Les nombres complexes

- ❖ i $\in \mathbb{C}$ et i²=-1
- ❖ Forme algébrique : $z = x + iy$, où x et y sont deux nombres réels ; x est la partie réelle de z et y sa partie imaginaire

Règles de calculs dans $\mathbb{C}$:

Soit $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ où x, y, x' et y' sont des réels

- $z = z'$ si et seulement si $x= x'$ et $y= y'$
- $z = 0$ si et seulement si $x= y=0$
- z est réel si et seulement si $y=0$
- z est imaginaire si et seulement si $x= 0$

Opération algébrique :

$z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$

- La somme : $z + z' = x + iy + x' + iy' = (x + x') + i(y + y')$
- Le produit : $z z' = (x+iy)(x'+iy') = (xx' - yy') + i(xy' + yx')$
- L inverse :(d'un nombre complexe non nul)

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$$

Représentation géométrique d un nombre complexe :

Le plan est muni d un repère orthonormé direct $(o, \vec{u}, \vec{v})$

- a et b étant deux réels . $z = a + ib$ est l'affixe du point M(a,b)

ou du vecteur $\overrightarrow{OM}$ noté Aff(M)= $a + ib$,Le point M(a,b) est l'image de Z .

- * M et N deux points tels que Aff(M)= Z_M et Aff(N)= Z_N alors Aff($\overrightarrow{MN}$)= $Z_{\overrightarrow{MN}} = Z_N - Z_M$.

  * Le milieu de $[MN]$ a pour affixe $\frac{Z_M + Z_N}{2}$

- Si $\overrightarrow{w_1}$ et $\overrightarrow{w_2}$ sont de vecteurs d'affixe respective Z_1 et Z_2

* $\overrightarrow{w_1}$ et $\overrightarrow{w_2}$ sont colinéaires si et seulement si $\overrightarrow{w_1} = k\overrightarrow{w_2}$ avec k $\in \mathbb{R}$

* $\overrightarrow{w_1}$ et $\overrightarrow{w_2}$ sont colinéaires si et seulement si $\frac{Aff(\overrightarrow{w_1})}{Aff(\overrightarrow{w_2})} = k$

* $\overrightarrow{w_1}$ et $\overrightarrow{w_2}$ sont orthogonaux si et seulement si $\frac{Aff(\overrightarrow{w_1})}{Aff(\overrightarrow{w_2})} = ki$ avec k $\in \mathbb{R}$

Conjugué d un nombre complexe : a et b étant deux réels. $Z = a + ib$ le conjugué de z et le nombre complexe $\overline{Z}$ = a-ib

Propriétés : Z $\in \mathbb{C}$ et Z' $\in \mathbb{C}$

- ❖ $\overline{Z + Z'} = \overline{Z} + \overline{Z'}$; $\overline{ZZ'} = \overline{Z}\,\overline{Z'}$
- ❖ Z un nombre complexe non nul $\overline{(\frac{1}{Z})} = \frac{1}{\overline{Z}}$ et $\overline{(\frac{Z'}{Z})} = \frac{\overline{Z'}}{\overline{Z}}$
- ❖ $Z + \overline{Z}$ =2Re(Z) et $Z - \overline{Z}$ =2i Im(Z)
- ❖ Z est réel si et seulement $Z = \overline{Z}$
- ❖ Z est imaginaire si et seulement $\overline{Z} = -Z$

Module d un nombre complexe :

a et b étant deux réels. $Z = a + ib$ on définie le module de Z par $|Z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Propriétés : Z $\in \mathbb{C}$ et Z' $\in \mathbb{C}$

- $|Z^2| = |Z|^2 = Z\overline{Z}$
- $|Z| = 1$ si et seulement $\overline{Z} = \frac{1}{Z}$
- $|Z| = 0$ si et seulement si Z =0
- $|ZZ'| = |Z||Z'|$; si n $\in \mathbb{N}$ $|Z^n| = |Z|^n$
- Si $Z \neq 0$ $\left|\frac{1}{Z}\right| = \frac{1}{|Z|}$ et $\left|\frac{Z'}{Z}\right| = \frac{|Z'|}{|Z|}$

À retenir :

Un nombre complexe Z, non nul, admet trois types D'écriture :

- **une écriture algébrique : $Z = a + ib$, où a et b sont deux nombres réels ; a est la partie réelle de z et b, sa partie imaginaire ;**
- **une écriture trigonométrique** $Z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ **où r désigne le module de z et θ un argument de Z,**

$Z = a + ib =$ $r(\cos(\theta)+i\sin(\theta))$ **avec** $r=\sqrt{a^2+b^2}\geq 0$

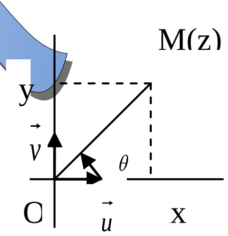
$\cos(\theta)=\frac{a}{r}$ **et** $\sin(\theta)=\frac{b}{r}$

Argument d un nombre complexe : Soit Z et Z'deux nombres complexes non nuls $\arg(Z)=\theta$, $\arg(Z')=\theta'$, $|Z|=r$ **et** $|Z'|=r'$

Egalité :z =z'si et seulement si $r=r'$ et $\theta\equiv\theta'[2\pi]$
Conjugué ; arg($\overline{Z}$**)≡-arg(Z)** $[2\pi]$
Opposé :arg($-Z$**)≡** π **+arg(Z)** $[2\pi]$
Le produit: arg(Z$\overline{Z}$**)≡arg(Z)+arg(**$\overline{Z}$**)** $[2\pi]$
Puissance: arg(Z^n**)≡n arg(Z)** $[2\pi]$
Formule de Moivre $(\cos(\theta)+i\sin(\theta))^n=\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$ **Formule de Binome : pour tous a et b et pour tout n∈ℕ on a :** $(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^{n-k}b^k$
Inverse : arg($\frac{1}{Z}$**)≡-arg(z)** $[2\pi]$
Quotient : arg($\frac{Z'}{Z}$**)≡arg(z')-arg(z)** $[2\pi]$

Interprétation géométrique

Le plan est muni d un repère orthonormé direct $(o,\vec{u},\vec{v})$ .Soit $Z = x+ iy$ Un nombre complexe non nul et M son point image dans le plan



* $(\widehat{\vec{u};\overrightarrow{OM}})\equiv\arg(z)[2\pi]$

* $r=\sqrt{x^2+Y^2}=|Z|=OM$

*A et B deux points du plan tels que A ≠ B on a :

$(\widehat{\vec{u};\overrightarrow{AB}})\equiv\arg(z_B-z_A)[2\pi]$

$\cos(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\sin(\theta)$; $\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)=\cos(\theta)$

Formules d'adition

$\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$

$\cos(a-b)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$

$\sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\sin(b)\cos(a)$

$\sin(a-b)=\sin(a)\cos(b)-\sin(b)\cos(a)$

$\cos^2(a)+\sin^2(a)=1$

$\cos(2a)=\cos^2(a)-\sin^2(a)=2\cos^2(a)-1=1-2\sin^2(a)$

$\sin(2a)=2\sin(a)\cos(a)$

$\cos^2(a)=\frac{\cos(2a)+1}{2};\sin^2(a)=\frac{1-\cos(2a)}{2}$

<u>Equation du second degré</u> : $az^2 + bz + c = 0$,<u>avec a ,bet c reels</u> $a \neq 0$ **et** $\Delta = b^2 - 4ac$

- **Si Δ =0, alors l'équation admet une racine double** $z_1 = z_2 = -\dfrac{b}{2a}$.
- **Si $\Delta > 0$, alors l'équation admet deux racines réelles**

$z_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ **et** $z_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

- **Si $\Delta < 0$, alors l'équation admet deux racines complexes conjuguées** $z_1 = \dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ **et** $z_2 = \overline{z_1} = \dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

Dans tous les cas : $az^2 + bz + c = a(z-z_1)(z-z_2)$

$z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a}$ **si et** $z_1 z_2 = \dfrac{c}{a}$

<u>Racines carrées d'un nombre complexe</u> :

*** Soit Z= a+ib un nombre complexe non nul . L équation** $z^2 = Z$ **avec z=x+iy**

est équivalente au système $\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2} \end{cases}$

*** Un nombre complexe non nul admet deux racines carrées opposées**

Les réflexes à avoir

- **calculs dans ℂ se fait comme dans ℝ en tenant compte du fait que $i^2=-1$**
- **Il n'a pas de relation d'ordre dans ℂ c'est-à-dire on n'utilise pas d'inégalité dans ℂ**
- ***Z=** $re^{i\theta}$ **et Z=** $r(\cos(\theta)+i\sin(\theta))$ **ne sont des formes exponentielle et trigonométrique que si** $r\geq 0$

  *** Si** $r<0$ **on obtient l'écriture trigonométrique de Z en remplaçant r par -r et** θ *par* $\theta+\pi$

*** Pour déterminer la forme algébrique d'un quotient on multipliant le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur**

*** Pour montrer que Z est réel penser à Im(Z)=0 ou Z =** $\overline{Z}$ **ou** $\arg(Z)\equiv 0[2\pi]$

*** Pour montrer que Z est imaginaire pur penser à** $\overline{Z}$ **= -Z ou Re(Z)=0 ou** $\arg(Z)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

*** Ne pas oublier que diviser par i revient à multiplier par –i**

*** L'équation** $Z^2=r$ **ou r<0 admet deux solution** $z_1=i\sqrt{-r}$ **et** $z_2=-i\sqrt{-r}$

*** Il faut connaître *quelques* ensembles remarquables :**

- **L'ensemble** Γ_1 **des points M tel que :**

AM=BM $\Leftrightarrow$ $|Z_M-Z_A|=|Z_M-Z_B|$ $\Leftrightarrow$ **M appartient à médiatrice du** $[AB]$

L'ensemble Γ_1 **est la médiatrice du** $[AB]$

- **L'ensemble** Γ_2 **des points M tel que :**

AM=R avec R>0 $\Leftrightarrow$ $|Z_M-Z_A|=R$ $\Leftrightarrow$ **M appartient au cercle (C) de centre A est de rayon R**

L'ensemble Γ_2 **est le cercle (C) de centre A est de rayon R**

*** ABC est un triangle rectangle et isocèle en B** $\Leftrightarrow$ $\frac{Aff(\overrightarrow{AB})}{Aff(\overrightarrow{BC})}=ki$ **avec k∈ ℝ et AB=BC** $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=0$ **et AB=BC**

- **ABC est un triangle équilatéral** $\Leftrightarrow$ **AB=BC=AC** $\Leftrightarrow$ $|Z_B-Z_A|=|Z_C-Z_B|=|Z_C-Z_A|$

- **On peut démontrer certaines propriétés des quadrilatères**

*** ABCD est un parallélogramme si ses diagonales ont le même milieu** $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ $\Leftrightarrow$ $Z_B-Z_A=Z_C-Z_D$

*** Si les diagonales d'un quadrilatère ont le même milieu et la même longueur, alors ce quadrilatère est un rectangle.**
*** Un losange est un parallélogramme dont les diagonales sont perpendiculaires.**
*** Un carré est un losange dont les diagonales ont la même longueur.**