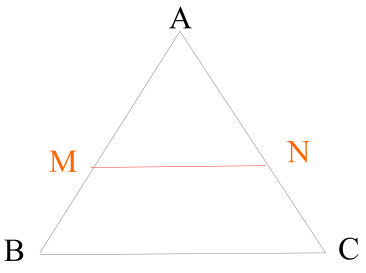
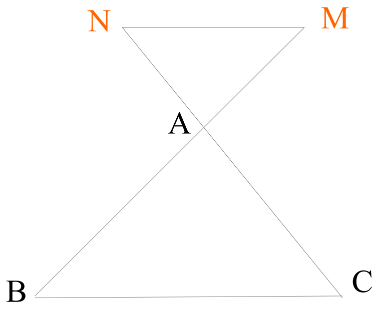
Chapitre 2 : le théorème de Thalès et sa réciproque

I. Théorème de Thalès

1. Énoncé du théorème

Soit ABC un triangle quelconque,



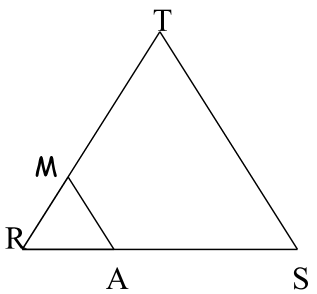


si : * (MN) // (BC) alors : $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$

* $M \in (AB)$
* $N \in (AC)$

2. Calculer une longueur

Exemple 1 : On considère la figure suivante :



avec (AM) // (ST)
RA = 8 cm
AS = 2 cm
AM = 5 cm
RT = 13 cm

Calculer ST et RM.

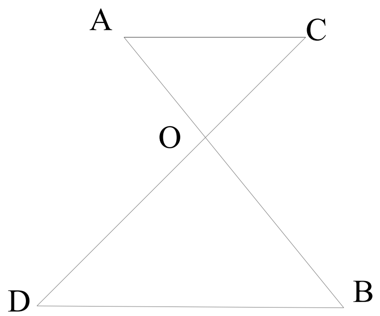
On a (AM) // (ST), $A \in (RS)$, $M \in (RT)$ donc d'après le théorème de Thalès, on a $\frac{RA}{RS}=\frac{RM}{RT}=\frac{AM}{ST}$

$$\frac{8}{10}=\frac{RM}{13}=\frac{5}{ST}$$

RM = $\frac{8\times 13}{10}$ ST = $\frac{10\times 5}{8}$

RM = 10,4 cm ST = 6,25 cm

Exemple 2 : On considère la figure suivante :



avec (AC) // (BD)
OA = 2,5 cm
OB = 3 cm
OC = 2 cm

Calculer la longueur OD.

On a (AC) // (BD), $C \in$ (OD), $A \in$ (OB) donc d'après le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{OC}{OD} = \frac{OA}{OB} = \frac{AC}{BD}$$

$$\frac{2,5}{3} = \frac{2}{OD} = \frac{AC}{BD} \qquad OD = \frac{2 \times 3}{2,5}$$

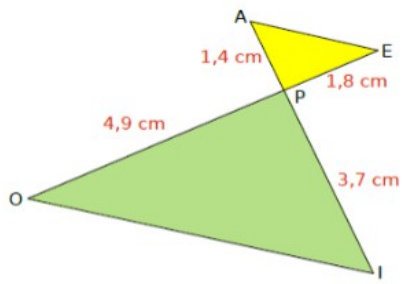
OD = 2,4 cm

3. Montrer que deux droites ne sont pas parallèles

La propriété précédente permet d'affirmer que :

Si $\frac{AM}{AB} \neq \frac{AN}{AC}$, alors (BC) et (MN) ne sont pas parallèles.

Exemple : Les droites (AE) et (OI) sont-elles parallèles ?



Les points A, P et I sont alignés ainsi que les points E, P et O.

Calculons séparément les rapports $\frac{PA}{PI}$ et $\frac{PE}{PO}$:

$$\frac{PA}{PI} = \frac{1,4}{3,7} \quad \text{et} \quad \frac{PE}{PO} = \frac{1,8}{4,9}$$

Par un produit en croix, on a 1,4 × 4,9 = 6,86 et 3,7 × 1,8 = 6,66.

On remarque que $\frac{PA}{PI} \neq \frac{PE}{PO}$ donc d'après la contraposée du théorème de Thalès, les droites (AE) et (OI) ne sont pas parallèles.

II- La réciproque du théorème de Thalès

1. Énoncé

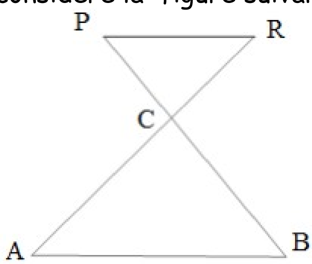
Si : * les points A,D,B et A,E,C sont alignés dans le même ordre,

* $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$

alors les droites (DE) et (BC) sont parallèles.

2. Montrer que deux droites sont parallèles

On considère la figure suivante avec :



- les droites (PR)et (AB) sont sécantes en C ;
- AC=3,3cm;CR = 1,1 cm
- BC=4,5cm CP =1,5 cm

Montrer que (PR) // (AB)

Les points C,P,B et C,R,A sont alignés.

$$\frac{CP}{CB} = \frac{1,5}{4,5} = \frac{15}{45} = \frac{15 \times 1}{15 \times 3} = \frac{1}{3} \qquad \frac{CR}{CA} = \frac{1,1}{3,3} = \frac{11}{33} = \frac{11 \times 1}{11 \times 3} = \frac{1}{3} \qquad \text{Donc } \frac{CP}{CB} = \frac{CR}{CA}$$

D'après la réciproque du théorème de Thalès, (PR) // (AB)