Projection dans le plan

1) Activités

i. Exercice 1

a) Tracer un trapèze $ABCD$ de base $[AB]$ et $[CD]$, puis préciser dans chaque cas les projetés des points A, B, C et D
- 1^{er} cas : par la projection sur (AD) parallèlement à (AB)
- 2eme cas : par la projection sur (BC) parallèlement à (CD)

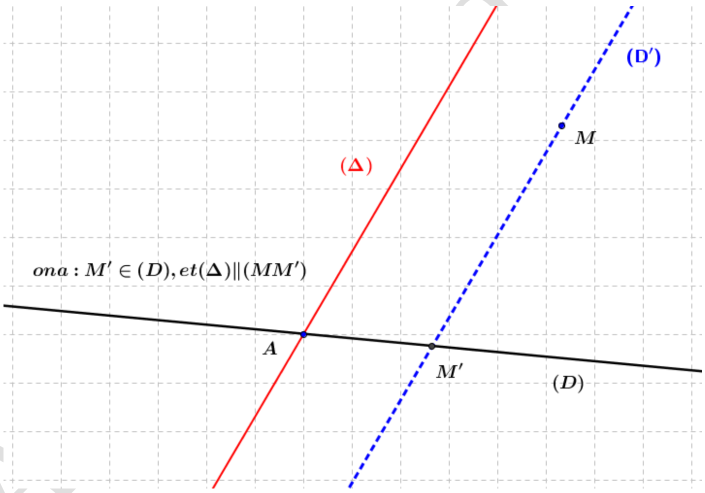
b) Soit E un point de $[AD]$ $(E \neq A$ et $E \neq D)$
Placer la projection F de E sur (BC) parallèlement à (CD) .Quelle est la nature des quadrilatères ABFE et CDEF

ii. Projection sur une droite parallèlement a une autre droite

i. Définition :

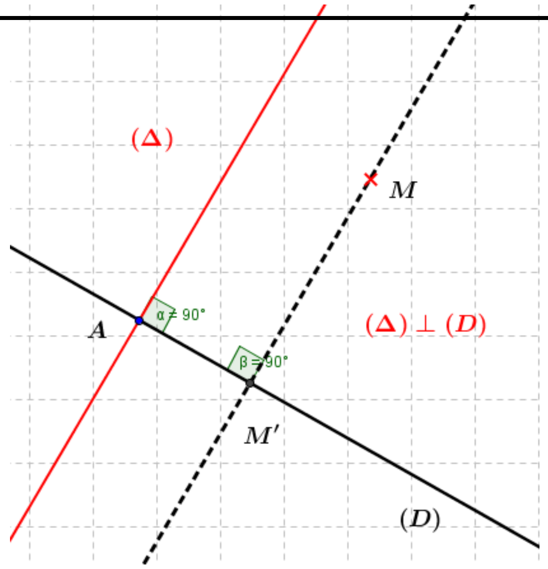
Soient (D), (Δ) deux droites sécantes en un pont A , et soit M un point du plan
La droite qui passe par M et parallèle (Δ) coupe (D) en un point M'
- le point M' s'appelle la projection du point M sur (D) parallèlement a (Δ)
- la droite (D) s'appelle la direction de la projection

ii. Construction relative à la définition



iii. Cas particulier

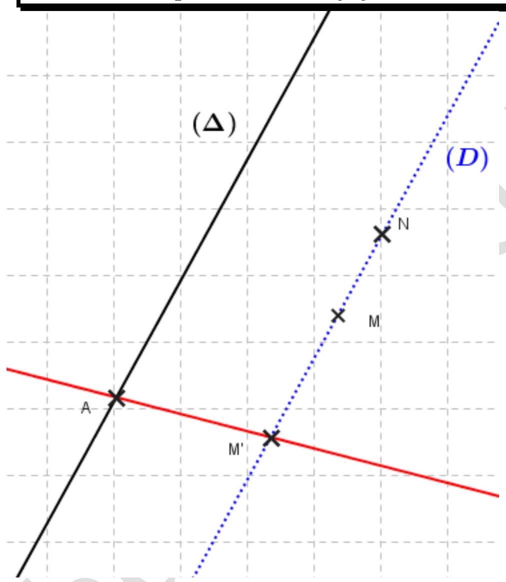
Si la droite (D), (Δ) sont perpendiculaire (on dit aussi orthogonales) on dit que M'est la projection orthogonale de M sur (D)



2. Propriétés

i. Propriété 1

- Chaque point de (D) est confondu avec sa projection
- Est tout point confondu avec sa projection est un point de (D)
- On dit que la droite (D) est invariante par la projection sur (D) parallèlement à (Δ)



ii. Propriété 2

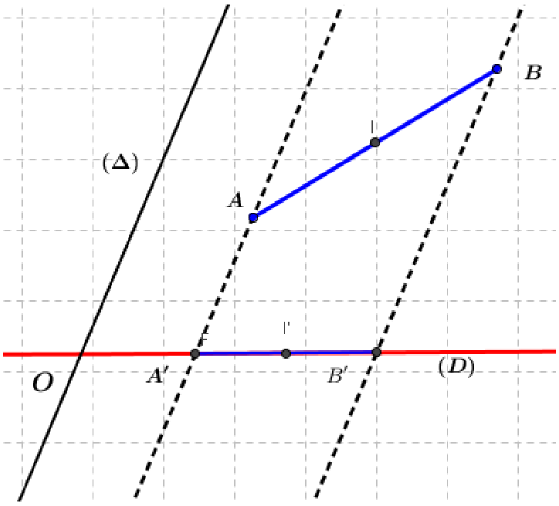
Soit A un point de (D) ,l'ensemble des points qu'ont la même projection que le point A sur (D) parallèlement à c'est (Δ) c'est la droite (D)

iii. Propriété 3

Si (Δ′) // (Δ) alors la projection sur (D) parallèlement à (Δ) est la projection sur (D) parallèlement à (Δ′)

3) Projection d'une partie

i. Projection d'un segment



ii. Propriété

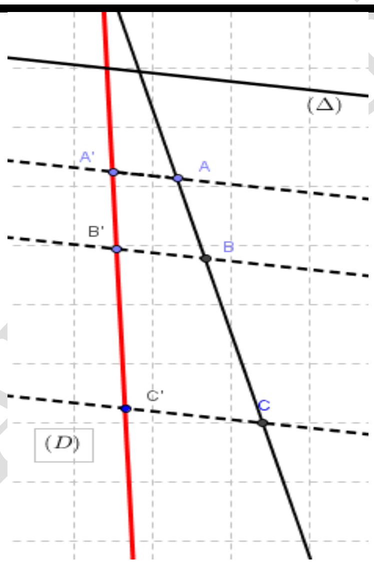
Soi A et B deux points du plan tels que $A \neq B$,

- A' et B' sont respectivement leur projection sur (D) parallèlement à (Δ) alors :$[A'B']$ est la projection de $[AB]$
- Si I est le milieu de $[AB]$, I' le milieu de $[A'B']$ alors I' est la projection de I sur (D) parallèlement à (Δ)

4) Théorème de Thales et réciproque

a) Propriété : (Thales)

A , B et C trios points alignés
A ', B' et C' sont respectivement les projections de A , B et C sur (D) parallèlement à (Δ)
Si on a : $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ alors $\overrightarrow{A'C'} = k\overrightarrow{A'B'}$, avec $(k \in \mathbb{R})$

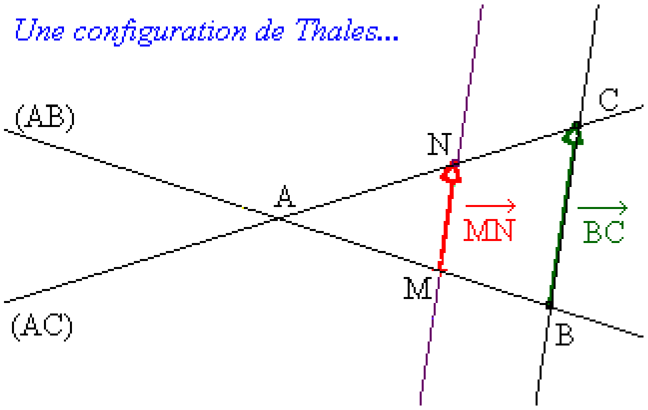


Propriété (Thales et réciproque)

ABC un triangle ; M un point de (AB) distinct de A ; N un point de (AC) distinct de A

i. Si $\begin{cases} \overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AN} = k\overrightarrow{AC} \end{cases}$ alors $\overrightarrow{MN} = k\overrightarrow{BC}$ (donc les droites (MN) et (BC) sont parallèles)

ii. Si $\begin{cases} \overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB} \\ (MN) \,//\, (BC) \end{cases}$ alors $\overrightarrow{AN} = k\overrightarrow{AC}$



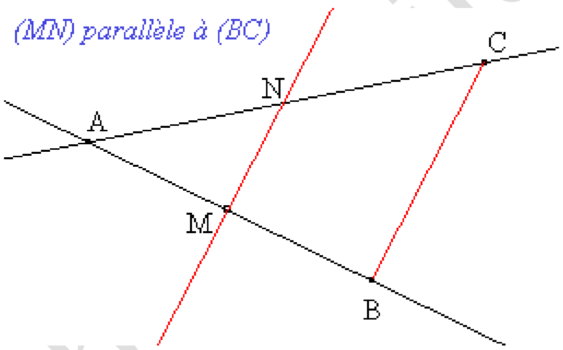
La preuve : ***Nous avons deux points à montrer. Pour le second, nous emploierons notre théorème de projection***

(i) : On suppose ici que $\overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN} = k\,\overrightarrow{AC}$.
On peut alors écrire que :

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = k\,\overrightarrow{BA} + k\,\overrightarrow{AC} = k\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) = k\,\overrightarrow{BC}$$

D'après Mr Chasles !
Ainsi $(MN) \,//\, (BC)$

(ii) : On suppose à présent que $\overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{AB}$ et que (MN) est parallèle à (BC).
Faisons une figure



Par projection d'axe (BC) sur (AC) on a
A projeté de lui-même A,
M a pour projection N car (MN) est parallèle à (BC),
B a pour projection C
Comme $\overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{AB}$ alors on a $\overrightarrow{AN} = k\overrightarrow{AC}$ est c'est bien ce qu'on voulait