Exercice n : 1

1. Développer $(1-\sqrt{2})^2$

2. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l' équation $z^2-(1+\sqrt{2})z+\sqrt{2}=0$.

3. Résoudre dans l'ensemble des complexes les équations $z+\frac{1}{z}=1$ puis $z+\frac{1}{z}=\sqrt{2}$.

4. Soit $P(z)$ le polynôme de la variable complexe z défini par

$$P(z)=z^4-(1+\sqrt{2})z^3+(2+\sqrt{2})z^2-(1+\sqrt{2})z+1.$$

Vérifier que pour tout z non nul, on a $\frac{P(z)}{z^2}=\left(z+\frac{1}{z}\right)^2-(1+\sqrt{2})\left(z+\frac{1}{z}\right)+\sqrt{2}$.

En déduire les solutions de l'équation $P(z) = 0$.

Exercice n : 2

On considère le polynôme P défini par : $P(z)=z^4-6z^3+24z^2-18z+63$.

1. Calculer $P\left(i\sqrt{3}\right)$ et $P\left(-i\sqrt{3}\right)$ puis montrer qu'il existe un polynôme Q du second degré à coefficients réels, que l'on déterminera, tel que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on ait $P(z)=\left(z^2+3\right)Q(z)$.

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

3. Placer dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$, les points A, B, C, D d'affixes respectives $z_A=i\sqrt{3}$, $z_B=-i\sqrt{3}$, $z_C=3+2i\sqrt{3}$ et $z_D=\overline{z_C}$, puis montrer que ces quatre points appartiennent à un même cercle.

4. On note E le symétrique de D par rapport à O. Montrer que $\frac{z_C-z_B}{z_E-z_B}=e^{-i\frac{\pi}{3}}$ puis déterminer la nature

Exercice n : 3

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique 1 cm).

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-8z\sqrt{3}+64=0$.

2. On considère les points A et B qui ont pour affixes respectives les nombres complexes $a=4\sqrt{3}-4i$ et $b=4\sqrt{3}+4i$.

a. Ecrire a et b sous forme exponentielle.

b. Calculer les distances OA, OB, AB. En déduire la nature du triangle OAB.

3. On désigne par C le point d'affixe $c=-\sqrt{3}+i$ et par D son image par la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

Déterminer l'affixe du point D.

4. On appelle G le barycentre des trois points pondérés (O ; −1), (D ; +1), (B ; +1).

a. Justifier l'existence de G et montrer que ce point a pour affixe $g=4\sqrt{3}+6i$.

b. Placer les points A, B, C, D et G sur une figure.

c. Montrer que les points C, D et G sont alignés.

d. Démontrer que le quadrilatère $OBGD$ est un parallélogramme.

Exercice n : 4

1. On considère le polynôme P de la variable complexe z, défini par :

$$P(z)=z^3+\left(1-i\sqrt{2}\right)z^2+\left(74-i\sqrt{2}\right)z-74i\sqrt{2}.$$

a. Déterminer le nombre réel *y* tel que *iy* soit solution de l'équation $P(z) = 0$.

b. Trouver deux nombres réels *a* et *b* tels que, pour tout nombre complexe *z*, on ait

$$P(z) = \left(z - i\sqrt{2} \right)\left(z^2 + az + b \right).$$

c. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation $P(z) = 0$.

2. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. On prendra 1 cm pour unité graphique.

a. Placer les points *A*, *B* et *I* d'affixes respectives $z_A = -7 + 5i$; $z_B = -7 - 5i$ et $z_I = i\sqrt{2}$.

b. Déterminer l'affixe de l'image du point *I* par la rotation de centre *O* et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

c. Placer le point *C* d'affixe $z_C = 1 + i$.

Déterminer l'affixe du point *N* tel que *ABCN* soit un parallélogramme.

d. Placer le point *D* d'affixe $z_D = 1 + 11i$.

Calculer $Z = \frac{z_A - z_C}{z_D - z_B}$ sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique. Justifier que les droites (*AC*) et (*BD*) sont perpendiculaires et en déduire la nature du quadrilatère *ABCD*.

Exercice n : 5

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique 1 cm).

On considère dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation (E) d'inconnue *z* suivante :

$$z^3 + (-8 + i)z^2 + (17 - 8i)z + 17i = 0.$$

I. Résolution de l'équation (E).

1. Montrer que $-i$ est solution de (E).

2. Déterminer les nombres réels *a*, *b*, *c* tels que : $z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i = (z+i)(az^2 + bz + c)$.

3. Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes.

II. On appelle *A*, *B* et *C* les points d'affixes respectives $4+i$, $4-i$, $-i$.

1. Placer les points sur une figure que l'on complétera dans la suite de l'exercice.

2. Le point Ω est le point d'affixe 2. On appelle *S* l'image de *A* par la rotation de centre Ω et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$. Calculer l'affixe de *S*.

3. Démontrer que les points *B*, *A*, *S*, *C* appartiennent à un même cercle (C) dont on déterminera le centre et le rayon. Tracer (C).

4. À tout point *M* d'affixe $z \neq 2$, on associe le point *M'* d'affixe $z' = \frac{iz + 10 - 2i}{z - 2}$.

a. Déterminer les affixes des points *A'*, *B'*, *C'* associés respectivement aux points *A*, *B* et *C*.

b. Vérifier que *A'*, *B'*, *C'* appartiennent à un cercle (C') de centre *P*, d'affixe *i*. Déterminer son rayon et tracer (C').

c. Pour tout nombre complexe $z \neq 2$, exprimer $|z' - i|$ en fonction de *z*.

d. Soit *M* un point d'affixe *z* appartenant au cercle (C) . Démontrer que $|z' - i| = 2\sqrt{5}$.

e. En déduire à quel ensemble appartiennent les points *M'* associés aux points *M* du cercle (C).

Exercice n : 6

On considère le nombre complexe $a = e^{i\frac{2\pi}{5}}$. On note *I*, *A*, *B*, *C*, *D* les points du plan complexe d'affixes 1, *a*, a^2, a^3, a^4.

1. Vérifier que $a^5 = 1$.
2. Montrer que $IA = AB = BC = CD = DI$.
3. Vérifier que, pour tout z complexe : $z^5 - 1 = (z-1)(1+z+z^2+z^3+z^4)$.
4. En déduire que $1 + a + a^2 + a^3 + a^4 = 0$.
5. Montrer que $a^3 = \overline{a}^2$ et que $a^4 = \overline{a}$.
6. En déduire que $(a+\overline{a})^2 + (a+\overline{a}) - 1 = 0$.
7. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation $4x^2 + 2x - 1 = 0$.
8. Calculer $(a+\overline{a})$ et en déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.
9. Placer les points I, A, B, C et D dans le plan complexe (unité 4 cm).

Exercice n : 7 (sauf : section maths)

On considère dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation (E) : $z^3 + 2z^2 - 16 = 0$.

1. a. Montrer que 2 est solution de (E), puis que (E) peut s'écrire sous la forme $(z-2)(az^2 + bz + c) = 0$ où a, b, c sont trois réels que l'on déterminera.

b. En déduire les solutions de (E) sous forme algébrique puis sous forme exponentielle.

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

2. a. Placer les points A, B et D d'affixes respectives $z_A = -2-2i$, $z_B = 2$ et $z_D = -2+2i$.

b. Calculer l'affixe z_C du point C tel que $ABCD$ soit un parallélogramme. Placer C.

3. Soit E l'image du point C par la rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{2}$, et F l'image du point C par la rotation de centre D et d'angle $+\frac{\pi}{2}$.

a. Calculer les affixes z_E et z_F des points E et F.

b. Placer les points E et F.

4. a. Vérifier que $\frac{z_F - z_A}{z_E - z_A} = i$.

b. En déduire la nature du triangle AEF.

c. Soit I le milieu de [EF]. Déterminer l'image du triange EBA par la rotation de centre I et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.