Soit (u_n), (v_n) et (w_n) les suites définies par :

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{2+n}} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{3n+1}{n-1} \quad \text{et} \quad w_n = n\sqrt{n}$$

Montrer en utilisant la définition que :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} v_n = 3 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} w_n = +\infty$$

Exercice N°2

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(n^3-5n^2-6n+7\right) \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{3n^2-6n^4}{2n^2+5}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{3n^2-5n+2}{4-n^3} \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{2-8n^2+5n^3}{7n^3-3}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{3n^2-5n+2}{4-n^3} \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{2-8n^2+5n^3}{7n^3-3}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt[3]{n^3-n+4}-n\right) \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty}\operatorname{Arctan}\sqrt[3]{n+6}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(n^2-n-\sqrt[3]{n}+1\right) \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n-1}\right)$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(n^{\frac{2}{3}}-n^{-\frac{1}{3}}\right) \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{n^{\frac{3}{5}}+n^{\frac{6}{7}}}{n^{\frac{2}{3}}+n^{\frac{4}{9}}}$$

Exercice N°3

Calculer la limite de chacune des suites suivantes :

$$a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{3}{2}\right)^n \quad ; \quad b_n = \left(\frac{5}{3}\right)^n + \left(\frac{2}{9}\right)^n$$

$$c_n = \frac{7^n-5^n}{3^n} \quad ; \quad d_n = \frac{2^n-1}{7^n+1} \quad ; \quad e_n = \frac{2^n-5^n}{4^n+9^n}$$

$$u_n = \left(\frac{7}{3}\right)^n - (2017)^n \quad ; \quad v_n = \frac{4^n-(-2)^n}{3^n+(-2)^n}$$

$$w_n = \sqrt[5]{2^n} - \sqrt[3]{2^n} \quad ; \quad x_n = \frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{3^{2n-1}}$$

Exercice N°4

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par : $u_n = \dfrac{\cos(3n)}{\sqrt{n}}$

1) Vérifier que : $(\forall n \geq 1)$, $|u_n| \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

2) En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$.

Exercice N°5

Soit $(u_n)_{n\geq 2}$ la suite numérique définie par :

$$u_n = 3 + \frac{\sqrt{n}}{n+(-1)^n}$$

1) Établir que pour tout $n \geq 2$: $\dfrac{\sqrt{n}}{n+1} \leq u_n - 3 \leq \dfrac{\sqrt{n}}{n-1}$

2) En déduire $\lim u_n$.

Exercice N°6

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$u_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \dots + \frac{n}{n^2+n}$$

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $\dfrac{n}{n+1} \leq u_n \leq \dfrac{n^2}{n^2+1}$

2) En déduire $\lim u_n$.

Exercice N°7

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{2u_n+1}{u_n+1} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$1 \leq u_n \leq 2$$

2) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

3) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

Exercice N°8

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 1} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$1 \leq u_n \leq 2$$

2) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

3) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

Exercice N°9

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}(1 + u_n)^2 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

2) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_{n+1} - u_n \geq \frac{5}{2}$

b) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n \geq 2 + \frac{5n}{2}$

Préciser alors la limite de la suite (u_n).

Exercice N°10

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{n^3}$$

1) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est croissante.

2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$

3) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente.

Exercice N°11

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \sqrt[3]{3u_n + 1} - 1 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq u_n \leq 1$

2) Étudier la monotonie de la suite (u_n)

3) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

Exercice N°12

Déterminer la limite de chacune des suites suivantes :

$$a_n = \sqrt{\frac{3n-4}{2n+1}} \quad ; \quad b_n = n^2 \sin\left(\frac{1}{n}\right) \quad ; \quad c_n = \sqrt{3^n - 2^n}$$

$$u_n = \cos\left(\frac{n\pi - 3}{2n+1}\right) \quad ; \quad v_n = 4^n\left(1 - \cos\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

$$w_n = \pi 2^{n-1} - 2^n \operatorname{Arctan}\left(2^n\right) \quad ; \quad x_n = \sqrt[3]{\left|\frac{-2n+1}{n+1}\right|}$$

Exercice N°13

1) Montre que pour tout $x \in]0,+\infty[$:

$$\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) - \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{1+x}\right)$$

2) Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{1+n+n^2}\right) \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$$

a) Calculer $\lim u_n$.

b) Exprimer S_n en fonction de n. Préciser $\lim S_n$.

Exercice N°14

Soit g la fonction définie sur $I =]1;+\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{x^2 - 3x + 6}{x-1}$$

1) Montrer que pour tout $x \in I$: $g(x) \geq 3$

2) On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$u_0 = 5$ et $u_{n+1} = g(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $u_n \geq 3$

b) Montrer que la suite (u_n) est monotone.

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente puis calculer sa limite.

Exercice N°15

On considère les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ définies par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n}$$

Montrer que $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ sont convergentes et ont la même limite.

Exercice N°16

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite numérique définie par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n \geq \sqrt{n}$

2) Préciser la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$.

Exercice N°17

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite numérique définie par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{n^2}$$

1) Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$

2) a) Vérifier que pour tout entier $k \geq 2$:

$$\frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k-1} \quad \text{et que} \quad \frac{1}{k^2} < \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

b) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ 2 - \frac{1}{n} < u_n < 2$

c) Montrer que $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente.

Exercice N°18

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - n - \frac{8}{3} \ ; \ n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose : $v_n = u_n + \alpha n - 1$ où $\alpha \in \mathbb{R}$

Déterminer la valeur de α pour laquelle la suite (v_n) est géométrique.

Dans la suite, on prend pour α la valeur trouvée en 1.

2) Calculer v_n et u_n en fonction de n.

3) Exprimer la somme $S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$ en fonction de n puis calculer $\lim_{n \to +\infty} S_n$.

4) Exprimer $T_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ en fonction de de n.

Exercice N°19

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 0 \text{ et } u_{n+1} = \sqrt{12 + u_n} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \leq 4$

2) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ 4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{4}(4 - u_n)$

b) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ 4 - u_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

3) Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice N°20

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$u_0 = 2 \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N})\ u_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n^2}{3} + 2}$$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \geq \sqrt{3}$

2) Étudier la monotonie de la suite (u_n).

3) En déduire que la suite (u_n) est convergente puis déterminer sa limite.

Exercice N°21

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$u_0 = 3 \text{ et } u_{n+1} = \frac{8(u_n - 1)}{u_n + 2} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ 2 < u_n < 4$

2) Étudier la monotonie de la suite (u_n) puis en déduire qu'elle est convergente.

3) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ 4-u_{n+1} \leq \frac{4}{5}(4-u_n)$

b) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ 4-u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$

Puis déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

4) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = \dfrac{u_n - 4}{u_n - 2}$

a) Établir que la suite (v_n) est géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.

b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

c) Retrouver la valeur de la limite de (u_n).

5) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_{n-1}$

Exprimer S_n en fonction de n puis conclure $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

Exercice N°22

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + \frac{1}{(n+1)^2}} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n > 0$

2) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

3) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $v_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$

a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ v_n \leq 2 - \frac{1}{n}$

b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ u_n = \sqrt{1+v_n}$

c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \leq \sqrt{3}$

et que (u_n) est convergente.