin{aligned} u_n &= \ln(\tfrac{x_{n+1}}{x_n}) = -1 + (n+\tfrac{1}{2})\ln(1+\tfrac{1}{n}) = -1 + (n+\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{2n^2} + O(\tfrac{1}{n^3})) \\ &= -1 + 1 - n\tfrac{1}{2n^2} + nO(\tfrac{1}{n^3}) + \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2n^2} + \tfrac{1}{2}O(\tfrac{1}{n^3}) = O(\tfrac{1}{n^2}). \end{aligned}$$

2) De 1) la série $\sum\limits_n u_n$ converge, donc $\sum\limits_n(\ln(x_{n+1}) - \ln(x_n))$ converge d'où $(\ln(x_n))_n$ convergever une limite s, ainsi $(x_n)_n$ converge vers une limite $x = e^s > 0$.

3)

$$\begin{aligned}(\frac{(2^n\cdot n!)^2}{(2n)!\cdot\sqrt{2n+1}})^2 &= \frac{(2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdots 2n\cdot 2n)^2}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 2n\cdot(2n-1)\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdots 2n\cdot(2n-1)}\frac{1}{2n+1}\\ &= \left(\frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdots\frac{2n\cdot 2n}{(2n-1)}\right)\left(\frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdots 2n\cdot 2n}{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdots 2n\cdot 2n}\right)^2\frac{1}{2n+1}.\end{aligned}$$

D'où $(\frac{(2^n\cdot n!)^2}{(2n)!\cdot\sqrt{2n+1}})^2 = \frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdots\frac{2n\cdot 2n}{(2n-1)\cdot(2n+1)} \to \frac{\pi}{2}$, ainsi $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2^n\cdot n!)^2}{(2n)!\cdot\sqrt{2n+1}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

4) On a $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \neq 0$, donc $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{2n}}{(x_n)^2} = \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$. D'autre part

$$\frac{x_{2n}}{(x_n)^2} = \frac{(2n)^{2n+\frac{1}{2}}}{(2n)!}e^{-2n}\frac{(n!)^2}{n^{2n+2\frac{1}{2}}}e^{2n} = \frac{\sqrt{2}(2)^{2n}}{(2n)!}\frac{(n!)^2}{n^{\frac{1}{2}}} = \frac{(2^n\cdot n!)^2\sqrt{2}}{(2n)!\cdot\sqrt{2n+1}}\frac{\sqrt{2n+1}}{\sqrt{n}}.$$

D'où d'après 3) $\frac{1}{x} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{2n}}{(x_n)^2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}(\sqrt{2})^2$, donc $x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

5) D'après 4) on a $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(ne^{-1})^n\sqrt{2\pi n}}{n!} = 1$, ainsi $n! \simeq (ne^{-1})^n\sqrt{2\pi n}$.

6) On a aussi $\frac{(ne^{-1})^n}{n!} \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$, donc les séries $\sum\limits_n\frac{(ne^{-1})^n}{n!}$ et $\sum\limits_n\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$ sont de même nature, donc $\sum\limits_n\frac{(ne^{-1})^n}{n!}$ diverge.

Exercice 4. 1) L'application $f\ :\ [1,\infty[\to I\!R;\ x\mapsto\frac{1}{x}$ est décroissante positive donc, d'après le théorème de comparaison série-intégrale, la série

$$\sum_{k=2}^{\infty}(\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x}\mathrm{d}x\ -\ \frac{1}{k})$$

est une série convergente, c'est à dire que

$$\sum_{k=2}^{n}(\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x}\mathrm{d}x-\frac{1}{k}) = \int_1^n\frac{1}{x}\mathrm{d}x-\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}$$

est convergente, d'où

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n) = 1-(\int_1^n\frac{1}{x}\mathrm{d}x-\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k})$$

converge vers une constante C.

2) Soient $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}$ et $\sigma_n = \sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}$. On a

$$\begin{aligned}S_{2n+1} &= \sum_{k=0}^{2n+1}\frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_{k=0}^{n}(\frac{(-1)^{2k}}{2k+1}+\frac{(-1)^{2k+1}}{2k+1+1}) = \textstyle\sum_{k=0}^{n}(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2})\\ &= \sum_{k=0}^{n}(\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}-2\frac{1}{2k+2})\\ &= (\sum_{k=0}^{2n+1}\frac{1}{k+1})-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1} = \sigma_{2n+1}-\sigma_n.\end{aligned}$$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n+1} = \sigma_{2n}-\ln(2n)+\ln(2)+\ln(n)-\sigma_n \to C+\ln(2)-C = \ln(2)$. La série harmonique alternée est une série alternée (de terme général tend vers zéro), donc elle converge vers une limite S, par suite S_{2n+1} converge aussi vers S, donc $S = \ln(2)$.

4) D'après la formule de majoration du reste pour les séries alternées, on a

$$|\ln(2) - \sum_{k=0}^{9} \frac{(-1)^k}{k+1}| \leq \frac{1}{10},$$

d'où $\sum\limits_{k=0}^{9} \frac{(-1)^k}{k+1}$ est une valeur approchée de $\ln 2$ à l'ordre $\frac{1}{10}$.

CHAPITRE **3**

Espaces vectoriels normés

1. Définitions générales.

1.1. Définition et exemples.

Définition 3.1. Soit E un espace vectoriel une norme sur E est une application : $E \longrightarrow \mathbb{R}^+$, $x \to \|x\|$ telle que

1) $\|x\| = 0 \iff x = 0$,

2) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ inégalité triangulaire,

3) pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$.

L'espace $(E, \| \ \|)$ est appelé espace vectoriel normé.

Exemples 3.1. *I) Sur $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, on peut définir des normes par (pour $x = (x_1, \cdots, x_n)$) :*

- $\|x\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|$,
- $\|x\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2}$, *norme euclidienne*
- $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \cdots, |x_n|\}$.

Montrons, par exemple, que

$$\|x + y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2,$$

c'est à dire

$$\begin{aligned} |x_1 + y_2|^2 + \cdots + |x_n + y_n|^2 &= |x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2 \\ &+|y_1|^2 + \cdots + |y_n|^2 \\ &+2(x_1y_1 + \cdots + x_ny_n) \end{aligned}$$

Or on a

$$\begin{aligned} &(x_1^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + \cdots + y_n^2) - (x_1y_1 + \cdots + x_ny_n)^2 \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i^2 \cdot y_j^2 + x_j^2 \cdot y_i^2 - 2x_iy_ix_jy_j \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_iy_j - x_jy_i)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Ainsi on a

$$\begin{aligned} &2(x_1y_1 + \cdots + x_ny_n) \leq 2|x_1y_1 + \cdots + x_ny_n| \\ &\leq \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}\sqrt{y_1^2 + \cdots + y_n^2} \end{aligned}$$

par suite $\|x+y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2$. $\square$

II) Sur l'espace $C([a,b])$ *des fonctions continues sur l'intervalle* $[a,b]$ *où* $a < b$, *on peut définir les trois normes suivantes :*

- $\|f\|_\infty = \max\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$ *norme de la convergence uniforme*
- $\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|dx$
- $\|f\|_2 = (\int_a^b |f(x)|^2 dx)^{\frac{1}{2}}$

La seule propriété qui n'est pas évidente est l'inégalité triangulaire pour $\|\cdot\|_2$. *Cette propriété découle de l'inégalité de Cauchy-Schwartz* $|\int_a^b f(x)g(x)\,dx| \leq (\int_a^b |f(x)|^2 dx)^{\frac{1}{2}}(\int_a^b |g(x)|^2 dx)^{\frac{1}{2}}$

III) Sur l'espace $\mathbb{R}[X]$ *des polynômes à coefficients réels, on peut définir les trois normes suivantes (pour* $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$*) :*

- $\|P\|_\infty = \max\{|a_1|, |a_2|, ..., |a_n|\}$
- $\|P\|_1 = |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_n|$
- $\|P\|_2 = \sqrt{|a_0|^2 + |a_1|^2 + \cdots + |a_n|^2}$

Exercices 3.1. *Soient* a *et* b *deux point différents d'un espace normé* $(E, \|\cdot\|)$, *soit pour tout* $t \in \mathbb{R}$,

$$x_t = a + \frac{t}{\|b-a\|}(b-a)$$

1) Donner x_t, *pour* $t = 0$ *et pour* $t = \|b-a\|$.

2) Vérifier que $\|x_t - x_s\| = |t-s|$.

3) Supposons $r \leq s \leq t$, *comparer* $\|x_t - x_r\|$ *et* $\|x_t - x_s\| + \|x_s - x_r\|$.

4) Comparer suivant les valeurs de $t \in \mathbb{R}$,

$$\|b-a\|,\ \|x_t - a\|,\ \|x_t - b\|.$$

1.2. Suites et limites. Soit $(E, \|\ \|)$ un espace vectoriel normé. Une suite d'élément de E est une application $u : \mathbb{N} \longrightarrow E$, cette application sera notée $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(u_n)_n$.

Définition 3.2. Une suite u d'éléments d'un espace vectoriel normé $(E, \|\ \|)$ est convergente vers un élément $l \in E$, si la suite réelle $(\|u_n - l\|)_n$ converge vers zéro.

Proposition 3.1. ***(Unicité de la limite) La limite d'une suite dans un espace normé est unique.***

Démonstration. Si l et l' sont deux limites d'une suite $(u_n)_n$ dans un espace normé $(E, \| \ \|)$. Alors $\lim\limits_{n\to\infty} \|u_n - l\| = \lim\limits_{n\to\infty} \|u_n - l'\|$, donc

$$\|l - l'\| \leq \|l - u_n\| + \|u_n - l'\| \to 0,$$

ainsi $\|l - l'\| = 0$ et $l = l'$. $\square$

Définition 3.3. Une suite $u = (u_n)_n$ d'éléments d'un espace normé $(E, \| \ \|)$, est dite suite de Cauchy si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}\ :\ \forall n \geq N,\ \forall m \geq N,\ \|u_n - u_m\| < \varepsilon.$$

Exactement comme le cas réel on a :

Proposition 3.2. ***Dans un espace normé toute suite convergente est de Cauchy.***

Démonstration. Exercice. $\square$

Attention 3.1. Dans un espace normé $(E, \| \cdot \|)$ une suite de Cauchy n'est pas nécessairement convergente. Soit par exemple $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace des polynômes à coefficients réels, muni de la norme $\| \cdot \|_\infty$ définie par :

$$\|a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n\|_\infty = \max\{|a_0|, |a_1|, ..., |a_n|\}.$$

Alors, $(u_n)_n$ où $u_n = X + \frac{1}{2}X + \cdots + \frac{1}{n}X^n$ est une suite de Cauchy car pour $n, p \in \mathbb{N}$, $\|u_{n+p} - u_n\| \leq \frac{1}{n+1}$, mais pour tout polynôme

$$P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_m X^m,$$

et pour tout $n \geq m + 1$, on a

$$\|u_n - P\|_1 \geq \frac{1}{m+1} > 0$$

donc $(u_n)_n$ ne converge pas vers P.

Définition 3.4. Un espace normé $(E, \| \cdot \|)$ est dit complet si toute suite de Cauchy de E est convergente.

Un espace normé complet est appelé espace de Banach.

1.3. Notions de topologie.

Définition 3.5. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé, alors :

• si $a \in E$ et $r \in \mathbb{R}^+$ l'ensemble

$$B^f_{(a,r)} = \{x \in E \ : \ \|x - a\| \leq r\}$$

est dite la boule fermée de centre a est de rayon r,

• si $a \in E$ et $r > 0$ l'ensemble

$$B_{(a,r)} = \{x \in E \ : \ \|x - a\| < r\}$$

est dite la boule ouverte de centre a est de rayon r,

• si $a \in E$ et $r > 0$ l'ensemble

$$S_{(a,r)} = \{x \in E \ : \ \|x - a\| < r\}$$

est dite la sphère de centre a est de rayon r.

Remarque 3.1. La boule $B^f_{(0,1)}$ (resp. $B_{(0,1)}$) est appelée la **boule unité fermée** (resp. **boule unité ouverte**) est elle sera notée B (resp. B^f).

Définition 3.6. Dans un espace normé $(E, \|\cdot\|)$, un esemble $B \subseteq E$ est dit borné si $\{\|b\| \ : \ b \in B\}$ est borné.

Remarque 3.2. 1) Un sous ensemble B d'un espace normé $(E, \|\cdot\|)$ est borné si, et seulement si il existe $r > 0$ tel que $B \subseteq B_{(0,r)}$.

2) Une réunion finie de bornés est un borné.

3) Tout sous ensemble d'un ensemble borné est borné.

4) Une suite $(u_n)_n$ est dite **bornée** si l'ensemble $\{u_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ est borné.

Définition 3.7. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé.

• Un sous ensemble O de E est dit ouvert si pour tout $x \in O$, il existe $r > 0$ tel que la boule ouverte $B_{(x,r)} \subseteq O$.

• Un sous ensemble F de E est dit fermé si $E \setminus F$ est un ouvert.

• Soient $a \in E$ et $V \subseteq E$, on dira que V est un voisinage de a si pour un certain réel $r > 0$, on a $B_{(a,r)} \subseteq V$.

Remarque 3.3. 1) L'ensemble vide $\emptyset$ et E sont des ensembles ouverts et fermés.

2) Une réunion quelconque d'ouverts (resp. de voisinages d'un élément a de E) est un ouvert (resp. voisinage de a).

3) Une intersection finie de ouverts (resp. de voisinages d'un élément a de E est un ouvert (resp. voisinage de a).

4) Une réunion finie de fermés est un fermé.

5) Une intersection quelconque de fermés est un fermé.

6) Une boule ouverte (resp. fermée) est un ouvert (resp. fermé).

7) Tout sous ensemble fini de E est fermé.

La remarque précédente permet de donner la définition :

Définition 3.8. **Soient** $(E, \|\cdot\|)$ **un espace normé et** A **une partie de** E**.**

1) L'intérieur de A**, noté** $\overset{o}{\mathbf{A}}$ **est le plus grand ouvert contenu dans** A **(il existe au moins un à savoir** $\emptyset$**). Un point de** $\overset{o}{A}$ **est appelé point intérieur à** A**.**

2) L'adhérence, ou la fermeture, de A**, notée** $\overline{\mathbf{A}}$ **est le plus petit fermé contenant** E **(il existe au moins un à savoir** E**). Un point de** $\overline{A}$ **est appelé point adhérent à** A**.**

3) La frontière de A**, notée Fr**(A)**, est l'ensemble** $\overline{\mathbf{A}} \setminus \overset{o}{\mathbf{A}} = \overline{\mathbf{A}} \cap \overline{\mathbf{C}_{\mathbf{E}}^{\mathbf{A}}}$

Exercices 3.2. *Soit* $(E, \|\cdot\|)$ *un espace normé. Montrer que :*

1) Toute boule ouverte est un ouvert.

2) Toute boule fermée est un fermé.

3) Pour tout $r > 0$ *et* $a \in E$, $B^f_{(a,r)} = \overline{B_{(a,r)}}$.

Solution. 1) Soit $b \in B_{(a,r)}$, posons $s = r - \|b - a\|$. Vérifions que $B_{(b,s)} \subseteq B_{(a,r)}$. En effet, pour tout $c \in B_{(b,s)}$, on a $\|c - b\| < s$, donc

$$\|c - a\| \leq \|c - b\| + \|b - a\| < s + \|b - a\| = r.$$

D'où $c \in B_{(a,r)}$. Ainsi $B_{(a,r)}$ est un ouvert.
2) Soit $b \notin B^f_{(a,r)}$, on a $\|b - a\| > r$. Posons $s = \|b - a\| - r$, alors $B_{(b,s)} \cap B^f_{(a,r)} = \emptyset$, c'est à dire $B_{(b,s)} \subseteq E \setminus B^f_{(a,r)}$, d'où $E \setminus B^f_{(a,r)}$ est un ouvert.
3) Soit $b \in B^f_{(a,r)}$ si $b \notin B_{(a,r)}$ donc $\|b - a\| = r$. Soit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = \frac{1}{n}a + (1 - \frac{1}{n})b$. On a

$$\begin{aligned} \|b_n - a\| &= \|\tfrac{1}{n}a + (1 - \tfrac{1}{n})b - (\tfrac{1}{n}a + (1 - \tfrac{1}{n})a)\| \\ &= \|(1 - \tfrac{1}{n})(b - a)\| = (1 - \tfrac{1}{n})r < r. \end{aligned}$$

Donc $b_n \in B_{(a,r)}$. De plus $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. D'où $b \in \overline{B_{(a,r)}}$. Ainsi $B^f_{(a,r)} \subseteq \overline{B_{(a,r)}}$, de plus $B^f_{(a,r)}$ est un fermé qui contient $B_{(a,r)}$, d'où l'égalité.

Exercices 3.3. *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé. Si A et B deux partie E, Montrer que :*

1) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

2) $\overline{C_E^A} = C_E^{\overset{o}{A}}$ *et* $\widehat{C_E^A}^{o} = C_E^{\overline{A}}$.

2) $\widehat{A \cap B}^{o} = \overset{o}{A} \cap \overset{o}{B}$.

Proposition 3.3. ***Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé et $F \subseteq E$. Alors on a l'équivalence :***

1) F est fermé dans E,

2) toute suite d'éléments de F qui converge dans E, sa limite est dans F.

Démonstration. Analogue a celle donner pour $\mathbb{R}$, le lecteur est invité à faire la preuve en exercice.

Exercices 3.4. *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé, $A \subseteq E$ et $x \in E$. Montrer l'équivalence :*

1) $x \in \overline{A}$,

2) il existe $(a_n)_n$ dans A telle que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x$.

3) $\inf\{\|x - a\| \ : \ a \in A\} = 0$

1.4. Distances et topologie d'une partie d'un espace normé.

Définition 3.9. I) Soient E un ensemble non vide et $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}^+$, une application telle que :

- $d(x, y) = 0 \iff x = y$,
- $d(x, y) = d(y, x)$, **(symétrie),**
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, **(inégalité triangulaire).**

On dit alors que d est une distance sur E et que $(\mathbf{E}, \mathbf{d})$ est un espace métrique.

II) Soit A un sous ensemble non vide d'un espace normé $(E, \|\cdot\|)$, l'application $d : \ A \times A \to \mathbb{R}^+; \ d(x, y) = \|x - y\|$ **est dite distance associé à la norme $\|\cdot\|$.**

Définition 3.10. Soient $(E, \|\cdot\|)$ et $(F, \|\cdot\|')$ deux espaces normés, A une partie de E et B une partie de F. Soit $f : \ A \longrightarrow B$ est une application :

1) Si $a \in \overline{A}$, on dit que f converge vers $b \in F$ quand x tend vers a, et on note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0, \forall y \in A, \|x - a\| < \eta \Longrightarrow \|f(x) - b\|' < \varepsilon$$

2) l'application f est continue en un point a de A si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

3) f est continue sur A si elle est continue en tout point de A.

Proposition 3.4. *Si $(E, \|\cdot\|)$ et $(F, \|\cdot\|')$ sont deux espaces normés, $A \subseteq E$, $f :\ A \longrightarrow F$ une application et $a \in \overline{A}$. Alors on a l'équivalence :*

1) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b \in F$,

2) pour toute suite $(x_n)_n$ dans A,

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n \to \infty} f(x_n) = b$$

Démonstration. Exercice. □

Exemples 3.2. *Soit $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces normés et A une partie de E.*

*1) Une application $f :\ A \longrightarrow F$ et k un réel positif. On dira que f est **k-lipschitziènne** si $\|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|$. Alors toute application k-lipschitziènne est continue.*

2) Soit d_E la distance associée à $\|\cdot\|_E$, pour tout sous ensemble non vide A de E, on peut définir l'application

$$f\ :\ E \longrightarrow \mathbb{R};\ x \mapsto d(x, A)$$

où $d_E(x, A) = \inf\{d(x, a)\ :\ a \in A\}$, dite distance de x à A. Alors f est lipschitziènne.

3) Sur un espace normé $(E, \|\cdot\|)$ l'application

$$f :\ E \rightarrow E;\ x \mapsto \lambda \cdot x + a$$

où $a \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, est continue.

*4) Soient A (resp. B) une partie non vide de $(E, \|\cdot\|_E)$ (resp. $(F, \|\cdot\|_F)$). Une application $f\ :\ A \longrightarrow B$ est dite une **isométrie** si $d_F(f(x), f(y)) = d_E(x, y)$ pour tout $(x, y) \in A \times B$ (c'est à dire $\|x - y\|_E = \|f(x) - f(y)\|_F$). Alors toute isométrie est continue.*

Définition 3.11. **Soit A une partie non vide d'un espace normé $(E, \|\cdot\|)$.**

1) Un sous ensemble O de A est dit ouvert de A, si $O = U \cap A$ où U est un ouvert de E.

2) Un sous ensemble F de A est dit fermé dans A, si $F = G \cap A$ où G est un fermé dans E.

Proposition 3.5. ***Soit*** A ***une partie non vide d'un espace normé*** $(E, \|\cdot\|)$ ***et soit*** d ***la distance associée à*** $\|\cdot\|$***. Si de plus*** O ***une partie de*** A***, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :***

1) O ***est un ouvert de*** A***,***

2) pour tout $a \in A$***, il existe*** $r > 0$ ***tel que***

$$B_A(a, r) = \{x \in A \ : \ d(a, x) < r\} \subseteq O$$

Démonstration. Exercice. □

Proposition 3.6. ***Soit*** A ***(resp.*** B***) une partie non vide d'un espace normé*** $(E, \|\cdot\|)$ ***(resp.*** $(F, \|\cdot\|_F)$***). Si de plus*** $f : \ A \longrightarrow B$ ***une application. Alors on a l'équivalence :***

1) f ***est continue sur*** A***,***

2) l'image réciproque de tout ouvert de B ***est un ouvert de*** A***.***

3) l'image réciproque de tout fermé de B ***est un fermé de*** A***.***

Démonstration. 1) $\Longrightarrow$ 2). Soit O un ouvert de b et $U = f^{-1}(O)$, montrons que U est un ouvert de A. Soit $a \in U$ on a il existe une boule ouverte $B_{(f(a),\varepsilon)}$ dans F, telle que $B_{(f(a),\varepsilon)} \cap B \subseteq O$. La continuité de f en a entraîne que pour un certain $\eta > 0$ et pour tout $x \in A$ tel que $\|x - a\|_E < \eta$, on a $\|f(x) - f(a)\|_F < \varepsilon$, c'est à dire que $f(A \cap B_{(a,\eta)}) \subseteq B_{(f(a),\varepsilon)} \cap B \subseteq O$. D'où $A \cap B_{(a,\eta)} \subseteq U$, ainsi U est un ouvert dans A.
2) $\Longrightarrow$ 1). Soit $a \in A$, pour tout $\varepsilon > 0$, dans F la boule ouverte $B_{(f(a),\varepsilon)}$ est un ouvert, donc $f^{-1}(B_{(f(a),\varepsilon)})$ est un ouvert de A contenant a, donc il existe $\eta > 0$ tel que $A \cap B_{(a,\eta)} \subseteq f^{-1}(B_{(f(a),\varepsilon)})$. D'où pour tout $x \in A$ tel que $\|x - a\|_E < \eta$ on a $\|f(x) - f(a)\|_F < \varepsilon$, ainsi f est continue sur A par suite f est contntinue en a pour tout $a \in A$, donc f est continue sur A.
2) $\Longleftrightarrow$ 3) Il suffit de remarquer que $f^{-1}(C_B^Y) = C_A^{f^{-1}(Y)}$. □

Proposition 3.7. ***Soient*** $(E, \|\cdot\|_E)$ ***et*** $(F, \|\cdot\|_F)$ ***deux espaces normés et***

$$f : \ E \longrightarrow F$$

une application linéaire, alors on a l'équivalence :

1) f ***est continue,***

2) f ***est continue en*** 0***,***

3) il existe $M > 0$ ***tel que pour tout*** $x \in E$***,*** $\|f(x)\|_F \leq M\|x\|_E$***.***

Démonstration. Les implications 3) $\Longrightarrow$ 1) $\Longrightarrow$ 2) sont évidentes. Montrons que 2) $\Longrightarrow$ 3). Sinon donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe $x_n \in E$, tel que $\|f(x_n)\|_F > n\|x_n\|_E$. Posons

$y_n = \frac{1}{n\|x_n\|_E} x_n$, on a $\lim\limits_{n\to\infty} \|y_n\|_E = 0$ donc $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$. Mais

$$\|f(y_n)\|_F = \frac{1}{n\|x_n\|_E}\|f(x_n)\|_F > 1.$$

Ainsi $(f(y_n))_n$ ne converge pas vers 0, ce qui est absurde.

Exercices 3.5. *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé. Soit $\|\cdot\|'$ une autre norme sur E. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1) $\|\cdot\|'$ est continue sur E,

2) $\|\cdot\|'$ est continue en zéro,

3) il existe un réel $M > 0$ tel que pour tout x dans E, $\|x\|' \leq M\|x\|$.

Définition 3.12. **Sur un espace vectoriel E deux normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ sont dites équivalentes si il existe deux réels M et N strictement positifs tels que pour tout $x \in E$,**

$$N\|x\| \leq \|x\|' \leq M\|x\|.$$

Exemples 3.3. *1) Sur $\mathbb{R}^n$ les normes $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont équivalentes. En effet,*

$$\|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|_2 \leq \|\cdot\|_1 \leq n\|\cdot\|_\infty$$

2) Sur $\mathbb{R}[X]$ les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ ne sont pas équivalentes. En effet, pour $P_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X^k$, on a $\|P_n\|_1 = n$ et $\|P_n\|_\infty = 1$. Donc on ne peut pas avoir $\|P_n\|_1 \leq M\|P_n\|_1$, pour tout n.

Remarque 3.4. Deux normes équivalentes sur un espace vectoriel définissent les mêmes ouverts, les mêmes fermés, les mêmes bornés, les mêmes suites de Cauchy et les mêmes suites convergentes.

1.5. Parties connexes par arcs.

Définition 3.13. **Soit E un espace normé de dimension finie. Une partie non vide de A de E est dite**

1) convexe si pour tout $(a, b) \in A^2$, le segment $[a, b] := \{(1-t)a + tb \;:\; 0 \leq t \leq 1\}$ est contenu dans A ;

2) étoilée par rapport à un point a de A, si pour tout $b \in A$, $[a, b] \subseteq A$;

3) connexe par arcs si pour tout $(a, b) \in A^2$, il existe une application continue $f : [0, 1] \longrightarrow E$ telle que $f(0) = a$ et $f(1) = b$.

Remarque 3.5. 1) Il est évident que convexe $\Longrightarrow$ étoilé $\Longrightarrow$ connexe pae arcs. Vérifions par exemple que étoilé $\Longrightarrow$ connexe par arcs. Soit A un ensemble étoilé par rapport à un point a, soit $(b,c) \in A^2$ on a $[b,a] \cup [a,c] \subseteq A$. Le segment $[b,a]$ est l'image de $[0,1]$ par l'application continue $f(t) = (1-t)b + ta$ (resp. $g(t) = (1-t)a + tc$). Soit

$$h(t) = \begin{cases} f(2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ g(2t-1) & \text{si } t \in]\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

L'application h est continue sur $[0,1]$, $h(0) = b$, $h(1) = c$ et $h([0,1]) = [b,a] \cup [a,c] \subseteq A$.

2) Dans $\mathbb{R}^2$ un cercle, non réduit à un point, est un connexe par arcs qui n'est pas étoilé.

3) Dans $\mathbb{R}^2$, $[(0,0),(1,0)] \cup [(0,0),(0,1)]$ est étoilée par rapport à $(0,0)$, mais elle n'est pas convexe.

Proposition 3.8. ***Les connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles***

Démonstration. D'abord tout intervalle est convexe donc il est connexes par arcs. Inversement, si I est un connexes par arcs dans $\mathbb{R}$. Pour tout $(a,b) \in I^2$, $a \leq b$, il existe une application continue $f: [0,1] \longrightarrow I$ telle que $f(0) = a$ et $f(1) = b$. Par le théorème des valeurs intermédiaires $[a,b] \subseteq f([0,1]) \subseteq I$. D'où I est un intervalle.

Proposition 3.9. ***L'image d'un connexe par arcs par une application continue est un connexe par arcs.***

Démonstration. Découle du fait que le composé de deux fonctions continues est une fonction continue. □

Corollaire 3.1. ***L'image d'un connexe par arcs par une application continue à valeurs réelles est un intervalle.***

Démonstration. Découle des deux propositions précédantes. □

1.6. Parties compacts.

Définition 3.14. Soit E un espace vectoriel et Soit $u = (u_n)_n$ une suite dans E. Une sous suite extraite de u est une suite de la forme $(u_{\sigma(n)})_n$ où $\sigma \ : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante.

Définition 3.15. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé. Un sous ensemble K de E est dit compact si de toute suite d'éléments de K on peut extraire une sous suite convergente dans K.

Exercices 3.6. *1) Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé. Montrer que si K est un compact alors, K est un fermé borné.*

2) Soit $(\mathbb{R}[X], \|\cdot\|_\infty)$ et $F = \{X^n \ : \ n \in \mathbb{N}^*\}$. Montrer que F est un fermé borné qui n'est pas compact.

Proposition 3.10. ***L'image d'un compact par une application continue est un compact.***

Démonstration. Exercice.

Corollaire 3.2. ***Soit K un compact d'un espace normé. Toute application $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ continue est bornée et elle atteint ses bornes.***

Démonstration. Exercice.

Définition 3.16. Soient $(E, \|\cdot\|)$ et $(F, \|\cdot\|')$ deux espaces normés. Si de plus A (resp. B) est une partie non vide de E (resp. F) et $f \ : \ A \longrightarrow F$ une application. On dit que f est uniformément continue sur A si

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \ \exists \eta > 0 \ : \quad & \forall x, y \in A, \ \|x - y\| < \eta \\ & \Longrightarrow \ \|f(x) - f(y)\|' < \varepsilon. \end{aligned}$$

Remarque 3.6. Soit $f \ : \ A \longrightarrow F$ une application, si f est uniformément continue sur A, alors f est continue sur A.

Théorème 3.1. ***(de Heine) Toute application continue sur un compact est uniformément continue.***

Démonstration. Exercice.

2. Espaces vectoriels normés de dimension finie.

Proposition 3.11. ***Tout espace vectoriel de dimension finie possède des normes.***

Démonstration. Soit $\{e_1, \cdots, e_n\}$ une base de E, alors si $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$,

$$\|x\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|,$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|,$$

et $\|x\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2}$ sont toutes des normes sur E. $\square$

Remarque 3.7. Dans le reste de ce paragraphe si E est un espace vectoriel de dimension finie. On peut se permettre de définir les normes

$$\|\cdot\|_1, \ \|\cdot\|_2, \ \|\cdot\|_\infty$$

elles seront alors rapporter, sans le dire par fois, à une base quelconque de l'espace E. Signalons que ces tois normes sont équivalentes.

Théorème 3.2. ***(de Bolzano-Weierstrass) Soit*** E ***un espace normé de dimension finie muni d'une norme*** $\|\cdot\|_\infty$***, où une norme équivalente, alors de toute suite bornée de*** E ***on peut extraire une sous suite convergente.***

Démonstration. On peut supposer que $E = \mathbb{R}^p$ et soit $\|\cdot\|_\infty$ la norme infinie sur E. On démontre le théorème par récurrence sur p. Si $p = 1$, le théorème est déjà démontré. Supposons le résultat vrai pour p, Si $(u_n)_n$ est une suite bornée de $\mathbb{R}^{p+1}$, donc $u_n = ({u^1}_n, ..., {u^{p+1}}_n)$, alors la suite $(({u^1}_n, ..., {u^p}_n))_n$ est bornée dans $\mathbb{R}^p$ donc, par hypothèse de récurrence, elle possède une sous suite extraite $(({u^1}_{\sigma(n)}, ..., {u^p}_{\sigma(n)}))_n$ qui converge. La suite $({u^{p+1}}_{\sigma(n)})_n$ est bornée donc elle possède une sous suite extraite $(({u^1}_{\sigma(\varphi(n))}, ..., {u^p}_{\sigma(\varphi(n))}))_n$ qui converge. Donc $(({u^1}_{\sigma o\varphi(n)}, ..., {u^{p+1}}_{\sigma o\varphi(n)}))_n$ est une sous suite extraite de $(u_n)_n$ qui converge. $\square$

Proposition 3.12. ***Soit*** E ***un espace normé de dimension finie muni de la norme*** $\|\cdot\|_\infty$***, où une norme équivalente, Alors les parties compacts de*** E ***sont exactement les parties fermées bornées.***

Démonstration. Exercice.

Exemples 3.4. *Soit E un espace normé de dimension finie muni d'une norme $\|\cdot\|_\infty$, où une norme équivalente.*

1) Les boules fermées est les sphères sont des compacts dans E.

2) Si $(x_n)_n$ est une suite qui converge vers un élément x dans E, alors l'ensemble

$$K = \{x_n \ : \ n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$$

est un compact.

En effet, Il est clair que K est borné. Vérifions que K est fermé. Soient $a \notin K$ et $r = \frac{\|a-x\|}{2}$, il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que $n \geq N$, $x_n \in B_{(x,r)}$. Soit $s = \min\{r, \|a-x_0\|, \|a-x_1\|, ..., \|a-x_{N-1}\|\}$. Alors $B_{(a,s)} \cap K = \emptyset$, d'où $E \setminus K$ est un ouvert, c'est à dire K est fermé. Ainsi K est un compact.

Théorème 3.3. ***Dans un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.***

Démonstration. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $\{e_1, \cdots, e_n\}$ une base de E. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur E, montrons que $\|\cdot\|$ est équivalente à $\|\cdot\|_\infty$. D'une part,

$$\begin{aligned} \|x\| &\leq \|x_1 e_1\| + \cdots + \|x_n e_n\| \\ &\leq \max_{1\leq i\leq n}(|x_i|) \cdot (\|e_1\| + \cdots + \|e_n\|) \\ &= \|x\|_\infty (\|e_1\| + \cdots + \|e_n\|) \end{aligned}$$

Nous avons démontrer que $x \mapsto \|x\|$ est continue sur $(E, \|\cdot\|_\infty)$ et puisque la sphère unité

$$S_{\|\cdot\|_\infty} = \{x \in E \ : \ \|x\|_\infty = 1\}$$

de la norme $\|\cdot\|_\infty$ est un compact dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$. Donc $x \mapsto \|x\|$ atteint ses bornes sur $S_{\|\cdot\|_\infty}$. D'où il existe $s \in S_{\|\cdot\|_\infty}$ tel que

$$\inf_{x\in S} \|x\| = \|s\| = N > 0.$$

D'où pour tout $x \in E$ non nul, $\|\frac{1}{\|x\|_\infty} x\| \geq N$, c'est à dire $\|x\| \geq N\|x\|_\infty$. Par suite pour tout $x \in E,\ N\|x\|_\infty \leq \|x\| \leq (\|e_1\| + \cdots + \|e_n\|)\|x\|_\infty$. □

Théorème 3.4. ***Toute espace normé de dimension finie est un espace de Banach.***

Démonstration. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé de dimension finie. Toute les normes sur E sont équivalentes donc on peut utiliser la norme $\|\cdot\|_1$ par rapport à une base $\{e_1, ..., e_m\}$ de E. Soit $(u_n)_n$ une suite de Cauchy dans E. Pour tout n on a $u_n = u_n^1 e_1 + \cdots + u_n^m e_m$. Pour tout $i \in \{1, ..., m\}$, $|u_{n+p}^i - u_n^i| \leq \|u_{n+p} - u_n\|_1$. Donc $(u_n^i)_n$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$, donc elle converge vers une limite notée $l^i \in \mathbb{R}$. Soit $l = l^1 e_1 + \cdots + l^m e_m$, on a $\|u_n - l\|_1 = |u_n^1 - l^1| + \cdots + |u_n^m - l^m|$, ainsi $\lim\limits_{n\to\infty} \|u_n - l\|_1 = 0$. D'où $(u_n)_n$ converge vers l dans E. □

Proposition 3.13. ***Soient*** $(E, \|\cdot\|)$ ***un espace normé de dimension finie,*** $(F, \|\cdot\|')$ ***un espace normé et*** $f : \ E \longrightarrow F$***, une application linéaire, alors*** f ***est continue.***

Démonstration. Soit $\{e_1, ..., e_p\}$ une base de E et soit $\|\cdot\|_\infty$ la norme infinie de E associée à cette base. Pour tout $x = x_1e_1 + \cdots + x_pe_p \in E$, on a

$$\begin{aligned}\|f(x)\|' &\leq |x_1|\|f(e_1)\|' + \cdots + |x_p|\|f(e_p)\|' \\ &\leq \|x\|_\infty(\|f(e_1)\|' + \cdots + \|f(e_p)\|').\end{aligned}$$

Sur l'espace E, la norme $\|\cdot\|_\infty$ est équivalente à la norme $\|\cdot\|$. Donc il existe $M > 0$, tel que pour tout $x \in E$, $\|x\|_\infty \leq M\|x\|$. D'où pour tout $x \in E$, on a

$$\|f(x)\|' \leq M(\|f(e_1)\|' + \cdots + \|f(e_p)\|')\|x\|. \square$$

2.1. Quelques Exemples d'espaces vectoriels normés. I. Le corps $\mathbb{C}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 2, de plus l'application $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C};\ (a, b) \mapsto a + ib$ permet d'identifier $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$. Ainsi la norme $\|\cdot\|_2$ sur $\mathbb{C}$ n'est autre que le module $|\cdot|$.

II. Soient $(E, \|\cdot\|)$ et $(F, \|\cdot\|')$ deux espaces normés de dimension finie. Soit $\mathbf{L(E, F)}$ l'espace des homomorphismes de E dans F. Tout $f \in L(E, F)$, est continue. Donc $\sup\limits_{\|x\|=1} \|f(x)\|'$ existe et fini, alors $f \mapsto \|\mathbf{f}\| := \sup\limits_{\|\mathbf{x}\|=\mathbf{1}} \|\mathbf{f(x)}\|'$ est une norme sur $L(E, F)$. On dira que $f \mapsto \|f\|$ est **la norme** de $L(E, F)$ (**subordonée** aux normes de E et F).

III. Soit $\mathbf{L(E)}$ l'espace des endomorphismes sur E, on a la norme $\|\cdot\|$ de $L(E)$, subordonée à la norme de E, vérifie aussi $\|\mathbf{f} \circ \mathbf{g}\| \leq \|\mathbf{f}\| \cdot \|\mathbf{g}\|$.

IV. L'espace $\mathbf{M_n}(\mathbb{R})$ des matrices d'ordre n s'identifie à $L(\mathbb{R}^n)$.

• Chaque norme sur $\mathbb{R}^n$ donne naissance à une norme sur $M_n(\mathbb{R})$ qui vérifie pour tout $(A, B) \in M_n(\mathbb{R})^2$, $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$.

• On aussi pour $M \in \mathbf{M_n}(\mathbb{R})$, $\|M\| = \sqrt{\mathrm{tr}(M \cdot M^t)}$ définie une nourme **euclidienne**e sur $\mathbf{M_n}(\mathbb{R})$, où $\mathrm{tr}(M)$ (resp. M^t) désigne la trace (resp. transposée) de M (en fait $\langle M, N\rangle = \sqrt{\mathrm{tr}(M \cdot N^t)}$ est un **produit scalaire** sur $\mathbf{M_n}(\mathbb{R})$).

V. Si $F = \mathbb{R}$ alors $L(E, F)$ n'est autre que l'**espace dual** de E, noté $\mathbf{E}'$, c'est l'espace des formes linéaires sur E.

VI. Si $E = \mathbb{R}^n$ muni de la norme $\|\cdot\|_2$ dite norme **euclidienne**. On a $\langle x, y\rangle = x_1y_1+\cdots+x_ny_n$ est un **produit scalaire** sur $\mathbb{R}^n$ et

$$\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x\rangle}.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, l'application :

$$f_x : \ \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, y \mapsto \langle x, y\rangle$$

est un élément de E' et on a $E \longrightarrow E'; \ x \mapsto f_x$ est un isomorphisme isométrique ($\|x\|_2 = \|f_x\|$). Ainsi E **s'identifie à** E'.

VII. Soient $(E, \|\cdot\|)$ et $(F, \|\cdot\|')$ deux espaces normés.

1) L'espace $E \times F$ peut être muni des normes équivalentes suivantes :

- $(x, y) \mapsto \|x\| + \|y\|'$
- $(x, y) \mapsto \max\{\|x\|, \|y\|'\}$
- $(x, y) \mapsto \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|'^2}$.

L'espace $E \times F$ est appelé **espace normé produit** de E et F.

2) Soit $(G, \|\cdot\|'')$ espace normé. Une application $B \ : \ E\times F \longrightarrow G$, est dite **bilinéaire** si pour tout $x \in E$ (resp. $y \in F$) l'application : $E \longrightarrow G; \ y \mapsto B(x, y)$ (resp. $F \longrightarrow G; \ x \mapsto B(x, y)$) est linéaire.

3) L'application B est continue si et seulement si, il existe $M > 0$ tel que pour tout $(x, y) \in E \times F$, on a $\|B(x, y)\|'' \leq M\|x\| \cdot \|y\|'$.

En effet (nous vérifions seulement une implication). Pour $(x, y) \in E\times F$ et $(x_0, y_0) \in E\times F$, on a

$$\begin{aligned}
\|B(x,y) - B(x_0, y_0)\|'' &= \|B(x, y) - B(x, y_0) \\
&\quad +B(x, y_0) - B(x_0, y_0)\|'' \\
&\leq \|B(x, y - y_0)\|'' \\
&\quad +\|B(x - x_0, y_0)\|'' \\
&\leq \|x\|_\infty\|y - y_0\|'_\infty M \\
&\quad +\|x - x_0\|_\infty\|y_0\|'_\infty M
\end{aligned}$$

4) De plus si E et F sont de dimension finie alors B est continue.

En effet, soient $\mathcal{B} = \{e_1, ..., e_n\}$ (resp. $\mathcal{B}' = \{f_1, ..., f_m\}$) est une base de E (resp. F). Pour tous

$$x = x_1 + \cdots + x_ne_n \in E \text{ et } y = y_1 + \cdots + y_me_m \in F$$

soit $\|\cdot\|_\infty$ (resp. $\|\cdot\|'_\infty$) la norme infinie de E (resp. F) par rapport à la base $\mathcal{B}$ (rep. $\mathcal{B}'$).

$$\begin{aligned}\|B(x,y)\|'' &= \|\sum_{i,j} x_i y_j B(e_i, f_j)\|'' \\ &\leq \|x\|_\infty \|y\|'_\infty (\sum_{i,j} \|B(e_i, f_j)\|'') \\ &\leq M\|x\|_\infty \|y\|'_\infty\end{aligned}$$

où $M = \sum_{i,j} \|B(e_i, f_j)\|''$.

5) Si $(E, \|\cdot\|)$ est un espace normé, alors les deux applications suivantes, qui sont réspectivement linéaire et bilinéaire, sont continues :

- $S\ : E \times E \longrightarrow E;\ (x,y) \mapsto x + y$
- $\Pi\ : \mathbb{R} \times E \longrightarrow E;\ (\lambda, y) \mapsto \lambda \cdot x.$

Donc si on a $x_n \to x$ et $y_n \to y$ dans E, et $\lambda_n \to \lambda$ dans $\mathbb{R}$, alors $\lambda_n \cdot x_n + y_n \to \lambda \cdot x + y$.

VIII. Si E_1, E_2,..., E_p, des espaces vectoriels normés de dimension finie.

1) On peut définir par récurrence l'espace normé produit

$$E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p.$$

2) De même on a toute application p-linéaire

$$f :\ E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p \longrightarrow F,$$

où F est un espace normé, vérifie pour un certain $M > 0$,

$$\|f(x_1, x_2, ..., x_p)\|_F \leq M\|x_1\|_{E_1}\|x_2\|_{E_2} \cdots \|x_p\|_{E_p}$$

pour tout $(x_1, x_2, ..., x_p) \in E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p$. Donc f est continue.

3) Comme conséquence on a le **déterminant** dét : $M_p(I\!R) \longrightarrow \mathbb{R}$ est une application continue.

4) Le **goupe linéaire** $GL_p(I\!R) = \text{dét}^{-1}(I\!R^*)$ est un ouvert dans $M_p(I\!R)$.

3. Série n^o 3.

Exercice 1. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé. Soient A et B deux sous ensembles de E. Montrer que

1) $E \setminus \overline{A} = \overbrace{E \setminus A}^{o}$ et $E \setminus \overset{o}{A} = \overline{E \setminus A}$.

2) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ et $\overbrace{A \cap B}^{o} = \overset{o}{A} \cap \overset{o}{B}$.

Exercice 2. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé. Soient $(r, s) \in]0, \infty[^2$ et $(a, b) \in E^2$. Montrer que (ind. dans cette exercice on peut s'inspirer des positions relatives de deux disques dans le plan).

1) $B_{(a,r)}$ est un ouvert et $B^f_{(a,r)}$ est un fermé.

2) $\overline{B_{(a,r)}} = B^f_{(a,r)}$ et $\overbrace{B^f_{(a,r)}}^{o} = B_{(a,r)}$.

3) $B_{(a,r)} \cap B_{(b,s)} \neq \emptyset \iff \|a - b\| < r + s$.

4) $B_{(a,r)} = B_{(b,s)} \iff (a, r) = (b, s)$.

Exercice 3. Soit $M_2(I\!R)$ l'espace des matrices carrées d'ordre 2, l'espace $I\!R^2$ est muni de la norme infinie $\|\cdot\|_\infty$.

1. Soit $M = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$, vérifier que $||M|| = \sup\{\|Mx\|_\infty \ : \ \|x\|_\infty \leq 1\}$ est une norme sur $M_2(I\!R)$ et que $||M|| = \max\{|a_{1,1}| + |a_{1,2}|, |a_{2,1}| + |a_{2,2}|\}$.

2. Vérifier, de deux manières, que si M et N dans $M_2(I\!R)$, $\|MN\| \leq \|M\| \cdot \|N\|$.

Exercice 4. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé et soit d la distance associée à $\|\cdot\|$. On rappel que pour $x \in E$ et $A \subseteq E$, on a $d(x, A) = \inf\{d(x, a) \ : \ a \in A\}$.

1) Montrer que : $d(x, A) = 0 \iff x \in \overline{A}$.

2) Montrer que l'application $f_A \ : \ E \longrightarrow I\!R; \ x \mapsto d(x, A)$ est continue (ind. on montrera qu'elle est lipschitzienne).

Exercice 5. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé dimension finie et soit d la distance associée à $\|\cdot\|$.

1) Montrer que si A est une partie fermée non vide de E et $x \in E$, alors il existe $a \in A$ tel que $d(x, A) = d(x, a)$.

2) En déduire que dans $(\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_2)$ si $x \in \mathbb{R}^3$, et A est une droite ou un plan dans $\mathbb{R}^3$, alors il existe $a \in A$ tel que $d(x,a) = d(x,A)$.

Exercice 6. Soient dans $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geq 0, \ xy = 1\}$ et $B = \mathbb{R} \times \{0\}$.

1) Vérifier que A et B sont deux fermés disjoints.

2) Vérifier que $d(A,B) = 0$.

Exercice 7. Soit dans C la sphère unité dans $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$. Soit $f : \ C \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue.

1) Montrer que l'image de f est un intervalle fermé.

2) Montrer que f n'est pas injective (ind. considérer l'ensemble $C \setminus \{a\}$ où $f(a)$ est un point situé à l'intérieur de $f(C)$, puis dire si $f(C \setminus \{a\})$ est connexe par arcs).

En déduire que f^{-1} est continue.

Exercice 8. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé de dimension finie, $(F, \|\cdot\|')$ un espace normé et $L : \ E \longrightarrow F$ une application linéaire.

1) Soit $f : \ B(0,r) \longrightarrow F$, $r > 0$, une application telle que $\|f(x) - L(x)\|' = o(\|x\|)$, montrer que f est continue en zéro.

2) Supposons que f est la restriction d'une application linéaire G, montrer que $L = G$.

Exercices facultatifs

Exercice 1. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé et soit d la distance associée à $\|\cdot\|$. On rappel que pour $x \in E$ et $A \subseteq E$, on a $d(x,A) = \inf\{d(x,a) \ : \ a \in A\}$.

1) Montrer que : $d(x,A) = 0 \iff x \in \overline{A}$.

2) Montrer que l'application $f_A \ : \ E \longrightarrow \mathbb{R}; \ x \mapsto d(x,A)$ est continue.

3) Soit F_1 et F_2 deux sous ensembles non vides, fermés et disjoints.

i. Définissons sur E la fonction :

$$f \ : \ x \mapsto \frac{d(x,F_2)}{d(x,F_1) + d(x,F_2)}$$

Montrer que f est une application continue, $f(E) \subseteq [0,1]$, $f(F_1) = \{0\}$ et $f(F_2) = \{1\}$.

ii. Déduire qu'il existe deux ouverts disjoints O_1 et O_2 tels que $F_1 \subseteq O_1$ et $F_2 \subseteq O_2$.

4) Si A et B sont deux parties de E, on définie $d(A,B) = \inf\{d(x,y)/\ (x,y) \in A \times B\}$.

i. Vérifier que $d(A,B) = \inf\{d(x,B)/\ x \in A\} = \inf\{d(y,A)/\ y \in B\}$.

ii. Supposons que $A \cap B = \emptyset$, A est compact et B est fermé. Montrer que $d(A,B) > 0$.

5) Soient dans $I\!R^2$, $A = \{(x,y) \in I\!R^2\ :\ xy = 1\}$ et $B = I\!R^2 \times \{0\}$.

i. Vérifier que A et B sont deux fermés disjoints.

ii. Vérifier que $d(A,B) = 0$.

Exercice 2. Soit dans C la sphère unité dans $(I\!R^2, \|\cdot\|_2)$. Soit $f:\ C \longrightarrow I\!R$ une application continue.

1) Montrer que l'image de f est un intervalle fermé.

2) Montrer que f ne peut pas être bijective (ind. utiliser les propriété des ensembles connexes par arcs).

Exercice 5. Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé. Un sous ensemble non vide A de E est dit connexe si pour tous ouverts disjoints U et V de E, si $A \subseteq U \cup V$ alors $A \subseteq U$ ou $A \subseteq V$.

1) (Tout intervalle de $I\!R$ est connexe) Soit I un intervalle de $I\!R$ et soient U et V deux ouverts disjoints tels que $I \subseteq U \cup V$.

i. Soit $(a,b) \in I^2$, tel que $a < b$. Supposons que $a \in U$ et posons

$$E = \{x \in [a,b]\ :\ [a,x] \subseteq U\}.$$

Montrer $c = \sup E$ existe, a-t-on $c \in V$. Conclure.

ii. Que peut-on dire si $a \in V$.

iii. En déduire que $I \subseteq U$ ou $I \subseteq V$.

2) En déduire que tout connexe par arcs dans un espace vectoriel normé est un connexe (ind. soit A un connexe par arcs dans E, s'il existe deux ouverts disjoints U et V tels que $A \subseteq U \cup V$, $A \cap U \neq \emptyset$ et $A \cap V \neq \emptyset$, considérer une application continue $f:\ [0,1] \longrightarrow A$ telle que $f(0) \in A \cap U$ et $f(1) \in A \cap V$).

Exercice 3. Soit $M_p(I\!R)$ munie de sa norme $\|\cdot\|$. Soit A et B deux éléments de $M_p(I\!R)$ tels que $AB - BA = B$.

1) Calculer en fonction des puissances de B, $AB^n - B^nA$, où $n \in I\!N^*$.

2) En déduire que B est nilpotente.

CHAPITRE 4

Suites et séries de fonctions

1. Suites de fonctions.

Dans tout ce chapitre $\mathbb{K}$ désignera le corps $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou un espace normé de dimension finie $(E, |\ |)$. Ainsi toute suite de Cauchy de $\mathbb{K}$ converge. Soit A un ensemble si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a une fonction

$$f_n : A \longrightarrow \mathbb{K}$$

alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée suite de fonctions.

1.1. Différents types de convergence pour les suites de fonctions.

Définition 4.1. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définie sur un ensemble non vide A.

1) On dira que $(f_n)_n$ **converge simplement**, sur A, vers $f : A \to \mathbb{K}$ si pour tout $x \in A$ fixe, la suite $(f_n(x))_n$ converge vers $f(x)$.

2) On dira que $(f_n)_n$ **converge uniformément** sur A vers $f : A \to \mathbb{K}$, si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N, \forall x \in A,\ |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Remarque 4.1. 1) Si $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur A, alors elle converge simplement sur A, vers f.

2) Si $(f_n)_n$ est une suite de fonctions qui converge (simplement ou uniformément), alors sa limite est unique.

3) $(f_n)_n$ converge uniformément sur A vers f, si et seulement si, $(\sup\limits_{x\in A} |f_n(x) - f(x)|)_n$ converge vers zéro, si et seulement si, il existe une suite $(\lambda_n)_n$ converge vers zéro et il existe $N \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \geq N$ et tout $x \in A$, $|f_n(x) - f(x)| \leq \lambda_n$.

Exemples 4.1. *Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$f_n :\ [0,1] \longrightarrow \mathbb{K}; x \mapsto x^n.$$

On a $(f_n)_n$ converge simplement vers

$$f :\ [0,1] \longrightarrow \mathbb{K};\ f(1) = 1,\ f(x) = 0,\ \text{si } x \in [0,1[,$$

mais elle ne converge pas uniformément vers 0*. En effet,* $\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)-0| \geq \sup_{x\in[0,1[}|x^n-0| = 1$, *ne converge pas vers zéro.*

Définition 4.2. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définie sur un ensemble non vide A. On dira que $(f_n)_n$ est **uniformément de Cauchy** si elle vérifie le **critère de Cauchy uniforme** suivant :

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{N},\ \forall n\geq N, \forall p\in\mathbb{N},\ \forall x\in A,\ |f_{n+p}(x)-f_n(x)|<\varepsilon.$$

Proposition 4.1. *Une suite de fonctions définie sur un ensemble* A*, non vide, est uniformément convergente sur* A *si, et seulement si, elle est uniformément de Cauchy.*

Démonstration. On peut vérifier facilement que la condition est nécessaire. Montrons qui elle est suffisente. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions qui est uniformément de Cauchy. On a pour tout $x\in A$, la suite $(f_n(x))_n$ est de Cauchy dans $\mathbb{K}$, donc elle converge vers une limite notée $f(x)$. La correspondance $f:\ A\longrightarrow\mathbb{K};\ x\mapsto f(x)$ est une applications. Par construction $(f_n)_n$ converge simplement vers f. Rappelons que $(f_n)_n$ est uniformément de Cauchy, donc

$$\forall\varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N},\ \forall n\geq N,\ \forall m\geq N,\ \forall x\in A,\ |f_m(x)-f_n(x)|<\frac{1}{2}\varepsilon.$$

Dans ces conditions on a :

$$|f(x)-f_n(x)| = \lim_{n\to\infty}|f_m(x)-f_n(x)| \leq \frac{1}{2}\varepsilon<\varepsilon.$$

D'où $(f_n)_n$ converge uniformément vers f. □

1.2. Convergence uniforme, limite et continuité.

Remarque 4.2. Dans l'exemple précédant, les fonctions $f_n,\ n\in\mathbb{N}$, sont continues et la limite simple f n'est pas continue au point 1. Donc la convergence simple ne suffit pas pour transporter la continuité.

Proposition 4.2. *Soit* $(f_n)_n$ *une suite de fonctions* ***continues*** *en un point* a *d'une partie* A *de* $\mathbb{K}$*, supposons de plus que* $(f_n)_n$ ***converge uniformément*** *vers une fonction* f *sur* A*, alors* f *est* ***continue*** *en* a*.*

Démonstration. Soit $\varepsilon>0$. Il existe $N\in\mathbb{N}$, pour tout $n\geq N$, $\sup_{x\in A}|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon$. On a f_N est continue au point a, donc il existe $\eta>0$ tel que pour tout $x\in A$, $|x-a|<\eta \implies |f_N(x)-f_N(a)|<\varepsilon$. D'où pour tout $x\in A$ tel que $|x-a|<\eta$, on a

$$|f(x)-f(a)|\leq|f(x)-f_N(x)|+|f_N(x)-f_N(a)|+|f_N(a)-f(a)|<3\varepsilon.$$

Ainsi f est continue en a. $\square$

Corollaire 4.1. *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions* ***continues sur une partie*** *non vide A de $\mathbb{K}$, supposons de plus que $(f_n)_n$* ***converge uniformément*** *vers une fonction f sur A, alors f est* ***continue*** *sur A.*

Théorème 4.1. *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions* ***continues sur une partie*** *A de $\mathbb{K}$, supposons de plus que $(f_n)_n$* ***converge uniformément sur tout compact*** *de A vers une fonction f, alors f est* ***continue*** *sur A.*

Démonstration. Soit $(x_k)_k$ une suite qui converge vers x dans A, montrons que $(f(x_k))_k$ converge vers $f(x)$. L'ensemble

$$K = \{x_k \ : \ k \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$$

est un compact (voir chapitre 3, §2, exemple 3.4). Donc $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur K, ainsi f est continue sur K. Alors $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = f(x)$. $\square$

Proposition 4.3. *(Double limite) Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions qui* ***converge uniformément*** *sur une partie non vide A de $\mathbb{K}$ vers un fonction f. Soit $a \in \overline{A}$. Supposons de plus que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{x\to a} f_n(x) = l_n$* ***existe****. Alors les limites $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ et $\lim\limits_{n\to\infty} l_n$* ***existent*** *et elles* ***sont égales****. C'est à dire que*

$$\lim_{x\to a}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to a} f_n(x)$$

Démonstration. Chaque f_n se prolonge en une fonction g_n continue au point a, de plus $(g_n)_n$ vérifie le critère de Cauchy uniforme sur $A \cup \{a\}$, ainsi elle converge vers un fonction g continue au point a et la restriction de g sur A est f. D'où $\lim\limits_{x\to a} f(x) = g(a) = \lim\limits_{n\to\infty} g_n(a) = \lim\limits_{n\to\infty} l_n$. $\square$

Proposition 4.4. *(Double limite) Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions qui* ***converge uniformément*** *vers une fonction f sur un intervalle $A = [a, +\infty[$ (ou $]-\infty, a]$). Supposons de plus que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{x\to\infty} f_n(x) = l_n$* ***existe****. Alors les limites $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{n\to\infty} l_n$* ***existent*** *et elles* ***sont égales****. C'est à dire que*

$$\lim_{x\to\infty}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to\infty} f_n(x)$$

1.3. Convergence uniforme, dérivée et intégrale.

Proposition 4.5. *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions **continues** sur un ségment $[a,b]$, supposons de plus que $(f_n)_n$ **converge uniformément** vers f. Alors f est continue sur $[a,b]$ et*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx.$$

Démonstration. $|\int_a^b f(x) - \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x| \leq \int_a^b |f(x)-f_n(x)|\mathrm{d}x \leq \int_a^b \sup_{t\in[a,b]} |f(t)-f_n(t)|\mathrm{d}x = (b-a)\sup_{t\in[a,b]} |f(t)-f_n(t)|$. $\square$

Exemples 4.2. *(**la convergence uniforme ne transporte pas la dérivée**) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$. On a*

$$\begin{aligned} |f_n(x) - |x|| &= |\sqrt{x^2 + \tfrac{1}{n}} - \sqrt{x^2}| \\ &= \tfrac{1}{n} \cdot \tfrac{1}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}+\sqrt{x^2}} \leq \tfrac{1}{\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Ainsi la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers $f : x \mapsto |x|$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est dérivable (elle est de classe C^∞), mais f n'est pas dérivable au point 0.

Théorème 4.2. *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur un **intervalle borné** I de longueur l, telle que :*
*1) pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n **est dérivable** sur I,*
*2) la suite de fonctions $(f_n')_n$ **converge uniformément** vers une fonction g sur I,*
*3) il existe $c \in I$ tel que $(f_n(c))_n$ **converge**.*

*Alors $(f_n)_n$ **converge uniformément** vers une fonction f **dérivable** sur I et on a $\mathbf{f}' = \mathbf{g}$. c'est à dire que*

$$\lim_{n\to\infty} f_n' = (\lim_{n\to\infty} f_n)'$$

Démonstration. • Nous utiliserons le **théorème des accroissement finies**. On a pour tout $x \in I$:

$$\begin{aligned} |(f_{n+p}(x) - f_n(x)) &- (f_{n+p}(c) - f_n(c))| \\ &\leq |x-c| \cdot \sup_{t\in I} |f_{n+p}'(t) - f_n'(t)| \\ &\leq l \cdot \sup_{t\in I} |f_{n+p}'(t) - f_n'(t)|. \end{aligned}$$

Donc pour tout $x \in I$, on a

$$\begin{aligned} |f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leq\ & l \cdot \sup_{t\in I} |f_{n+p}'(t) - f_n'(t)| \\ & + |f_{n+p}(c) - f_n(c)|. \end{aligned}$$

On a pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ et tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\sup_{t\in I} |f'_{n+p}(t) - f'_n(t)| < \varepsilon \text{ et } |f_{n+p}(c) - f_n(c)| < \varepsilon.$$

Par suite pour tout $n \geq N$, $p \in \mathbb{N}$ et tout $x \in I$,

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < (l+1)\varepsilon$$

Donc $(f_n)_n$ est uniformément de Cauchy ainsi elle est convergente uniformément vers une fonction continue f sur I. De plus pour tout $(x, y) \in I^2$,

$$\begin{aligned} |(f(y) - f(x)) \quad & -(f_n(y) - f_n(x))| \\ & = \lim_{m\to\infty} |(f_m(y) - f_m(x)) - (f_n(y) - f_n(x))| \\ & \leq \lim_{m\to\infty} |y - x| \sup_{t\in I} |f'_m(t) - f'_n(t)| \\ & = |y - x| \sup_{t\in I} |g(t) - f'_n(t)|. \end{aligned}$$

• Fixons $x \in I$, pour tout $y \in I$, $y \neq x$ on a

$$\begin{aligned} |\tfrac{f(y)-f(x)}{y-x} - g(x)| \leq \quad & |\tfrac{(f(y)-f(x))-(f_n(y)-f_n(x))}{y-x}| \\ & +|\tfrac{f_n(y)-f_n(x)}{y-x} - f'_n(x)| \\ & +|f'_n(x) - g(x)| \\ & \leq \sup_{t\in I} |g(t) - f'_n(t)| \\ & +|\tfrac{f_n(y)-f_n(x)}{y-x} - f'_n(x)| \\ & +|f'_n(x) - g(x)|. \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $\sup\limits_{t\in I} |g(t) - f'_n(t)| < \frac{1}{3}\varepsilon$. Il existe $\eta > 0$, tel que pour tout $y \in I \cap]x - \eta, x + \eta[$, $|\frac{f_N(y)-f_N(x)}{y-x} - f'_N(x)| < \frac{1}{3}\varepsilon$. D'où $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall y \in I$,

$$|y - x| < \eta \implies |\frac{f(y) - f(x)}{y - x} - g(x)| < \varepsilon.$$

D'où pour tout $x \in I$, f est dérivable en x. $\square$

2. Différents types de convergence pour les séries de fonctions.

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définie sur un ensemble non vide A. La suite de fonctions $(S_n)_n$, où $S_n = f_0 + f_1 + \cdots + f_n$, est appelée série de fonctions et elle est notée $\sum\limits_n f_n$.

2.1. Conséquences.

Définition 4.3. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définie sur un ensemble non vide A.

1) On dira que la série de fonctions $\sum\limits_n f_n$ **converge simplement** sur A, si pour tout $x \in A$, la série numérique $\sum\limits_n f_n(x)$ est convergente.

2) On dira que $\sum\limits_n f_n$ **converge uniformément** sur A, si elle converge simplement et on a

$$\begin{aligned}&\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\\ &\qquad\qquad \forall x \in A,\ |R_n(x)| = |\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) - \sum_{k=0}^{n} f_k(x)| < \varepsilon.\end{aligned}$$

Remarque 4.3. $\sum\limits_n f_n$ converge uniformément sur A, si et seulement si, la suite formée par le sup sur A du reste d'ordre n, $(\sup\limits_{x\in A}|R_n(x)|)_n$ converge vers zéro, si et seulement si, il existe une suite $(\lambda_n)_n$ converge vers zéro telle que pour tout $x \in A$ et tout entier n, $|R_n(x)| \leq \lambda_n$.

Proposition 4.6. *Soit $\sum\limits_n f_n$ une série de fonctions définie sur un ensemble non vide A. Alors $\sum\limits_n f_n$ converge uniformément si, et seulement si, $\sum\limits_n f_n$ est **uniformément de Cauchy**, c'est à dire elle vérifie le **critère de la convergence uniforme** :*

$$\begin{aligned}&\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N, \forall p \in \mathbb{N},\\ &\qquad\qquad \forall x \in A,\ |f_{n+1}(x) + f_{n+2} + \cdots + f_{n+p}(x)| < \varepsilon.\end{aligned}$$

Proposition 4.7. *Soit $\sum\limits_n f_n$ une série de fonctions continues en un point a d'une partie A de $\mathbb{K}$, supposons de plus que $\sum\limits_n f_n$ converge uniformément sur A, alors $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ est continue en a.*

Corollaire 4.2. *Soit $\sum\limits_n f_n$ une série de fonctions continues sur une partie non vide A de $\mathbb{K}$, supposons de plus que $(f_n)_n$ converge uniformément sur A, alors $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ est continue sur A.*

Proposition 4.8. *(double limite) Soit $\sum\limits_n f_n$ une série de fonctions qui converge uniformément sur une partie non vide A de $\mathbb{K}$ et soit $a \in \overline{A}$. Supposons de plus que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{x\to a} f_n(x) = l_n$ existe. Alors les limites $\lim\limits_{x\to a} \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ et $\sum\limits_{n=0}^{\infty} l_n$ existent et elles sont égales. C'est à dire que*

$$\lim_{x\to a} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{x\to a} f_n(x)$$

Proposition 4.9. *(Double limite) Soit $\sum\limits_n f_n$ une série de fonctions qui converge uniformément sur un intervalle $A = [a, +\infty[$ ou $]-\infty, a]$. Supposons de plus que pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$\lim\limits_{x\to\infty} f_n(x) = l_n$ *existe. Alors les limites* $\lim\limits_{x\to\infty}\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ *et* $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{n=0}^{\infty} l_n$ *existent et elles sont égales. C'est à dire que*

$$\lim_{x\to\infty}\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\lim_{x\to\infty} f_n(x)$$

Proposition 4.10. *Soit* $\sum\limits_n f_n$ *une série de fonctions* ***continues*** *sur un ségment* $[a,b]$*, supposons de plus que* $\sum\limits_n f_n$ ***converge uniformément****. Alors* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ *est continues sur* $[a,b]$ *et on a :*

$$\int_a^b\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_a^b f_n(x)dx.$$

Proposition 4.11. *Soit* $\sum\limits_n f_n$ *une série de fonctions définies sur un intervalle borné* I *de longueur* l*, telle que :*

1) pour tout $n\in\mathbb{N}$*,* f_n ***est dérivable*** *sur* I*,*

2) la série de fonctions $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n'$ ***converge uniformément*** *sur* I*,*

3) il existe $c\in I$ *tel que* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(c)$ ***converge****.*

Alors la série de fonctions $\sum\limits_n f_n$ ***converge uniformément*** *et* ***dérivable*** *sur* I*. De plus on a :*

$$(\sum_{n=0}^{\infty} f_n)' = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'.$$

2.2. Autres types de convergence.

Proposition 4.12. *Soit* $(f_n)_n$ *une suite décroissante de fonctions positives sur un ensemble* A *non vide, supposons de plus* $(f_n)_n$ *converge uniformément vers zéro, alors la série* $\sum\limits_n(-1)^n f_n$ *converge uniformément.*

Démonstration. Pour tout $x\in A$, $\sum\limits_n(-1)^n f_n(x)$ est une série alternée, donc elle converge. D'après la formulle de la majoration du reste, on a $|R_n(x)|\le f_{n+1}(x)$, ainsi le reste converge uniformément vers zéro. D'où la série converge uniformément vers 0.

Définition 4.4. Soit $\sum\limits_n f_n$ une série de fonctions définies sur un ensemble A non vide. On dira que :

1) $\sum\limits_n f_n$ **converge absolument**, sur A, si la série $\sum\limits_n |f_n|$ converge simplement sur A.

2) $\sum\limits_n f_n$ **converge normalement** sur A, si on a la convergence de la série

$$\sum_n\sup_{x\in A}|f_n(x)|.$$

Remarque 4.4. 1) $\sum_n f_n$ converge normalement sur A si, et seulement si, il existe une série convergente $\sum_n \lambda_n$ telle que pour tout $x \in A$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| \leq \lambda_n$.

2) On a la comparaison suivante :

$$\begin{array}{ccc} \text{Convergence normale} & \Longrightarrow & \text{Convergence uniforme} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \text{Convergence absolue} & \Longrightarrow & \text{Convergence simple} \end{array}$$

Les autres implications ne sont pas vraies en général.

Exemples 4.3. *Soit pour $n \in \mathbb{N}^*$, f_n l'application définie sur $[0,1]$ par :*

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & si \quad x \in]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}] \\ 0 & si \quad x \in [0, \frac{1}{n+1}] \cap]\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$

Considérons la série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$. On a pour tout $x \in]0,1]$, il existe un entier ***unique*** *$n \in \mathbb{N}^*$, tel que $f_n(x) \neq 0$ et la somme de la série est nulle en zéro. D'où pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^{*2}$,*

$$\begin{aligned} |f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \cdots + f_{n+p}(x)| &= \max_{n+1 \leq k \leq n+p} |f_k(x)| \\ &\leq \tfrac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Ainsi la série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ vérifie le critère de Cauchy unifirme, par suite elle ***converge uniformément*** *sur $[0,1]$. De plus la série est formée par des fonctions positives donc elle est aussi* ***absolument covergente****.*

Mais, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x)| = \frac{1}{n}$. Donc la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x)|$$

diverge. Ainsi la série ***ne converge pas normalement****.*

Exercices 4.1. *Considérons la fonction*

$$\zeta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R};\ x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} .$$

1) Donner le domaine de définition $D(\zeta)$ de ζ.

2) i) Montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ converge uniformément sur tout intervalle $[a, \infty[$, où $a > 1$.

ii) En déduire que ζ est continue sur $]1, \infty[$.

iii) En déduire la limite $\lim_{x \to \infty} \zeta(x)$.

3) Montrer que ζ est dérivable sur $]1, \infty[$ (ind. considérer les intervalle $]a, b[$ avec $1 < a < b$).

4) Montrer que ζ est de classe C^∞ (ind. par récurrence en donnant l'expression de la dérivée k-ième).

5) i) Dire pour quoi la limite $l = \lim\limits_{x\to 1^+} \zeta(x)$ existe dans $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$.
ii) Comparer $\zeta(x)$ et la somme partielle d'ordre n de la série au point x, $x>1$, et déduire que $l=\infty$.

Solution. 1) Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\zeta(x)$ est une série de Riemann, donc elle converge si, est seulement si, $x>1$. Ainsi $D(\zeta)=]1,\infty[$.

2) i) On a pour tout $x\in[a,\infty[$, $\frac{1}{n^x}\leq\frac{1}{n^a}$ et on a $a>1$, donc $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^a}$ converge. Donc ζ converge normalement, par suite uniformément sur $[a,\infty[$.
ii) D'abord les fonctions $x\mapsto\frac{1}{n^x}$, $n\in\mathbb{N}^*$ est continue sur $]1,\infty[$. De plus pour tout compact $K\subseteq]1,\infty[$, on a pour $a=\min K$, $K\subseteq[a,\infty[$. Ainsi ζ converge uniformément sur K. D'où d'après le cours ζ est continue sur $]1,\infty[$.
iii) On a pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{n^x}$ égale à 0 si $n>1$ et elle est égale à 1 si $n=1$. De plus on a ζ converge uniformément sur $[2,\infty[$. Donc

$$\lim_{x\to\infty}\zeta(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{n^x}=1.$$

3) On a pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n^x}$ est dérivable sur $]1,\infty[$ et on a

$$(\frac{1}{n^x})'=(\exp(-x\ln(n)))'=-\ln(n)\exp(-x\ln(n))=\frac{-\ln(n)}{n^x}$$

Pour tout $x\in]a,b[$, $1<a<b$, $|(\frac{1}{n^x})'|\leq|\frac{\ln(n)}{n^a}|$, la série de Bertrand $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\frac{\ln(n)}{n^a}|$ converge. Donc la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n^x})'$ converge normalement, donc uniformément, sur $]a,b[$, de plus ζ converge sur un point, quelconque de $]a,b[$, d'où d'après le cours, ζ est dérivable sur $]a,b[$ et $\zeta'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{-\ln(n)}{n^x}$. Ceci reste vrai sur $]1,\infty[$.

3. Séries entières.

3.1. Définitions et propriétés.

Définition 4.5. Une série entière est une série de fonction définie sur une partie de $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) qui est de la forme $S(x)=\sum\limits_{n}a_nx^n$, où $(a_n)_n$ est une suite réelle ou complexe.

Proposition 4.13. *Toute série entière $S = \sum_n a_n x^n$ possède un **rayon de convergence** $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$, c'est à dire que R est l'unique élément de $\mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$, qui vérifie :*

$$\forall x \in \mathbb{K},\ \text{on a} \begin{cases} \text{si} \quad |x| > R, \quad \text{alors} \quad S(x) \quad \text{diverge} \\ \text{si} \quad |x| < R, \quad \text{alors} \quad S(x) \quad \text{converge absolument} \end{cases}$$

Démonstration. • Remarquons d'abord que pour $(x, y) \in \mathbb{K}^2$, tel que $|x| < |y|$, si $S(y)$ converge, alors $S(x)$ converge absolument. En effet, $\sqrt[n]{|a_n x^n|} = \sqrt[n]{|a_n y^n|} \cdot \frac{|x|}{|y|}$, on a $|a_n y^n| \to 0$, donc pour n assaz grand $\sqrt[n]{|a_n y^n|} \leq 1$. Ainsi, $\sqrt[n]{|a_n r^n|} \cdot \frac{|x|}{|y|} \leq \frac{|x|}{|y|} < 1$. D'où d'après la règle de Cauchy $\sum_n |a_n x^n|$ converge.

• Posons

$$R = \sup\{r \in \mathbb{R}^+ \ : \ S(r) \text{ converge absolument}\}.$$

On a R existe dans $\mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$, car l'ensemble

$$A = \{r \in \mathbb{R}^+ \ : \ S(r) \text{ converge absolument}\}$$

et non vide puisque il contient zéro. De plus d'après la première partie de la preuve I est un intervalle de la forme $[0, R[$ ou $[0, R]$. Donc pour tout $x \in \mathbb{K}$, tel que $|x| < R$, $S(|x|)$ converge absolument, ainsi $S(x)$ converge absolument. Si $|x| > R$, on a $S(x)$ diverge car sinon, $S(\frac{|x|+R}{2})$ converge absolument, mais $\frac{|x|+R}{2} > R$ absurde. D'où R vérifie les conditions de la proposition. □

Définition 4.6. 1) L'élément R de $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ donné dans la proposition précédante est appelé **rayon de convergence** de S.

2) L'intervalle $]-R, R[$ (resp. le disque $\{x \in \mathbb{K} \ : \ |x| < R\}$) est dit l'**intervalle** (resp. le **disque**) **ouvert de convergence** de la série.

Proposition 4.14. *Soit $S(x) = \sum_n a_n x^n$ une série entière. Alors on a :*

1) Si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l$ existe, alors le rayon de convergence de S est $R = \frac{1}{l}$ (avec les conventions $\frac{1}{0} = +\infty$ et $\frac{1}{+\infty} = 0$).

2) Si pour n assez grand $a_n \neq 0$ et $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = l$ existe dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, alors le rayon de convergence de S est $R = \frac{1}{l}$.

Démonstration. 1) Soit $x \in \mathbb{K}^*$, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = l \cdot |x|$, donc, d'après la règle de Cauchy, la série $S(x)$ converge absolument pour $l \cdot |x| < 1$ et elle diverge pour $l \cdot |x| > 1$. Ainsi $R = \frac{1}{l}$.

2) Soit $x \in \mathbb{K}^*$, $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1} x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = l \cdot |x|$, donc, d'après la règle de d'Alembert, la série $S(x)$ converge absolument pour $l \cdot |x| < 1$ et elle diverge pour $l \cdot |x| > 1$. Ainsi $R = \frac{1}{l}$. □

Exemples 4.4. *1)* $f(x) = \sum \frac{1}{n!}x^n$, *on a* $a_n = \frac{1}{n!}$, *donc* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$. *Donc* $R_f = +\infty$.

2) $g(x) = \sum \frac{(-1)^n}{n}x^n$, *on a* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 1$, *ainsi* $R_g = 1$. *Donc* $]-1,1[$ *est l'intervalle ouvert de convergence. De plus* $g(-1)$ *diverge et* $g(1)$ *converge. D'où l'intervalle de convergence est* $]-1,1]$.

3) $h(x) = \sum(3 + \frac{(-1)^n}{n})^{2n}x^n$. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{(3 + \frac{(-1)^n}{n})^{2n}} = 3^2$, *d'où* $R_h = \frac{1}{9}$.

Attention 4.1. Soit $k(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} 3^n x^{2n}$. Il faut donner la représentation canonique de $k(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Donc $a_{2n} = 3^n$ et $a_{2n+1} = 0$. Ici on ne peut pas appliquer les règles de la proposition précédante. Mais pour calculer le rayon de convergence R_k de k, on applique les règles de convergence des séries numériques. Posons $u_n = 3^n x^{2n}$, on a $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = 3x^2$. Donc $k(x)$ converge pour $3x^2 < 1 \iff |x| < \frac{1}{\sqrt{3}}$ et diverge si $3x^2 > 1 \iff |x| > \frac{1}{\sqrt{3}}$. D'où $R_k = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Proposition 4.15. *(**Somme** et **produit**) Soit* $f(x) = \sum\limits_n a_n x^n$ *(resp.* $g(x) = \sum\limits_n b_n x^n$*) une série entière de rayon de convergence* R_f *(resp.* R_g*), alors on a :*

1) La série somme $(f+g)(x) = \sum\limits_n (a_n + b_n)x^n$ *est une série entière de rayon* $R_{f+g} \geq \min\{R_f, R_g\}$.

2) La série produit (de Cauchy)

$$h = \sum_n (\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k})x^n$$

est une série entière de rayon de convergence $R_h \geq \min\{R_f, R_g\}$

Démonstration. On a si $x \in \mathbb{K}$ vérifiant $|x| < \min\{R_f, R_g\}$, alors $f(x)$ et $g(x)$ converegent absolument. Donc, au point x, la série somme et la série produit converegent absolument. $\square$

Remarque 4.5. 1) Si $R_f \neq R_g$, alors $R_{f+g} = \min\{R_f, R_g\}$.

2) Pour $f = 0$ et $g(x) = \sum x^n$, on a $R_f = \infty$ et $R_g = 1$, mais $R_{fg} = \infty > \min\{R_f, R_g\}$.

Proposition 4.16. *(**Convergence normale**) Soit* $f(x) = \sum\limits_n a_n x^n$ *une série entière de rayon de convergence* $R > 0$. *Alors* f *converge normalement sur tout disque* $\{x \in \mathbb{K} \ : \ |x| \leq r\}$ *de centre zéro et de rayon* $r < R$.

Démonstration. Soit $0 \leq r < R$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{K}$ tel que $|x| \leq r$, $|a_n x^n| \leq |a_n r^n|$, et d'après la définition de R, la série $\sum\limits_n |a_n r^n|$ converge. Ainsi f converge normalement sur le disque $\{x \in \mathbb{K} \ : \ |x| \leq r\}$. $\square$

Corollaire 4.3. *(**Continuité**) Toute série entière est continue sur son disque ouvert de convergence*

Démonstration. Soit R le rayon de convergence d'une telle série. Si $R = 0$ on a rien à démontrer. Si $R > 0$, alors pour tout compact $K \subseteq \{x \in \mathbb{K} \ : \ |x| < R\}$ on a $r = \max_K |k|$ existe donc $r < R$ et $K \subseteq \{x \in \mathbb{K} \ : \ |x| \leq r\}$. D'où la série entière converge normalement, donc uniformément, sur K. De plus les fonctions qui déterminent la série sont continues sur $\{x \in \mathbb{K} \ : \ |x| < R\}$, d'où la série est continue sur $\{x \in \mathbb{K} \ : \ |x| < R\}$. □

Proposition 4.17. *(**Primitive**) Tout série entière $f(x) = \sum_n a_n x^n$ de rayon de convergence $R_f > 0$, possède une **primitive** sur $]-R_f, R_f[$. De plus toute primitive F de f est donnée par $F(x) = F(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n$, c'est une **série entière** de **même rayon de convergence** que f, c'est à dire $R_F = R_f$.*

Démonstration. Exercice (elle découle aussi de la proposition suivante). □

Proposition 4.18. *(**Dérivation**) Tout série entière $f(x) = \sum_n a_n x^n$ de rayon de convergence $R_f > 0$, est **dérivable** sur $]-R_f, R_f[$ et sa dérivé $f'(x) = \sum_n (n+1)a_{n+1}x^n$ est une **série entière** sur $\mathbb{R}$ de **même rayon de convergence**, c'est à dire $R_{f'} = R_f$.*

Démonstration. pour tout $r \in]0, R_f[$, soit $s \in]r, R_f[$, on a pour n assez grand $\frac{n+1}{s}(\frac{r}{s})^n \leq 1$, donc $|(n+1)a_{n+1}r^n| = |a_{n+1}s^{n+1}| \cdot |\frac{n+1}{s}(\frac{r}{s})^n| \leq |a_{n+1}s^{n+1}|$. La série $\sum_n |a_{n+1}s^{n+1}|$ converge donc $\sum_n (n+1)a_{n+1}r^n$, converge absolument d'où $\sum_n (n+1)a_{n+1}x^n$ et de rayon de convergence $R_{f'} \geq R_f$ et il est évident que $R_{f'} \leq R_f$. Ainsi la série des dérivées converge normalement, donc uniformément, sur tout intervalle $]-r, r[$, avec $r \in]0, R_f[$. On a $f(0)$ converge donc f est dérivable sur $]-r, r[$ et on a $f'(x) = \sum_n (n+1)a_{n+1}x^n$. Donc ceci reste vrai sur $]-R_f, R_f[$. □

Corollaire 4.4. *(**Classe** C^∞) Tout série entière $f(x) = \sum_n a_n x^n$ de rayon de convergence $R_f > 0$, est de classe $\mathbf{C}^\infty$ sur $]-R_f, R_f[$ et on a pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,*

$$f^{(k)}(x) = \sum_n (n+k) \cdots (n+1)a_{n+k}x^n = \sum_n \frac{(n+k)!}{n!} a_{n+k}x^n$$

*est une **série entière** sur $\mathbb{R}$ de **même rayon de convergence**, c'est à dire $R_{f^{(k)}} = R_f$.*

Démonstration. Par récurrence. □

Corollaire 4.5. *Soit $f(x) = \sum_n a_n x^n$ une série entière, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.*

Démonstration. On a pour tout entier k,

$$f^{(k)}(0) = (0+k)\cdots(0+1)a_{0+k}+(1+k)\cdots(1+1)a_{1+k}0^1+\cdots+(n+k)\cdots(n+1)a_{n+k}0^n+\cdots = k!\cdot a_k. \square$$

Remarque 4.6. (**Définition** et **notation**) Soit $f(x) = \sum_n a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R_f > 0$, alors

$$\sum_n (n+k)\cdots(n+1)a_{n+k}x^n$$

est une série entière sur $\mathbb{C}$ de rayon R_f. Une telle série sera appelée **dérivée d'ordre** k de f est elle sera notée $\mathbf{f^{(k)}}$.

Exercices 4.2. *Une fonction définie sur un ouvert, non vide, U de $\mathbb{C}$ est dite* ***holomorphe*** *sur U, si pour tout $z_0 \in U$, la limite*

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe. Cette limite sera notée $f'(z_0)$. Soit $f(x) = \sum_n a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R_f > 0$ et soit f^1 sa série dérivée définie dans la remarque précédante. Montrer que pour tout $z_0 \in \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| < R_f\}$,

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f^1(z_0).$$

Solution. On a $f(z) - f(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n z^n - a_n z_0^n)$. Remarquons que $a_n z^n - a_n z_0^n = a_n(z - z_0)u_n(z)$, où $u_n(z) = \sum_{k=0}^{n-1} z^k z_0^{n-1-k}$. Donc

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n(z)$$

Soit $r \in]|z_0|, R_f[$. Pour tous $|z| < r$ et $n \geq 1$, on a

$$|a_n u_n(z)| \leq |a_n| \cdot \sum_{k=0}^{n-1} r^k r^{n-1-k} = |a_n| n r^{n-1}.$$

La série $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| n r^{n-1}$ converge, car sur $\mathbb{R}$, f^1 et de rayon R_f donc elle converge absolument sur $[0, R_f[$. D'où la série de fonctions $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ converge normalement, donc uniformément, sur $\{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| < r\} \setminus \{z_0\}$. D'après la proposition (double limite)

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{z\to z_0} a_n u_n(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n z_0^{n-1}$$

3.2. Fonctions développables en séries entières.

Définition 4.7. Une fonctions f définie sur un intervalle ouvert contenant 0 est dite **développable en série entière au voisinage de** 0 s'il existe un intervalle $]-r,r[$, où $r>0$, et une série entière $\sum_n a_n x^n$ définie sur $]-r,r[$ tels que $f(x)=\sum_n a_n x^n$ pour tout $x\in]-r,r[$. Dans ce cas on dit aussi que f est développable en série entière sur $]-r,r[$.

Proposition 4.19. *Si f est développable en série entière au voisinage de 0, alors cette série est donnée par*

$$\sum_n \frac{f^{(n)}}{n!}(0)x^n$$

Remarque 4.7. 1) Une fonction qui est développable en série entière au voisinage de zéro est de classe C^∞. De plus sa série de Mac-Laurin est convergente.

2) Les conditions précédantes ne sont pas suffisantes pour dire que la fonction est développable en série entière. Soit par exemple la fonction

$$f(x)=\begin{cases}\exp(\frac{1}{x^2}) & \text{si} \quad x\neq 0\\ 0 & \text{si} \quad x=0\end{cases}$$

On a f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$, par récurrence on montre que f est indéfiniment dérivable au point 0 et $f^{(n)}(0)=0$ pour tout entier n. D'où $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}}{n!}(0)x^n=0$, pour tout x, mais f s'annule seulement au point 0 donc pour $x\in\mathbb{R}^*$, $f(x)\neq\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}}{n!}(0)x^n$. Ainsi f n'est pas développable en série entière au voisinage de 0.

Proposition 4.20. *Soit f une fonction de classe C^∞ sur $]-R,R[$, avec $R>0$, pour que f soit développable en série entière sur $]-R,R[$, il suffit que pour tout $r\in]0,R[$,*

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in]-r,r[}|f^{(n)}(x)|\frac{r^n}{n!}=0.$$

Démonstration. D'après la formule de Mac-Laurin pour tout $x\in]-R,R[$, soit $r\in]|x|,R[$, il existe $\theta\in]0,1[$ dépendant de x et n tel que

$$|f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x)x^k}{k!}|=|\frac{f^{(n+1)}(\theta x)x^{(n+1)}}{(n+1)!}|\leq\sup_{x\in]-r,r[}|f^{(n+1)}(x)|\frac{r^{n+1}}{(n+1)!}\longrightarrow 0. \square$$

Définition 4.8. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}$, une fonction $f:U\to\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) est dite analytique sur U si pour tout $x_0\in U$, la fonction $g(x)=f(x+x_0)$ est développable en série entière au voisinage de 0.

3.3. Exemples de fonctions développables en séries entières.

1) Fonction exp. • On a $\exp(x)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

• Pour tout $r>0$, $\sup_{x\in]-r,r[} |\exp^{(n)}(x)|\frac{r^n}{n!} \leq \exp(r)\frac{r^n}{n!} \longrightarrow 0$.

• Donc cette fonction est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

2) Nous déduisons que cosh et sinh sont développables en séries entières sur $\mathbb{R}$ et

$$\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \text{ et } \sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

3) Fonctions cos et sin. Ces deux fonctons sont développables en séries entières sur $\mathbb{R}$ et

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \text{ et } \sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

4) Fonction $f(x) = (1+x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$. • L'équation différentielle $(1+x)y' - \alpha y = 0,\ y(0) = 1$ possède f comme solution unique sur $]-1,1[$ (il suffit de calculer la dérivée de $(1+x)^{-\alpha}y(x)$).
• D'autre part montrons que cette équation possède une solution donnée par une série entière. Posons $h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Si h est une solution de l'équation sur $]-1,1[$, alors $(1+x)h' - \alpha h = 0,\ h(0) = 1$. Donc $a_0 = 1$, et $(1+x)\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - \alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$, donc $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} \alpha a_n x^n = 0$, c'est à dire $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} \alpha a_n x^n = 0$, d'où $(a_1 - \alpha a_0) + \sum_{n=1}^{\infty}((n+1)a_{n+1} + n a_n - \alpha a_n)x^n = 0$. Nous obtenons les formulles $a_1 = \alpha a_0 = \alpha$, $(n+1)a_{n+1} + (n-\alpha)a_n = 0$. Ainsi $a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(n-1))}{n!}$. De plus pour tout entier n, $a_n \neq 0$ et $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n-\alpha}{n+1} = 1$. D'où $h(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(n-1))}{n!} x^n$ et $R_h = 1$, ainsi h est définie sur $]-1,1[$. D'après l'unicité de la solution de l'équattion différentielle on a pour $x \in]-1,1[$

$$(1+x)^\alpha = f(x) = h(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(n-1))}{n!} x^n$$

5) Foncton arctan. • On a $\arctan(x)$ est de classe C^∞.

• $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, donc $\arctan'(x)$ est développable en série entière sur $]-1,1[$ et on a $\arctan'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$.
• arctan s'annule en 0, donc elle est développable en série entière sur $]-1,1[$ et on a

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

6) En remarquant que $(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (resp. $(\arccos(x))' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$), vérifier que sur $]-1,1[$, on a

$$\arcsin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \frac{1}{4^n(2n+1)} x^{2n+1} \quad \text{et} \quad \arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \frac{1}{4^n(2n+1)} x^{2n+1}$$

3.4. Extension à $\mathbb{C}$.

1) La série $\exp(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ est bien définie sur $\mathbb{C}$. Cette fonction sera appelée fonction exponentielle complexe. On a les propriétés :

• $\exp(z+z') = \exp(z)\exp(z')$.

• Pour $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\exp(i\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^{2p}}{(2p)!} + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^{2p+1}}{(2p+1)!} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p\theta^{2p}}{(2p)!} + i\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p\theta^{2p+1}}{(2p+1)!} = \cos(\theta) + i\sin(\theta).$$

• Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, l'ensemble $\{u \in \mathbb{C} \ : \ \exp(u) = z\} = \{\ln(|z|) + i(\arg(z) + 2k\pi) \ : \ k \in \mathbb{Z}\}$. D'autre part, pour tout $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $|\exp(z)| = |\exp(x)\exp(iy)| = exp(x) \in \mathbb{R}^{*+}$.

2) On peut définir les fonctions sin, cos, sinh, cosh complexes comme sommations des séries entières sur $\mathbb{C}$ de rayon infinie :

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}, \ \sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \ \cosh(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \text{ et } \sinh(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

De plus on a les propriétés suivantes :

• $\cos(z) = \frac{\exp(iz)+\exp(-iz)}{2}$, $\sin(z) = \frac{\exp(iz)-\exp(-iz)}{2i}$, $\cos(z+z') = \cos(z)\cos(z') - \sin(z)\sin(z')$, $\sin(z+z') = \cos(z)\sin(z') + \sin(z)\cos(z')$ et $\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1$.

• $\cosh(z) = \frac{\exp(z)+\exp(-z)}{2}$, $\sinh(z) = \frac{\exp(z)-\exp(-z)}{2}$ et $\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1$.

• $\sin(z) = \sinh(iz)$ et $i\sin(z) = \sinh(iz)$.

• $\cos(x+iy) = \cos(x)\cosh(y) + i\sin(x)\sinh(y)$ et $\sin(x+iy) = \sin(x)\cosh(y) - i\cos(x)\sinh(y)$.

3) Les fonctions $(1+z)^{-1}$, $\ln(1+z)$, $\arctan(z)$ sont définie sur le disque unité ouvert de $\mathbb{C}$ par des séries entières et on a :

• $(1+z)^{-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n$, $\ln(1+z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$, $\arctan(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$.

Exercices 4.3. *1) Etendre autres fonctions aux certains disques de* $\mathbb{C}$ *de centre zéro (par exemple* $(1+z)^{-\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}^*$*,...).*

2) Vérifier les propriétés données dans les exemples précédants.

4. Série n^o 4.

Exercice 1. Soit $(P_n)_n$ la suite de fonctions définie sur $[0,1]$ par :

$$P_0 = 0,\ \ P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}(x - (P_n(x))^2)$$

1) Vérifier que $(P_n)_n$ est une suite de polynômes, majorée par $\sqrt{x}$ et croissante.

2) En déduire que cette suite converge simplement vers $\sqrt{x}$.

3) Etablir, par récurrence, les inégalités :

$$0 \leq \sqrt{x} - P_n(x) \leq \frac{2\sqrt{x}}{2 + n\sqrt{x}}$$

Indication : Si l'inégalité est vraie pour n, vérifier que

$$1 - \frac{1}{2}(\sqrt{x} + P_n(x)) \leq 1 - \frac{\sqrt{x} + nx}{2 + n\sqrt{x}} \leq \frac{2 + (n-1)\sqrt{x}}{2 + n\sqrt{x}}.$$

Puis conclure l'inégalité pour $n+1$ en remarquant que

$$(2 + (n-1)\sqrt{x})(2 + (n+1)\sqrt{x}) \leq (2 + n\sqrt{x})^2 - x \leq (2 + n\sqrt{x})^2.$$

4) En déduire que la suite $(P_n)_n$ converge uniformément vers $\sqrt{x}$ sur $[0,1]$.

Exercice 2. Pour $x \in I\!R$, on pose : $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n})^2 \exp(-nx^2)$.

1) Montrer que g est partout définie et continue sur $I\!R$.

2) Montrer que g est de classe C^1 sur $I\!R$.

Exercice 3. Soit $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ une suite croissante de nombres réels strictement positifs et tendant vers $+\infty$. On pose pour $x \in I\!R$: $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \exp(-\lambda_n x)$ $\ (*)$.

1) Déterminer le domaine de définition de f.

2) Montrer que $(*)$ converge uniformément sur tout intervalle $[\alpha, +\infty[$, où $\alpha \in]0, +\infty[$.

3) En déduire que f est continue sur $]0, +\infty[$.

4) Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ est convergente.

5) A l'aide de ce qui précède montrer la relation suivante :

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda_n}$$

6) En déduire $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

Exercice 4. Calculer le rayon de convergence et la somme de chacune des séries entières, de terme général $u_n(x),\ x \in \mathbb{R}$, dans les cas suivants ($\alpha \in \mathbb{R}$) :

$$\text{a) } u_n = \frac{x^n \cos(n\alpha)}{n}\ (n \geq 1);\ \text{b) } u_n = \frac{(-1)^n x^n}{(2n+1)!};\ \text{c) } u_n = \frac{n x^n}{(2n+1)!}$$

Exercice 5. (Une formule sur π découverte en 1995) Considérons pour tout entier $p \geq 1$, la série entière

$$f_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^n} \frac{x^{8n+p}}{8n+p}$$

1) Montrer que f_p converge sur $]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$.

2) En déduire que f_p et de rayon de convergence $R_p > 1$.

3) Calculer la dérivée f_p'.

4) En déduire que pour $x \in [0,1]$,

$$f_p(x) = \int_0^x \frac{16 t^{p-1}}{16 - t^8} \mathrm{d}t$$

5) Calculer $4f_1(1) - 2f_4(1) - f_5(1) - f_6(1)$ (ind. remarquer

$4-2t^3-t^4-t^5 = -(t-1)(t^2+2)(t^2+2t+2)$ et $16-t^8 = -(t^2-2)(t^2+2)(t^2+2t+2)(t^2-2t+2)$,

puis calculer l'intégrale). En déduire une formule de π.

Exercice 6. Déterminer le développement en série entière à l'origine des fonctions suivantes en pricisant l'intervalle ouvert de convergence :

$$\frac{ln(1+x)}{1+x}\ ;\quad e^{(xch(\alpha))} ch(xsh(\alpha))\ ;\quad e^{(x\cos(\alpha))} \sin(x \sin(\alpha))\ ;\ \arctan(\frac{1+x}{1-x} tan(\alpha))$$

Exercice 7. Soit f la fonction : $]-1,1[\to \mathbb{R};\ x \to (\arcsin(x))^2$.

1) Vérifier que f est une solution de l'équation différentielle :

$$(1-x^2)y'' - xy' = 2 \quad (*)$$

2) Déterminer toutes les séries entières solutions de $(*)$ sur $]-1,1[$.

3) Justifier pourquoi f est développable en série entière sur $]-1,1[$ et déduire son développement.

Solution de la série 4.

Exercice 1. Nous supposons toujours que $x \in [0,1]$. 1) • Il est simple de voir que P_n est un polynôme (il est de degré 2^{n-1}, $n \geq 1$.

• Par récurrence, Supposons que $P_n(x) \leq \sqrt{x}$. On a $\sqrt{x} - P_{n+1}(x) = (\sqrt{x} - P_n(x))(1 - \frac{1}{2}(\sqrt{x} + P_n(x)))$. Or $\sqrt{x} - P_n(x) \geq 0$ et $1 - \frac{1}{2}(\sqrt{x} + P_n(x)) \geq 1 - \frac{1}{2}(\sqrt{x} + \sqrt{x}) \geq 0$. D'où $\sqrt{x} - P_{n+1}(x) \geq 0$.

• $P_{n+1}(x) - P_n(x) = \frac{1}{2}(x - (P_n(x))^2)$. Par récurrence, en montre que $P_n(x) \geq 0$. Donc $x - (P_n(x))^2 \geq 0$. D'où $P_{n+1} \geq P_n(x)$.

2) Pour $x \in [0,1]$, la suite numérique $(P_n(x))_n$ est croissante majotée donc elle converge vers un limite l. De plus il découle de $P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}(x - (P_n(x))^2)$, que $l = l + \frac{1}{2}(x - l^2)$, de plus on a $l \geq 0$, donc $l = \sqrt{x}$.

3) Voir les indications.

4) L'étude des variations de $x \mapsto \frac{2\sqrt{x}}{2+n\sqrt{x}}$, sur $[0,1]$ (où directement), permet de voir que $\sup\limits_{x\in[0,1]} \frac{2\sqrt{x}}{2+n\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{1}}{2+n\sqrt{1}} = \frac{2}{2+n}$. D'où $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in[0,1]} |\sqrt{x} - P_n(x)| = 0$.

Exercice 2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $g_n(x) = (\frac{1}{n})^2 \exp(-nx^2)$.

1) g_n est définie et continue sur $\mathbb{R}$ et $|g_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}$. Donc la série converge normalement, donc uniformément, sur $\mathbb{R}$, ainsi g est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

2) g_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $g_n'(x) = -\frac{2x}{n}e^{-nx^2}$. Calculons le $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |g_n'(x)| = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^+} \frac{2x}{n}e^{-nx^2}$. L'étude des variations de $x \mapsto \frac{2x}{n}e^{-nx^2}$ sur $\mathbb{R}^+$, montre que le sup est atteint au point $x = \frac{1}{\sqrt{2n}}$. Donc $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |g_n'(x)| = |g_n'(\frac{1}{\sqrt{2n}})| = \frac{\sqrt{2}}{n^{3/2}}e^{-1/2}$. Donc $h(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n'(x)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ donc elle est continue. De plus on a $g(0)$ converge, donc d'après le cours pour tout intervalle $]-r, r[$, $r > 0$, g est dérivable et $g'(x) = h(x)$. Donc g est de classe C^1 sur $]-r, r[$, $r > 0$, ainsi elle est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3. Posons $f_n(x) = \exp(-\lambda_n x)$. 1) • Pour $x \leq 0$, $f_n(x) \geq 1$, donc le terme général de la série ne tend pas vers zéro, d'où la série diverge.

• Si $x > 0$, la suite $(f_n(x))_n$ est décroissante, positive et elle converge vers zéro, ainsi la série est une série alternée onc elle converge. D'où le domaine de définition de f est $]0, \infty[$.

2) Soit $\alpha > 0$, la série converge simplement sur $[\alpha, \infty[$. De plus, d'après le théorème de la majoration du reste $|f(x) - \sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^n f_n(x)| \leq f_{n+1}(x) \leq f_{n+1}(\alpha) \to 0$. Ainsi on a la convergence uniforme sur $[\alpha, \infty[$.

3) Pour tout $\alpha > 0$, les fonctions sont continue sur $[\alpha, \infty[$ et on a la convergence uniforme. Donc f est continue sur $[\alpha, \infty[$, $\alpha > 0$, par suite f est continue sur $]0, \infty[$.

4) On a f est continue sur $]0, \infty[$ et $|f(x)| \leq f_1(x)$ (majoration du reste), de plus il est clair que $\int_0^\infty f_1(x)\mathrm{d}x$ existe. Donc f est absolument intégrable sur $]0, \infty[$, ainsi $\int_0^\infty f(x)\mathrm{d}x$ est convergente.

5) 0n a pour tout $n \geq 1$,

$$\int_0^\infty f_n(x)\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty} \int_0^c f_n(x)\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty} [\frac{(-1)^{n+1}}{\lambda_n} e^{-\lambda_n x}]_0^c = -\frac{(-1)^{n+1}}{\lambda_n} = \frac{(-1)^n}{\lambda_n}.$$

$$\begin{aligned} |\int_0^\infty f(x)\mathrm{d}x - \sum_{n=1}^m \frac{(-1)^n}{\lambda_n}| &= |\int_0^\infty (f(x) - \sum_{n=1}^m f_n(x))\mathrm{d}x| \leq \int_0^\infty |f(x) - \sum_{n=1}^m f_n(x)|\mathrm{d}x \\ &\leq \int_0^\infty f_{m+1}(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda_{m+1}} \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

6) Pour $\lambda_n = n$, on a $f(x) = \sum_{n=1}^\infty (-\exp(-x))^n = \frac{-\exp(-x)}{1+\exp(-x)}$. Donc

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n} = \int_0^\infty \frac{-\exp(-x)}{1+\exp(-x)}\mathrm{d}x \underbrace{=\!=}_{u=\exp(-x)} \int_1^0 \frac{1}{1+u}\mathrm{d}u = -[\ln(1+u)]_0^1 = -\sqrt{2}.$$

Exercice 4. a) On a pour $x \in]-1, 1[$, $|u_n(x)| \leq |x|^n$, donc la série converge. Remarquons que $\cos(n\alpha)$ ne convrge pas vers zéro. Donc pour $|x| > 1$, u_n ne converge pas vers zéro donc la série diverge. D'où le rayon de convergence est 1. On a aussi $u_n'(x) = x^{n-1}\cos(n\alpha) = \frac{1}{2}(x^{n-1}e^{in\alpha} + x^{n-1}e^{-in\alpha}$. Donc

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^\infty u_n'(x) &= \frac{e^{i\alpha}}{2} \sum_{n=1}^\infty (e^{i\alpha}x)^{n-1} + \frac{e^{-i\alpha}}{2} \sum_{n=1}^\infty (e^{-i\alpha}x)^{n-1} = \frac{e^{i\alpha}}{2(1-xe^{i\alpha})} + \frac{e^{-i\alpha}}{2(1-xe^{-i\alpha})} \\ &= \frac{\cos(\alpha)-x}{1-2x\cos(\alpha)+x^2} = \frac{-1}{2}\ln'(|x^2 - 2x\cos(\alpha) + 1|) \end{aligned}$$

De plus on a $\sum_{n=1}^\infty u_n(0) = 0 = \frac{-1}{2}\ln(|0^2 - 2\cdot 0\cos(\alpha) + 1|)$, donc

$$f(x) = \sum_{n=1}^\infty u_n(x) = \frac{-1}{2}\ln(|x^2 - 2x\cos(\alpha) + 1|),\ x \in]-1, 1[.$$

b) Il est clair que le rayon de convergence est $+\infty$. • Pour $x = 0$, $\sum_{n=0}^\infty u_n(0) = 1$.

• Pour $x > 0$, on a $\sqrt{x}u_n(x) = \frac{(-1)^n\sqrt{x}^{2n+1}}{(2n+1)!}$, donc $\sqrt{x}\sum_{n=0}^\infty u_n(x) = \sin(\sqrt{x})$.

• Pour $x < 0$, $x = -\sqrt{-x}$, donc $\sqrt{-x}u_n(x) = \frac{\sqrt{-x}^{2n+1}}{(2n+1)!}$. Ainsi $\sqrt{-x}\sum_{n=0}^\infty u_n(x) = \sinh(\sqrt{-x})$. D'où

$$g(x) = \sum_{n=0}^\infty u_n(x) = \begin{cases} \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} & \text{si} \quad x > 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \\ \frac{\sinh(\sqrt{-x})}{\sqrt{-x}} & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

c) Il est clair que le rayon de convergence est $+\infty$. Remarquons que $u_n(x) = xg_n'(-x)$, où $g_n(x) = \frac{(-1)^n x^n}{(2n+1)!}$. Donc $h(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) = xg'(-x)$, où g est la fonction définie dans (b).

Exercice 5. 1) Pour $|x| < \sqrt{2}$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\frac{1}{16^n}\frac{x^{8n+p}}{8n+p}| \leq \sqrt{2}^p \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{|x|^8}{16})^n$$

cette série converge car $\frac{|x|^8}{16} < 1$. D'où $f_p(x)$ converge sur $]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$.

2) On a $R_p \geq \sqrt{2} > 1$.

3) Sur $]-R_p, R_p[$,

$$f_p'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8n+p}{16^n}\frac{x^{8n+p-1}}{8n+p} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{8n+p-1}}{16^n} = x^{p-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{8n}}{16^n} = x^{p-1}\cdot\frac{1}{1-\frac{x^8}{16}}$$

4) f_p est une primitive de f_p' sur $[0,1]$ qui s'annule au point zéro. Donc pour $x \in [0,1]$,

$$f_p(x) = \int_0^x f_p'(t)\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{16t^{p-1}}{16-t^8}\mathrm{d}t.$$

5) On a pour $t \in [0,1]$,

$$4f_1'(t) - 2f_4'(t) - f_5'(1) - f_6'(t) = \frac{4-2t^3-t^4-t^5}{(t^2-2)(t^2+2)(t^2+2t+2)(t^2-2t+2)}$$

$$= \frac{(t-1)(t^2+2)(t^2+2t+2)}{16-t^8} = \frac{1}{8(t+\sqrt{2})} + \frac{-t+2}{4(t^2-2t+2)} + \frac{1}{8(t-\sqrt{2})}$$

$$= \frac{1}{8(t+\sqrt{2})} - \frac{2t-2}{8(t^2-2t+2)} + \frac{1}{4(t^2-2t+2)} + \frac{1}{8(t-\sqrt{2})}$$

$$4f_1(1)-2f_4(1)-f_5(1)-f_6(1) = [\frac{1}{8}\ln(t+\sqrt{2}) - \frac{1}{8}\ln(t^2-2t+2) + \frac{1}{4}\arctan(t-1) + \frac{1}{8}\ln(|t-\sqrt{2}|)]_0^1$$

$$= \frac{\pi}{16} \Rightarrow \pi = 16\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6})\frac{1}{16^n}$$

Exercice 6. • On a $ln(1+t)$ et $(1+t)^{-1}$ sont développables en séries entièrs sur $]-1,1[$, donc $ln(1+t)(1+t)^{-1}$ est développable en série entière sur $]-1,1[$ et on a

$$\frac{ln(1+t)}{1+t} = (\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}t^n)(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n) = \sum_{n=1}^{\infty}(\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}(-1)^{n-k})t^n = \sum_{n=1}^{\infty}(\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{n+1}}{k})t^n.$$

Pour $t = 1$, $|(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{n+1}}{k})1^n| = |\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}| \to \infty \neq 0$. D'où $]-1,1[$ est l'intervalle ouvert de convergence.

• L'inetvalle ouvert de convergence est $I\!R$.

$$\begin{aligned} e^{(xch(\alpha))}ch(xsh(\alpha)) &= e^{xch(\alpha)}\tfrac{1}{2}(e^{xsh(\alpha)}+e^{-xsh(\alpha)}) = \tfrac{1}{2}(e^{xch(\alpha)+xsh(\alpha)}+e^{xch(\alpha)-xsh(\alpha)}) \\ &= \tfrac{1}{2}(e^{xe^{\alpha}}+e^{xe^{-\alpha}}) = \tfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\tfrac{(e^{\alpha})^n+(e^{-\alpha})^n}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\tfrac{ch(n\alpha)}{n!}x^n. \end{aligned}$$

• Pososns $f(x)=\arctan(\frac{1+x}{1-x}tan(\alpha))$. On a f est dérivable sur $]-1,1[$ et

$$\begin{aligned} f'(x) &= \tfrac{2\sin(\alpha)\cos(\alpha)}{((1-x)\cos(\alpha))^2+((1+x)\sin(\alpha))^2} = \tfrac{2\sin(\alpha)\cos(\alpha)}{(1-e^{i2\alpha}x)(1-e^{-i2\alpha}x)} = \tfrac{i}{2}(\tfrac{e^{-i2\alpha}}{1-e^{-i2\alpha}x}-\tfrac{e^{i2\alpha}}{1-e^{i2\alpha}x}) \\ &= \tfrac{i}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(e^{-i2\alpha(n+1)}-e^{i2\alpha(n+1)})x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\sin(2\alpha(n+1))x^n \end{aligned}$$

On suppose que $\alpha\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, on a $f(0)=\alpha$, donc pour $x\in]-1,1[$, qui est l'inetvalle ouvert de convergence,

$$f(x)=\alpha+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n\alpha)}{n}x^n.$$

Exercice 7. 1) Calcul direct.

2) Supposons que $h(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ est une série entière solution de $(*)$ sur $]-1,1[$. On a

$$\begin{aligned} h'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}, \qquad h''(x)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n, \\ xh'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n, \qquad x^2h''=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^n. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} 2 &= (1-x^2)h''(x)-xh'(x) \\ &= 2a_2+(6a_3-a_1)x+\sum_{n=2}^{\infty}((n+2)(n+1)a_{n+2}-n(n-1)a_n-na_n)x^n \\ &= 2a_2+(6a_3-a_1)x+\sum_{n=2}^{\infty}((n+2)(n+1)a_{n+2}-n^2a_n)x^n. \end{aligned}$$

Ainsi $a_2=1$, $6a_3-a_1=0$, et pour $n\geq 2$, $(n+2)(n+1)a_{n+2}-n^2a_n=0$. Donc

$$a_{2p}=\frac{2^{2p-1}((p-1)!)^2}{(2p)!},\ p\geq 1,$$

$$a_{2p+1}=\frac{(2p-1)^2\cdots 3^2}{(2p+1)!}a_1=\frac{((2p)!)^2}{(2p+1)!\cdot 2^{2p}\cdot p!}a_1=\frac{(2p)!}{(2p+1)\cdot 2^{2p}\cdot p!}a_1\ .$$

D'où $h(x)=a_0+\sum\limits_{p=1}^{\infty}\frac{2^{2p-1}((p-1)!)^2}{(2p)!}x^{2p}\ +\ a_1\cdot\sum\limits_{p=0}^{\infty}\frac{(2p)!}{(2p+1)\cdot 2^{2p}\cdot p!}x^{2p+1}$. De plus pour $0\neq|x|<1$, on a

$$\lim_{p\to\infty}\frac{|\frac{2^{2p+1}((p)!)^2}{(2(p+1))!}x^{2(p+1)}|}{|\frac{2^{2p-1}((p-1)!)^2}{(2p)!}x^{2p}|}=x^2<1 \text{ et } \lim_{p\to\infty}\frac{|\frac{(2p+2)!}{(2p+3)\cdot 2^{2(p+1)}\cdot(p+1)!}x^{2p+3}|}{|\frac{(2p)!}{(2p+1)\cdot 2^{2p}\cdot p!}x^{2p+1}|}=x^2<1.$$

Donc d'après la règle de d'Alembert les deux séries $\sum\limits_{p=1}^{\infty}\frac{2^{2p-1}((p-1)!)^2}{(2p)!}x^{2p}$ et $\sum\limits_{p=0}^{\infty}\frac{(2p)!}{(2p+1)\cdot 2^{2p}\cdot p!}x^{2p+1}$ convergent sur $]-1,1[$, donc h converge sur $]-1,1[$.

3) la fonction $\arcsin(x)$ est développable en série entière sur $]-1,1[$, donc le produit $f(x) = \arcsin^2(x)$ est développable en série entière sur $]-1,1[$. De plus f est paire donc $f(x) = \sum\limits_{p=0}^{\infty} b_{2p}x^{2p}$, $b_0 = f(0) = 0$ donc $f(x) = \sum\limits_{p=1}^{\infty} b_{2p}x^{2p}$. D'où d'àprès la question précédante on a $b_{2p} = a_{2p},\ p \geq 1$, ainsi sur $]-1,1[$, $\arcsin^2(x) = \sum\limits_{p=1}^{\infty} \frac{2^{2p-1}((p-1)!)^2}{(2p)!}x^{2p}$.

CHAPITRE 5

Intégrales dépendant d'un paramètre

1. Rappels

2. Intégrales propre dépendant d'un paramètre

Proposition 5.1. *Soit $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ une application continue, alors l'application $F : [c, d] \to \mathbb{R};\ t \mapsto \int_a^b f(x, t)dx$ est continue.*

Démonstration. Soit $t_0 \in [c, d]$, pour montrer que F soit continue en t_0 il suffit de montrer que pour toute suite $(u_n)_n$ d'éléments de $[c, d]$ qui converge vers t_0, $(F(u_n))_n$ converge vers $F(t_0)$. Pour une telle suite $(u_n)_n$, posons $f_n : [a, b] \to \mathbb{R};\ x \mapsto f(x, u_n)$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R};\ x \mapsto f(x, t_0)$, alors $(f_n)_n$ est une suite de **fonctions continues**. De plus, d'après le théorème de Heine, f est uniformément continue sur le compact $[a, b] \times [c, d]$. Fixons $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$, pour tous (x, t) et (y, s) dans $[a, b] \times [c, d]$, $\|(y, s) - (x, t)\|_1 < \eta$, on a $|f(y, s) - f(x, t)| < \varepsilon$. Rappelons que $u_n \to t_0$, donc il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que pour $n \geq N$, $|u_n - t_0| < \eta$, donc $\|(x, u_n) - (x, t_0)\|_1 = |u_n - t_0| < \eta$. Ainsi $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall x \in [a, b],\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. D'où $(f_n)_n$ **converge uniformément** vers f. D'où $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, c'est à dire que $\lim\limits_{n\to\infty} F(u_n) = F(t_0)$. Ainsi F contunie en tout $t_0 \in [c, d]$.

2.1. Deux théorèmes à admettre.

Une suite de fonction $(f_n)_n$ est dite **croissante** sur un ensemble A si pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I$, $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$. La suite est dite **dominée** par une fonction g si pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I$, $|f_n(x)| \leq g(x)$.

Théorème 5.1. ***(Convergence monotone)*** *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définie sur un intervalle I, telle que :*

*1) $(f_n)_n$ **croissante** sur I.*

*2) pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est **continue par morceaux** sur I.*

*3) $(f_n)_n$ **converge simplement** vers une fonction f **continue par morceaux** sur tout ségment de I.*

Alors

$$\int_I f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_I f_n(x)dx.$$

Corollaire 5.1. *Soit* $\sum_n f_n$ *une série de fonctions* ***positives*** *et* ***continues par morceaux*** *sur* I*. Si de plus* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ *est Riemann-intégrable sur* I*, alors*

$$\int_I \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_I f_n(x)dx.$$

Théorème 5.2. *(**Convergence dominée**) Soit* $(f_n)_n$ *une suite de fonctions définie sur un intervalle* I*, telle que :*
1) pour tout $n \in \mathbb{N}$*,* f_n ***continue par morceaux*** *sur un intervalle* I*,*
2) $(f_n)_n$ *est* ***dominée*** *par une fonction* g ***Riemann-intégrable*** *sur* I*,*
3) $(f_n)_n$ ***converge simplement*** *vers une fonction* f ***continue par morceaux*** *sur tout ségment de* I*.*

Alors

$$\int_I f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_I f_n(x)dx.$$

Corollaire 5.2. *Soit* $\sum_n f_n$ *une série de fonctions* ***continues par morceaux*** *sur* I *telle que la somme existe est continue par morceaux sur tout ségment de* I*. Supposons de plus que* $(\sum_{k=0}^{n} f_k)_n$ *est* ***dominée*** *par une fonction* g ***Riemann-intégrable*** *sur* I*.*

Alors

$$\int_I \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_I f_n(x)dx.$$

3. Série n^o 5.

Exercice 1. Soient f la fonction 2π-périodique paire définie sur $[0, \pi]$ par $f(x) = \sin(x)$.

1) Donner la série de Fourier de la fonction f.

2) Déduire une décomposition de sin, sur $[0, \pi]$ en une série donnée par $\cos(nx)$.

3) En considérant l'intégrale $\int_0^x \sin(t)\mathrm{d}t$, $x \in [0, \pi]$, déduire une décomposition de $\cos(x) + \frac{2}{\pi}x$, sur $[0, \pi]$ en une série donnée par $\sin(nx)$ (Justifier la permutation intégrale-somme).

Exercice 2. Soit f l'application 2π-périodique définie sur $[-\pi, \pi[$ par $f(x) = \frac{x^3-\pi^2 x}{12}$.

1) Calculer les coefficients de Fourier de f.

2) i) Donner $S(f)$ la série de Fourier de f,

ii) Montrer que $f = S(f)$.

iii) Montrer sans calcul que $S(f)$ converge uniformément vers f sur $[-\pi, \pi]$.

3) Déduire les sommes des séries suivantes

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \; ; \; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$$

Exercice 3. Pour $x \geq 0$, on pose

$$f(x) = (\int_0^x e^{-t^2} \mathrm{d}t)^2 \quad \text{et} \quad g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} \mathrm{d}t$$

1) Montrer que f et g sont de classe C^1. Calculer la dérivée de $f+g$.

2) Vérifier que $0 \leq g(x) \leq e^{-x^2} \frac{\pi}{4}$. Déduire $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$.

3) En déduire que $\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 4. Soit F la fonction dédinie sur $I\!R^+$ par :

$$F(x) = \int_0^\infty e^{-tx} \frac{sin(t)}{t} dt$$

1) En utilisons les conditions de domaination montrer que,

i) F est de classe C^1 sur $]0, \infty[$.

ii) Déduire que pour $x > 0$, $F(x) = \lambda - \arctan(x)$.

iii) Vérifier que pour tout $x > 0$, $|F(x)| \leq \frac{1}{x}$. Déduire la valeur de λ.

2) i) Vérifier que $F(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n u_n$ où $u_n = e^{-n\pi x} \int_0^\pi e^{-tx} \frac{\sin(t)}{t+n\pi} \mathrm{d}t$.

ii) Vérifier que la série définie dans 2), i), est une série alternée.

iii) Déduire que F est continue sur $[0, \infty[$.

iv) Déduire que $\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$.

Exercices facultatifs.

Exercice 1. Développer en série de Fourier la fonction $f : R \to R$, impaire périodique de période 2π, définie par : $f(t) = 1$ pour $t \in]0, \pi]$; les valeurs de $f(0)$ et $f(\pi)$ étant quelconques. Calculer la somme de la série de f et déduire les sommes des séries :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \; ; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

Exercice 2. Développer en série de Fourier la fonction $f : R \to R$, périodique de période 2π, définie par : $f(t) = t^2 - 2\pi^2$ pour $t \in]-\pi, \pi]$.
En déduire les sommes des séries :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \; ; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

Exercice 3. Développer en série de Fourier la fonction $f : R \to R$, périodique de période 2π, définie par : $f(t) = \cos(\alpha t)$ pour $t \in]-\pi, \pi]$ où α est un réel qui n'est pas un entier. En déduire la relation suivante pour tout réel non multiple de π :

$$cotan(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2\pi^2}$$

Exercice 4. Soit $C_{2\pi}$ l'ensemble de fonctions $f : R \to C$, continues périodiques de période 2π. Pour f et g dans $C_{2\pi}$, soit $f * g$ la fonction définie sur R par :

$$f * g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) g(t-u) du \; .$$

1) a) Vérifier que $f * g$ est un élément de $C_{2\pi}$.

b) Montrer que $(C_{2\pi}, +, *)$ est un anneau commutatif.

2) Pour $f \in C_{2\pi}$, notons $c_n(f)$ le coefficion de Fourier de f associé à $e_n : t \to e^{int}$ $(n \in Z)$.

a) vérfier que $e_n * e_m = \delta_{n,m} e_n$.

b) Montrer que pour f, g dans $C_{2\pi}$, $c_n(f * g) = c_n(f) c_n(g)$.

3) (Application) Proposer une méthode pour calculer

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \; ; \; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^8}.$$

Exercice 5. Pour $x \in R$ on considère $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$.

1) Determiner le domaine de définition de Γ.

2) Montrer que Γ converge normalement sur tout compact de R_*^+ et déduire que Γ et continue sur R_*^+.

3) Pour $x > 0$ montrer que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ et déduire $\Gamma(n)$ pour $n \in N^*$.

4) Montrer que l'on peut prolonger continument Γ à $R \setminus (-N)$.

5) Montrer que Γ est de classe C^∞ et donner $\Gamma^{(k)}(x)$.

Exercice 6. On considère pour $x \in R,\ I(x) = \int_0^\infty e^{-t^2-x^2/t^2}dt.$

1) Montrer que $I(x)$ est continue sur R et derivable sur R^*.

2) Montrer que I satisfait une équiation différentielle du premier ordre. Donner $I(x)$.

Solution de la série 5.

Exercice 1. 1) f est paire donc $b_n = 0$, $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin(x)\sin(nx)\mathrm{d}x$ donc

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{1}{2}(\sin(x+nx)+\sin(x-nx))\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{2}{\pi(1-n^2)}(1+(-1)^n) & \text{si} \quad n \neq 1 \\ 0 & \text{si} \quad n = 1 \end{cases}$$

2) $S(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^\infty a_n\cos(nx) = \frac{2}{\pi} + \sum\limits_{p=1}^\infty \frac{4}{\pi(1-(2p)^2)}\cos(2px).$

On a f est continue sur $[-\pi,\pi]$, f est dérivable sur $]-\pi,0[\cup]0,\pi[$ est les dérivées à droite et à gauche de f aux points $-\pi$, 0 et π existent, donc d'après Dirichclet $S(f)(x) = f(x)$ sur $[-\pi,\pi]$. D'où sur $[0,\pi]$, $\sin(x) = \frac{2}{\pi} + \sum\limits_{p=1}^\infty \frac{4}{\pi(1-(2p)^2)}\cos(2px)$.

3) La série $\frac{2}{\pi} + \sum\limits_{p=1}^\infty \frac{4}{\pi(1-(2p)^2)}\cos(2px)$ converge normalement, donc uniformément, sur $[0,\pi]$, ceci découle du fait que $|\frac{4}{\pi(1-(2p)^2)}\cos(2px)| \leq \frac{4}{\pi((2p)^2-1)}$ (On peut appliquer aussi "Dirichlet uniforme"). Donc

$$\begin{aligned} -\cos(x)+1 &= \int_0^x \sin(t)\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{2}{\pi} + \sum_{p=1}^\infty (\frac{4}{\pi(1-(2p)^2)}\cos(2pt))\mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{\pi}x + \sum_{p=1}^\infty \int_0^x \frac{4}{\pi(1-(2p)^2)}\cos(2pt)\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}x + \sum_{p=1}^\infty \frac{2}{\pi(1-(2p)^2)p}\sin(2pt) \end{aligned}$$

D'où pour $x \in [0,\pi],\ \cos(x) + \frac{2}{\pi}x = 1 - \sum\limits_{p=1}^\infty \frac{2}{\pi(1-(2p)^2)p}\sin(2pt)$.

Exercice 2. 1) f est impaire donc $a_n = 0,\ n \in I\!N$, $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{x^3-\pi^2x}{12}\cos(nx)\mathrm{d}x$. Par une des intégrations par partie on trouve $b_n = \frac{\cos(n\pi)}{n^3} = \frac{(-1)^n}{n^3}$.

2) i) $S(f)(x) = \sum\limits_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n^3}\sin(nx)$.

ii) f est de classe C^1 sur $[-\pi,\pi]$ donc d'après Dirichlet $f = S(f)$.

iii) f est de classe C^1 sur $[-\pi,\pi]$, donc d'après Dirichlet uniforme on a $S(f)$ converge uniformément vers f.

3) On a $f(\frac{\pi}{2}) = S(f)(\frac{\pi}{2}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \sin(n\frac{\pi}{2}) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2p+1}}{(2p+1)^3} \sin((2p+1)\frac{\pi}{2}) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2p+1}(-1)^p}{(2p+1)^3}$.
D'où $\frac{(\frac{\pi}{2})^3 - \pi^2 \frac{\pi}{2}}{12} = -\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^3}$, ainsi $\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^3} = \frac{3\pi^3}{8 \cdot 12} = \frac{\pi^3}{32}$.

D'après Parseval

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\frac{x^3 - \pi^2 x}{12}|^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} |\frac{(-1)^n}{n^3}|^2 \text{ d'où } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{1}{945}\pi^6.$$

Exercice 3. 1) f n'est autre que le carré d'une fonction primitive de $t \mapsto e^{-t^2}$, qui est contnue sur $I\!R$, donc f est de classe C^1 sur $I\!R$, de plus $f'(x) = 2(\int_0^x e^{-t^2} \mathrm{d}t) e^{-x^2}$.
On a • l'application $(x,t) \mapsto \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$, est définie et continue sur $I\!R \times [0,1]$, • $\frac{\partial}{\partial x} \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} = -2xe^{-x^2(1+t^2)}$ existe et continue sur $I\!R \times [0,1]$, donc d'après Leibniz g est de classe C^1 sur $I\!R$ et on a $g'(x) = \int_0^1 -2xe^{-x^2(1+t^2)} \mathrm{d}t$.

Le changement de variable $u = xt$ permet d'avoir $g'(x) = \int_0^x -2e^{-x^2-u^2} \mathrm{d}u = -f'(x)$. Ainsi pour tout $x \in I\!R$, $(f+g)'(x) = 0$.

2) On a $0 \leq g(x) = e^{-x^2} \int_0^1 \frac{e^{-x^2 t^2}}{1+t^2} \mathrm{d}t \leq e^{-x^2} \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} \mathrm{d}t = e^{-x^2} \frac{\pi}{4}$. On a $\lim_{x \to \infty} e^{-x^2} \frac{\pi}{4} = 0$, donc $\lim_{x \to \infty} g(x) = 0$.

3) L'application $h(x) = f(x) + g(x)$ est constante sur $I\!R$, $h(0) = 0 + \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}$. Donc $|\int_0^\infty e^{-t^2} \mathrm{d}t| = \lim_{x \to \infty} \sqrt{f(x)} = \lim_{x \to \infty} \sqrt{f(x) + g(x)} = \sqrt{\frac{\pi}{4}}$. Or $\int_0^\infty e^{-t^2} \mathrm{d}t \geq 0$, donc $\int_0^\infty e^{-t^2} \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 4. Posons $f(x,t) = e^{-tx} \frac{\sin(t)}{t}$. On a $|e^{-tx} \frac{\sin(t)}{t}| \leq e^{-tx}$ et $\int_0^\infty e^{-tx} \mathrm{d}t$ existe pour tout $x > 0$, d'où F est définie sur $]0, \infty[$. De plus pour $x = 0$, $F(0) = \int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t} \mathrm{d}t$ existe (une intégration par parites permet de conclure) d'où F est définie sur $[0, \infty[$.

1) i) Soit $a > 0$, pour $(x,t) \in]a, \infty[\times]0, \infty[$, $\frac{\partial}{\partial x} e^{-tx} \frac{\sin(t)}{t}$ existe et continue, $|\frac{\partial}{\partial x} e^{-tx} \frac{\sin(t)}{t}| = |e^{-tx} \sin(t)| \leq e^{-ta}$ et $\int_0^\infty e^{-ta} \mathrm{d}t$ est convergente. Donc F est de classe C^1 sur $]a, \infty[$, pour tout $a > 0$, d'où elle est de classe C^1 sur $]0, \infty[$.

ii) Par une intégration par parties deux fois on trouve que $F'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$. D'où il existe une constante λ, telle que pour tout $x > 0$, $F(x) = \lambda - \arctan(x)$.

iii) On a pour tout $x > 0$, $|F(x)| \leq \int_0^\infty |e^{-tx} \frac{sin(t)}{t}| \mathrm{d}t \leq \int_0^\infty e^{-tx} \mathrm{d}t = \frac{1}{x}$. Donc $\lim_{x \to \infty} F(x) = 0$, ainsi $0 = \lim_{x \to \infty} (\lambda - \arctan(x)) = \lambda - \frac{\pi}{2}$. D'où $\lambda = \frac{\pi}{2}$.

2) i) On a $F(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \int_{n\pi}^{n\pi+\pi} e^{-tx} \frac{sin(t)}{t} \mathrm{d}t$. Pour tout $n \in I\!N$, le changement de variable $s = t - n\pi$, permet d'avoir

$$\begin{aligned}\int_{n\pi}^{n\pi+\pi} e^{-tx} \frac{\sin(t)}{t} \mathrm{d}t &= \int_0^{\pi} e^{-(s+n\pi)x} \frac{\sin(s+n\pi)}{s+n\pi} \mathrm{d}s = e^{-n\pi x} \int_0^{\pi} e^{-sx} \frac{\sin(s+n\pi)}{s+n\pi} \mathrm{d}s \\ &= (-1)^n e^{-n\pi x} \int_0^{\pi} e^{-sx} \frac{\sin(s)}{s+n\pi} \mathrm{d}s = (-1)^n u_n.\end{aligned}$$

ii) Il est clair que $(u_n)_n$ est décroissante, en n, et positive, de plus pour $n \geq 1$ et $x \geq 0$, on a $u_n \leq \frac{1}{n} \to 0$. D'ù $F(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n u_n$ est une sŕie alternée.

iii) Une application directe du théorème de continuité des intégrales simples dépendants d'un parametre, assure que u_n est continue sur $[0, \infty[$. De plus pour tout $x \geq 0$, $u_n(x) \leq \frac{1}{n}$. D'où la série converge uniformément sur $[0, \infty[$, ainsi F est continue sur $[0, \infty[$.

iv) On a $\int_0^{\infty} \frac{\sin(t)}{t} \mathrm{d}t = F(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} F(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (\frac{\pi}{2} - \arctan(x)) = \frac{\pi}{2} - \arctan(0) = \frac{\pi}{2}$.

CHAPITRE **6**

Calcul différentiel

1. Applications différentiables.

Dans ce paragraphe E et F désignent deux espaces vectoriels normés de dimension finie, U un ouvert de E, $f: U \longrightarrow F$ une application et $x \in U$.

Définition 6.1. • **L'application f est dite différentiable au point x, s'il existe une application linéaire $L : E \longrightarrow F$ telle que**

$$f(x+h) - f(x) - L(h) = o(h).$$

• **Si f est différentiable en tout point de U on dit alors que f est différentiable sur U.**

Remarque 6.1. 1) L'application L de la définition est continue car elle est définie sur un espace de dimension finie.

2) On a l'équivalence

$$\begin{aligned} & f(x+h) - f(x) - L(h) = o(h) \\ \Longleftrightarrow \quad & \lim_{\|h\| \to 0} \tfrac{\|f(x+h) - f(x) - L(h)\|}{\|h\|} = 0. \end{aligned}$$

3) Si $E = \mathbb{R}$, alors une application f définie d'un ouvert U de $\mathbb{R}$ dans F et différentiable en un point $x \in U$ si, et seulement si, elle est dérivable en x, c'est à dire $f'(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t}$ existe. Dans ce cas on peut **identifie** l'application L de la définition **6**.1 **à** $f'(x)$. Remarquons que le premier membre de l'égalité précédante est une application linéaire et le deuxième membre est un vecteur, ceci à un sens grâce à l'identification de toute application linéaire $L : \mathbb{R} \to F$ au vecteur $L(1)$ de F.

Proposition 6.1. ***Si f est différentiable, alors on a :***

1) L'application linéaire L, de la définition 6.1, est unique, elle sera notée $\mathrm{D}f(x)$, $\mathrm{d}\mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\mathrm{d}\mathbf{f}_{\mathbf{x}}$ ou $f'(x)$.

2) f est continue au point x.

Démonstration. 1) Supposons qu'il existe une application linéaire K vérifiant la même formule. Alors l'application linéaire $U = L - K = o(h)$. Donc

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{\|U(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, non nul, on a pour $t \in]0, \infty[$:

$$\frac{\|U(x)\|}{\|x\|} = \lim_{t \to 0} \frac{\|U(tx)\|}{\|tx\|} = 0$$

D'où $\|U(x)\| = 0$, ainsi $U = 0$ et $L = K$.

2) On a $f(x+h) - f(x) = L(h) + o(h)$, donc $\lim_{\|h\| \to 0} f(x+h) - f(x) = \lim_{\|h\| \to 0} L(h) + o(h) = 0$. □

Remarque 6.2. 1) Si $f : U \longrightarrow F$ est différentiable sur l'ouvert U, l'espace $\mathcal{L}(E, F)$ des applications linéaires de E dans F est un espace vectoriel normé de dimension finie, alors

- on peut définire l'application

$$\mathbf{df} \ : \ U \longrightarrow \mathcal{L}(E, F); \ x \mapsto \mathrm{d}f(x).$$

Alors, si $\mathrm{d}f$ est continue en un certain point x de U (resp. sur U) on dit que f est **continument différentiable** au point x (resp. sur U) ;

- de même on peut définir les différentielles d'ordre supérieur (1, 2, ...). Si la k-ème différentielle de f existe et continue on dit que f est de **classe** C^k.
- si f est de classe C^k, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on dit que f est de **classe** C^∞.

2) Il est simple de voir que si f et g sont différentiables en un point x (resp. sur l'ouvert U) alors $\lambda f + \beta g$, où $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$, est différentiables en un point x (resp. sur l'ouvert U). De plus

$$\mathrm{d}(\lambda f + \beta g)(x) = \lambda \mathrm{d}f(x) + \beta \mathrm{d}g(x).$$

Théorème 6.1. ***Soit*** U ***(resp.*** V***) un ouvert de*** E ***(resp.*** F***) et soit*** $x \in U$***. Supposons que*** $f : U \longrightarrow F$ ***est différentiable en*** x***,*** $f(x) \in V$ ***et*** $g : V \longrightarrow G$ ***est différentiable en*** $f(x)$***, où*** G ***est un espace vectoriel normé de dimension finie, alors*** $g \circ f$ ***est différentiable en*** x ***et on a :***

$$\mathrm{d}(g \circ f)(x) = \mathrm{d}g(f(x)) \circ \mathrm{d}f(x).$$

Démonstration. Posons

$$\Delta = g \circ f(x+h) - g \circ f(x)$$

$$\begin{aligned}\Delta &= g(f(x)+\mathrm{d}f(x)\cdot h+o(h))-g(f(x))\\ &= \mathrm{d}g(f(x))(\mathrm{d}f(x)\cdot h+o(h))+o(\mathrm{d}f(x)\cdot h+o(h))\\ &= \mathrm{d}g(f(x))\circ \mathrm{d}f(x)\cdot h+r(h),\end{aligned}$$

où $r(h)=\mathrm{d}g(f(x)).(o(h))+o(\mathrm{d}f(x)\cdot h+o(h))$, donc

$$\begin{aligned}\|r(h)\| &\le \|\mathrm{d}g(f(x)).(o(h))\|+\|o(\mathrm{d}f(x)\cdot h+o(h))\|\\ &\le \|\mathrm{d}g(f(x))\|\cdot\|o(h)\|+\|o(\mathrm{d}f(x)\cdot h+o(h))\|,\end{aligned}$$

on a $\lim\limits_{\|h\|\to 0}\|\mathrm{d}f(x)\cdot h+o(h)\|=0$, donc

$$\varepsilon(\mathrm{d}f(x)\cdot h+o(h))=\varepsilon_1(h).$$

Posons $s(h)=\|o(\mathrm{d}f(x)\cdot h+o(h))\|$, donc

$$\begin{aligned}s(h) &= \|\mathrm{d}f(x)\cdot h+o(h)\|\|\varepsilon(\mathrm{d}f(x)\cdot h+o(h))\|\\ &\le (\|\mathrm{d}f(x)\cdot h\|+\|o(h)\|)\|\varepsilon(\mathrm{d}f(x)\cdot h+o(h))\|\\ &\le (\|\mathrm{d}f(x)\|\cdot\|h\|+\|\varepsilon(h)\|\|h\|)\\ &\quad\times\|\varepsilon(\mathrm{d}f(x)\cdot h+o(h))\|\\ &\le \|h\|\varepsilon_1(h).\end{aligned}$$

D'où $r(h)=o(h)$, ainsi $g\circ f$ est différentiable en x et $\mathrm{d}(g\circ f)(x)=\mathrm{d}g(f(x))\circ\mathrm{d}f(x)$. $\square$

Corollaire 6.1. ***Dans les conditions du théorème si les applications*** f ***et*** g ***sont de classe*** C^k***,*** $k\in\mathbb{N}$***, alors*** $g\circ f$ ***est de classe*** C^k***.***

Corollaire 6.2. ***Soit*** U ***un ouvert de*** E***, supposons que*** $f : U\longrightarrow F$ ***est différentiable en un point*** x ***de*** U***, si de plus*** f^{-1} ***existe sur un ouvert*** V ***contenant*** $y=f(x)$ ***et si elle est différentiable en*** y***, alors*** $\mathrm{d}f(x)$ ***est inversible et*** $(\mathrm{d}f(x))^{-1}=\mathrm{d}(f^{-1})(y)$***.***

Démonstration. On a $f^{-1}\circ f=I$ l'application identitée, donc $I=\mathrm{d}I(x)=\mathrm{d}(f^{-1})(y)\circ\mathrm{d}f(x)$. D'où $(\mathrm{d}f(x))^{-1}=\mathrm{d}(f^{-1})(y)$. $\square$

Remarque 6.3. Avec les hypothèses du corollaire précédant, les espaces E et F sont nécessairement de même dimension.

2. Dérivées partielles et applications continument différentiables.

2.1. Dérivée suivant un vecteur. Dans ce paragraphe E et F désignent deux espaces vectoriels normés de dimension finie, U un ouvert de E, $f : U \longrightarrow F$ une application et $x \in U$.

Définition 6.2. Soit $h \in E$ un vecteur non nul, si la limite suivante existe

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t},$$

alors elle sera notée $\mathrm{D}_h f(x)$ ou $\mathrm{d}_h f(x)$, et appellée dérivée suivant le vecteur (ou dérivée suivant la direction) h.

Proposition 6.2. ***Si $f : U \longrightarrow F$ est une application diffŕentiable en un point $x \in U$, alors f admet une dérivée suivant tout vecteur non nul h et on a :***

$$\mathrm{d}_h f(x) = \mathrm{d}f(x) \cdot h \ .$$

Démonstration. Soit h vecteur non nul de E, on a pour un certain réel $r > 0$, l'application

$$\begin{aligned} \varphi \ :]-r, \ \ r[&\longrightarrow F \\ t &\mapsto f(x+th) \end{aligned}$$

est bien définie, de plus $\varphi = f \circ g$, où

$$g \ :]-r, r[\longrightarrow E, \ t \mapsto x + th.$$

On a g est diffŕentiable en 0, $g(0) = x \in U$ et f est diffŕentiable en x, d'où φ est diffŕentiable en 0 et

$$\begin{aligned} \lim_{t \to 0} \tfrac{f(x+th)-f(x)}{t} &= \mathrm{d}\varphi(0) \\ &= \mathrm{d}f(x) \circ \mathrm{d}g(0) \\ &= \mathrm{d}f(x) \cdot h \ . \ \square \end{aligned}$$

Exemples 6.1. *Soit*

$$\begin{aligned} \varphi \quad : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{aligned}$$

Alors φ admet des partielles suivant toutes les directions au point $(0,0)$ mais elle n'est pas différetiable au point $(0,0)$. En effet, soit $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ non nul,

• *si* $h_1 = 0$ *ou* $h_2 = 0$*, alors*

$$\frac{\varphi((0,0) + t(h_1,h_2)) - \varphi((0,0))}{t} = 0$$

ainsi $\mathrm{d}_h\varphi(0,0) = 0$*,*

• *si* $h_1 \neq 0$ *et* $h_2 \neq 0$*, alors*

$$\frac{\varphi((0,0) + t(h_1,h_2)) - \varphi((0,0))}{t} = t\frac{h_1 h_2^2}{h_1^2 + t^2 h_2^4}$$

d'où $\mathrm{d}_h\varphi(0,0) = 0$.

• *Maintenant si* φ *est différentiable en* $(0,0)$*, alors pour tout vecteur non nul* $h \in \mathbb{R}^2$*,*

$$\mathrm{d}\varphi(0,0)\cdot h = \mathrm{d}_h\varphi(0,0) = 0 \implies \mathrm{d}\varphi(0,0) = 0.$$

Or l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (t^2, t)$ *est différentiable en* 0 *et* $f(0) = (0,0)$*, par suite* $\varphi \circ f$ *sera différentiable en* 0 *et*

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2} &= \tfrac{\varphi(t^2,t)-\varphi(0,0)}{t} = \mathrm{d}(\varphi\circ f)(0) \\ &= \mathrm{d}\varphi(0,0)\circ \mathrm{d}f(0) = 0 \end{aligned}$$

ce qui est absurde. Donc φ *n'est pas différentiable en* $(0,0)$*.*

2.2. Dérivées partielles. Soient n et p deux entiers non nuls, U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f\ :\ U \longrightarrow \mathbb{R}^p$ une application. Soit $\{e_1, \cdots, e_n\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Si la dérivée de f en un point x de U suivant le vecteur e_i existe, alors elle sera appeller la i-ème dérivée partielle (ou la dérivée partielle par rapport à x_i) de f en x et elle sera notée

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(x) \text{ ou } D_i f(x)\ .$$

Donc $\frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_n)$ est égale à

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x_1,\cdots,x_i+t,\cdots,x_n) - f(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_n)}{t}$$

Proposition 6.3. ***On a si*** f ***est différentiable en un point*** $x \in U$***, alors toutes les dérivées partielles existent et***

$$\mathrm{d}f(x)\cdot(h_1,\cdots,h_n) = \frac{\partial}{\partial x_1} f(x)\cdot h_1 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n} f(x)\cdot h_n\ .$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f(x)\cdot(h_1,\cdots,h_n) &= \mathrm{d}f(x)\cdot(\sum_{i=1}^n h_i e_i) \\ &= \sum_{i=1}^n h_i\cdot \mathrm{d}f(x)\cdot e_i \\ &= \sum_{i=1}^n h_i\cdot \tfrac{\partial}{\partial x_i} f(x)\ .\ \square \end{aligned}$$

D'après l'exemple **6**.1 l'existence des dérivées partielles n'implique pas que l'application est différentiable. Mais on a

Théorème 6.2. ***Soit*** U ***est un ouvert de*** $\mathbb{R}^n$***, une application*** $f : U \to \mathbb{R}^p$ ***et continument différentiable sur*** U ***si, et seulement si, ses dérivées partielles existent sur*** U ***et elles sont continues.***

Soit $\{e'_1, \cdots, e'_p\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$. Alors pour toute application $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$, on a

$$f(x) = (f_1(x), \cdots, f_p(x))$$

où $f_i : U \longrightarrow \mathbb{R}$ est la i-ème composante de f, c'est à dire $f_i = \pi_i \circ f$ où π_i est la i-ème projection. On a

Proposition 6.4. ***L'appliquation*** f ***est de classe*** C^k***,*** $k \in \mathbb{N}$***, si, et seulement si, pour tout*** $1 \leq i \leq p$***,*** f_i ***est de classe*** C^k***.***

Démonstration. Les projections π_i, $1 \leq i \leq p$, sont linéaires donc elle sont de classe C^k. Si f est de classe C^k, $k \in \mathbb{N}$, $f_i = \pi_i \circ f$ est aussi de classe C^k. Inversement, si les f_i, $1 \leq i \leq p$, sont de classe C^k, l'écriture $f = f_1 e'_1 + \cdots + f_p e'_p$ entraîne que f est de classe C^k. □

2.3. Matrice jacobienne. Comme conclusion des résultats précédants on a

Corollaire 6.3. ***Une application***

$$f : U \longrightarrow \mathbb{R}^p,$$

est continument différentiable sur U ***si, et seulement si,***

$$\frac{\partial}{\partial x_j} f_i, \ 1 \leq i \leq p, \ 1 \leq j \leq n$$

sont bien définies et continues.

Définition 6.3. **Soit** $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$ **une application différentiabe en un point** x **de** U**, la matrice jacobienne de** f **au point** x**, notée** $J(f)(x)$ **est la matrice de** $\mathrm{d}f(x)$ **dans les bases canoniques de** $\mathbb{R}^n$ **et** $\mathbb{R}^p$ **respectivement, c'est à dire** $\left(\frac{\partial}{\partial x_j} f_i \right)_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}}$**.**

La formule de compositions des différentielles permet d'obtenir la **règle de la chaine** suivante

Proposition 6.5. ***Soit*** U ***(resp.*** V***) un ouvert de*** $\mathbb{R}^n$ ***(resp.*** $\mathbb{R}^p$***) et soit*** $x \in U$***. Supposons que*** $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$ ***est différentiable en*** x***,*** $f(x) \in V$ ***et*** $g : V \longrightarrow \mathbb{R}^q$ ***est différentiable en*** $f(x)$***, alors pour tout*** $1 \leq k \leq q$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(g_k \circ f)(x) = \sum_{\mathbf{j}=1}^{p} \frac{\partial}{\partial \mathbf{y_j}} g_k(f(x)) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} f_{\mathbf{j}}(x).$$

Démonstration. On a $\mathrm{d}(g \circ f)(x) = \mathrm{d}g(f(x)) \circ \mathrm{d}f)(x)$, donc la matrice $J(g \circ f)(x)$ n'est autre que la matrice produit $J(g)(f(x)) \cdot J(f)(x)$. Donc les deux expressions de la k-ème colonne de la matrice $J(g \circ f)(x)$ donne le résultat. □

3. C^k difféomorphismes.

Définition 6.4. Soit f une application bijective d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$ sur un ouvert V de $\mathbb{R}^n$. Alors on dit que f est un

1) homéomorphisme ou C^0-difféomorphisme si f et f^{-1} sont continues,

2) C^k-difféomorphisme, $k \geq 1$, si f et f^{-1} sont de classe C^k.

Remarque 6.4. Dans la définition précédante si on suppose que V est ouvert de $\mathbb{R}^p$ et si f est un C^k-difféomorphisme, $k \in \mathbb{N}$, alors $p = n$ nécessairement. Pour $k \geq 1$, on a $\mathrm{d}f(x)$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^p$. Mais pour $k = 0$ la conclusion est difficile.

Théorème 6.3. ***(d'inversion locale) Soit*** f ***une application de classe*** C^k***,*** $k \geq 1$***, sur un ouvert*** U ***de*** $\mathbb{R}^n$ ***dans*** $\mathbb{R}^n$***, supposons que pour un certain point*** x ***de*** U***, on a*** $\mathrm{d}f(x)$ ***est inversible, c'est à dire*** $|J(f)(x)| \neq 0$***, alors il existe un voisinage ouvert*** $O \subseteq U$ ***de*** x ***et un voisinage ouvert*** V ***de*** $f(x)$***, tels que la restriction de*** f ***à*** O ***est un*** C^k***-difféomorphisme de*** O ***sur*** V***.***

Démonstration. À admettre. □

Corollaire 6.4. ***(d'inversion globale)*** *Avec les hypothèses du théorème précédant. Supposons de plus que* f *est injective sur* U *et pour tout* $x \in U$*,* $|J(f)(x)| \neq 0$*, alors* $f(U)$ *est un ouvert et*

$$f \ : \ U \longrightarrow f(U)$$

est un C^k*-difféomorphisme.*

Démonstration. Exercice. □

Une conséquence du théorème d'inversion locale on a le théorème important suivant

Théorème 6.4. ***(fonctions implicites) Soit*** O ***un ouvert de*** $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ ***et soit***

$$f \ : \ O \longrightarrow \mathbb{R}^p, \ (x, y) \to f(x, y)$$

une application de classe C^k***,*** $k \geq 1$***, si pour un certain*** $(a, b) \in O$ ***on a*** $f(a, b) = 0$***, alors il existe***

- $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ***voisinage ouvert de*** a***,***
- $V \subseteq \mathbb{R}^n$ ***voisinage ouvert de*** b***,***
- $U \times V \subseteq O$***,***
- ***une unique application*** $\varphi \ : \ U \longrightarrow V$ ***de classe*** C^k ***telle que*** $\varphi(a) = b$ ***et pour tout*** $x \in U$***,*** $f(x, \varphi(x)) = 0$***.***

Démonstration. Soit

$$\Phi \ : \ O \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p; \ (x, y) \mapsto (x, f(x, y)).$$

On a Φ est de classe C^k et on a

$$J(f)(x) = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ \frac{\partial f(a,b)}{\partial x} & \frac{\partial f(a,b)}{\partial y} \end{pmatrix}$$

donc $|J(\Phi)(a, b)| = |I_n| \cdot |\frac{\partial f(a,b)}{\partial y}| \neq 0$, ainsi il existe un voisinage $U' \times V \subseteq O$ de (a, b) tel que Φ est un C^k–difféomorphisme de O' sur un voisinage ouvert de $(a, 0)$ contenant un voisinage de $(a, 0)$ de la forme $U \times U'$. Donc l'application

$$\varphi \ : \ U \longrightarrow V; \ x \mapsto \pi_{\mathbb{R}^p} \circ \Phi^{-1}(x, 0)$$

est de classe C^k et $f(x, \varphi(x)) = 0$. L'unicité découle du fait que s'il existe une autre application ψ définie de U dans V vérifiant les mêmes propriétés que φ alors

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \pi_{\mathbb{R}^p} \circ \Phi^{-1}(x, f(x, \psi(x))) \\ &= \pi_{\mathbb{R}^p} \circ \Phi^{-1}(x, 0) \\ &= \varphi(x). \ \square \end{aligned}$$

Exemples 6.2. ***Cas particuliers.***

I) Courbes dans $\mathbb{R}^2$*. Soit* U *un ouvert de* $\mathbb{R}^2$*, et soit* $f : \ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$*, une application de classe* C^k*,* $k \geq 1$*, supposons qu'il existe* $(a, b) \in U$ *tel que* $f(a, b) = 0$ *et* $\frac{\partial}{\partial y} f(a, b) \neq 0$*. Alors il existe un intervalle ouvert* I *centré en* a*, un intervalle ouvert* J *centré en* b *et une fonction unique* $\varphi : I \to J$ *de classe* C^k *tels que* $\varphi(a) = b$*,* $I \times J \in U$ *et* $f(x, \varphi(x)) = 0$ *pour tout* $x \in I$*. Donc* *au voisinage de (a,b), l'équation $f(x,y)=0$ définie une courbe possèdant une paramétrisation de la forme $z=\varphi(x)$. De plus la* ***tangente*** *en (a,b) est d'équation :*

$$(x-a)\frac{\partial}{\partial x}f(a,b)+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}f(a,b)=0.$$

II) Surfaces dans $\mathbb{R}^3$. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^3$, et soit $f:\ U\longrightarrow\mathbb{R}$, une application de classe C^k, $k\geq 1$, supposons qu'il existe $(a,b,c)\in U$ tel que $f(a,b,c)=0$ et $\frac{\partial}{\partial z}f(a,b,c)\neq 0$. Alors il existe un intervalle ouvert I centré en a, un intervalle ouvert J centré en b, un intervalle ouvert K centré en c et une fonction unique $\varphi: I\times J\to K$ de classe C^k tels que $\varphi(a)=b$, $I\times J\times K\in U$ et $f(x,y,\varphi(x,y))=0$ pour tout $(x,y)\in I\times J$. Donc au voisinage de (a,b,c), l'équation $f(x,y,z)=0$ définie une surface possèdant une paramétrisation de la forme $z=\varphi(x,y)$. De plus le plan ***tangent*** *en (a,b) est d'équation :*

$$(x-a)\frac{\partial}{\partial x}f(a,b,c)+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}f(a,b,c)+(z-c)\frac{\partial}{\partial z}f(a,b,c)=0.$$

III) Courbes dans $\mathbb{R}^3$. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^3$, et soient $f:\ U\longrightarrow\mathbb{R}$ et $g:\ U\longrightarrow\mathbb{R}$, deux applications de classe C^k, $k\geq 1$, supposons qu'il existe $(a,b,c)\in U$ tel que $f(a,b,c)=0$, $\ g(a,b,c)=0$ et

$$\frac{\partial}{\partial y}f(a,b,c)\cdot\frac{\partial}{\partial z}g(a,b,c)-\frac{\partial}{\partial z}f(a,b,c)\cdot\frac{\partial}{\partial y}g(a,b,c)\neq 0.$$

Alors il existe un intervalle ouvert I centré en a, un intervalle ouvert J centré en b, un intervalle ouvert K centré en c et un unique couple de fonctions (φ,ψ) avec $\varphi: I\to K$, $\psi: J\to K$ de classe C^k tels que $(\varphi(a),\psi(a))=(b,c)$, $I\times J\times K\in U$ et $f(x,\varphi(x),\psi(x))=0$ pour tout $x\in I$. Donc au voisinage de (a,b,c), le système $f(x,y,z)=0$, $g(x,y,z)=0$ défini une courbe possèdant une paramétrisation de la forme $y=\varphi(x)$, $z=\psi(x)$. De plus la ***tangente*** *en (a,b) est d'équations :*

$$(x-a)\frac{\partial}{\partial x}f(a,b,c)+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}f(a,b,c)+(z-c)\frac{\partial}{\partial z}f(a,b,c)=0.$$

$$(x-a)\frac{\partial}{\partial x}g(a,b,c)+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}g(a,b,c)+(z-c)\frac{\partial}{\partial z}g(a,b,c)=0.$$

4. Dérivées partielles d'ordre supérieure.

4.1. Théorème de Schwarz.

Théorème 6.5. ***(de Schwarz) Soit** f **une application définie sur un ouvert** U **de** $\mathbb{R}^n$ **dans** $\mathbb{R}^p$**, si***

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}f \ \textbf{\textit{et}}\ \frac{\partial^2}{\partial x_j\partial x_i}f,\ 1\leq i,j\leq n,$$

existent et continues sur un voisinage de x alors elles sont égales.

Corollaire 6.5. ***Soit f une application définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, si***

$$\frac{\partial^k}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_k}}f \;\textit{\textbf{et}}\; \frac{\partial^k}{\partial x_{i_{\sigma(1)}}\cdots\partial x_{\sigma(k)}}f,$$

où σ est une permutation de $\{1,\cdots,k\}$, existent et continuent sur un voisinage de x alors elles sont égales.

Démonstration. Toute permutation est une composition de transpositions de la formes $(i,\ i+1)$. $\square$

4.2. Expression des différentielles d'ordre supérieure. Si f une application de classe C^k, $k \geq 1$, sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, alors la différentielle, $\mathrm{D}^m f(x)$, d'ordre m, $1 \leq m \leq k$, de f en un point quelconque x de U est une application n-linéaire symétrique de $\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ associant à un m-uple $(h_1,\cdots,h_m)$ l'élément $\mathrm{D}^m f(x)\cdot(h_1,\cdots,h_m)$, notée $\mathrm{D}^m f(x)\cdot h_1\cdots h_m$, donnée par l'expression :

$$\sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n=m}\frac{m!}{\alpha_1!\cdots\alpha_n!}\frac{\partial^m f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}h_1^{\alpha_1}\cdots h_n^{\alpha_n}.$$

En effet, l'élément $\mathrm{D}^m f(x)\cdot h_1\cdots h_m$ n'est autre que la dérivée, d'ordre m, au point 0 de l'application $\varphi\ :\ t\mapsto f(x+th)$. Donc

$$\begin{array}{lcl}
\varphi^1(t) & = & \sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}f(x+th)h_i\\
\varphi^2(t) & = & \sum\limits_{i=1}^{n}h_i\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}f(x+th)h_j\\
 & = & 2\sum\limits_{i+j=2}\frac{h_1^i\cdot h_2^j}{i!\cdot j!}\frac{\partial^2}{\partial x_1^i\cdot\partial x_2^j}f(x+th)\\
\cdots & \cdots & \cdots\\
\varphi^m(t) & = & m!\cdot\sum\limits_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n=m}\frac{m!}{\alpha_1!\cdots\alpha_n!}\frac{\partial^m f(x+th)}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}h_1^{\alpha_1}\cdots h_n^{\alpha_n}.
\end{array}$$

4.3. Formule de Taylor-Young.

Théorème 6.6. ***Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit $x\in U$,***

$$f\ :\ U\longrightarrow\mathbb{R}^p$$

une application admet une différentielle d'ordre $m+1,\ m \geq 1$***, alors pour*** $h \in \mathbb{R}^n$ ***assez petit on a***

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) \\ &+ \sum_{r=1}^{m} \sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n=r} \frac{h_1^{\alpha_1}\cdots h_n^{\alpha_n}}{\alpha_1!\cdots\alpha_n!} \frac{\partial^r}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}} f(x) \\ &+\ o(\|h\|^m). \end{aligned}$$

Démonstration. Dans les conditions du théorème. Soit f_i la i-ème composante de f, posons

$$\varphi_i \ : \ [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R};\ t \mapsto f_i(x+th).$$

Alors φ_i admet une dérivée d'ordre $m+1$, ainsi elle vérifie la formule de Taylor-Young "classique", c'est à dire pour un certain $\theta \in [0,1]$

$$\varphi_i(1) = \varphi(0) + \sum_{r=1}^{m} \frac{1}{r!}\varphi^r(0) \ + \ \frac{1}{(m+1)!}\varphi^{m+1}(\theta).$$

Or on a pour $r \in \{1,\cdots,m+1\}$,

$$\varphi_i^r(t) = r! \cdot \sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n=r} \frac{h_1^{\alpha_1}\cdots h_n^{\alpha_n}}{\alpha_1!\cdots\alpha_n!} \frac{\partial^r}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}} f_i(x+th).$$

Donc la formule Taylor-Young est vérifie pour toute composante f_i, ainsi elle est vraie pour f. □

5. Extremums relatifs.

Définition 6.5. Soit f une application définie d'un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. On dit que f presente en un point a de U :

- **un maximum local s'il existe un voisinage $V \subseteq U$ de a tel que $f(x) - f(a) \leq 0,\ x \in V$,**
- **un minimum local s'il existe un voisinage $V \subseteq U$ de a tel que $f(x) - f(a) \geq 0,\ x \in V$,**
- **un extremum local si f présente en a un maximum local ou un minimum local.**

La proposition suivante donne une condition nécessaire pour qu'un point soit un extremum local.

Proposition 6.6. ***Soit*** f ***une fonction de classe*** $C^k,\ k \geq 1$***, définie d'un ouvert*** U ***de*** $\mathbb{R}^n$ ***dans*** $\mathbb{R}$***. Si un point*** a ***de*** U ***est un extremum local de*** f***, alors*** a ***est un point critique de*** f ***c'est à dire*** $\mathrm{d}f(a) = 0$***.***

Démonstration. Soit $\{e_1, \cdots, e_n\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Le point 0 est un extremum local des fonctions $\varphi_i : t \mapsto f(a + te_i)$, ainsi $\varphi_i'(0) = 0$ $1 \leq i \leq n$. D'où les dérivées partielles de f au point a sont toutes nulles, donc $\mathrm{d}f(a) = 0$. $\Box$

Voici une condition suffisante.

Proposition 6.7. ***Considérons une fonction*** f ***de classe*** C^k, $k \geq 2$***, définie d'un ouvert*** U ***de*** $\mathbb{R}^n$ ***dans*** $\mathbb{R}$***. Soit*** $a \in U$***, si pour tout vecteur non nul*** h ***de*** $\mathbb{R}^n$***, on a*** $\mathrm{d}^2 f(a) \cdot h \cdot h$ ***est strictement positif (resp. strictement négatif), alors*** f ***presente au point*** a ***un minimum local (resp. maximum local).***

Démonstration. Découle du fait que pour $\|h\|$ assez petit $f(a+h) - f(a)$ et $\mathrm{d}^2 f(a) \cdot h \cdot h$ sont de même signe, car

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &= \mathrm{d}f(a) \cdot h + \tfrac{1}{2}\mathrm{d}^2 f(a) \cdot h \cdot h \\ &\quad + \|h\|^2 \varepsilon(h) \\ &= \tfrac{1}{2}\mathrm{d}^2 f(a) \cdot h \cdot h + \|h\|^2 \varepsilon(h). \ \Box \end{aligned}$$

6. Série n^o 6.

Exercice 1. Soient $U =]0, \infty[\times] - \pi, \pi[$, $V = I\!R^2 \backslash] - \infty, 0] \times \{0\}$, $P : U \longrightarrow V; (r, \theta) \mapsto (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ et $C : V \longrightarrow U;\ (x, y) \mapsto (\sqrt{x^2 + y^2}, 2\arctan(\frac{y}{x + \sqrt{x^2+y^2}}))$.

1) Vérifier que S et P sont de classe C^1.

2) Calculer $P \circ S$ et $S \circ P$.

3) Calculer la jacobienne et le jacobien de P en tout point x de U.

4) Calculer de deux manières la jacobienne et le jacobien de S en tout point $y = f(x)$ de V.

Exercice 2. Soient $U = \{(x, y) \in I\!R^2 \ :\ x^2 - y^2 > 0\}$ et $f : U \longrightarrow I\!R$ une application de classe C^2 telle que : $(*)$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}}$.

1) Soit $\varphi :\ I\!R^2 \longrightarrow I\!R^2; (x, y) \mapsto (x + y, x - y)$. Montrer que φ est un C^∞-difféomorphisme.

2) Soit $V = \varphi(U)$, est $g : V \longrightarrow I\!R$ définie par $g \circ \varphi = f$, calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)$ en fonction des dérivées partielles de g (ind. utiliser la règle de lma chaine). Déduire les solutions de $(*)$.

Exercice 3. Soit $f :\ I\!R^3 \longrightarrow I\!R;\ x \mapsto \|x\|_2$. Montrer que f est différentiable en tout point $x \neq 0$ est $\mathrm{d}f(x) \cdot h = \langle \frac{x}{\|x\|_2}, h \rangle$.

Exercice 4. Soit $S(r,\theta,\varphi) = (r\cos(\theta)\sin(\varphi), r\sin(\theta)\sin(\varphi), r\cos(\varphi))$, $(r,\theta,\varphi) \in U = \mathbb{R}_*^+ \times]-\pi,\pi[\times]0,\pi[$.

1) Vérifier que S est de classe C^∞.

2) Calculer la jacobienne et le jacobien de S en tout point U.

3) Vérifier que $S(U)$ est un ouvert et que S est un C^∞-difféomorphisme de U sur $S(U)$.

Exercice 5. 1) Montrer que au voisinage de $(0,0)$, l'ensemble

$$\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \arctan(xy) + 1 = e^{x+y}\}$$

admet une représentation de la forme $y = \varphi(x)$, $x \in I$ avec I un intervalle centré en 0 et φ est de classe C^1 sur I.

2) Donner l'équations de la droite tangente à Γ au point $(0,0)$.

Exercice 6. 1) Montrer que au voisinage de $(1,1,1)$, l'ensemble

$$\Gamma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + z^2 = 3,\ x^3 + 2xz - y = 2\}$$

admet une représentation de la forme $y = \varphi(x)$, $z = \psi(x)$, $x \in I$ avec I un intervalle centré en 1 et φ et ψ sont de classe C^1 sur I.

2) Donner les équations de la droite tangente à Γ au point $(1,1,1)$.