Université Antilles–Guyane
UFR Sciences Exactes et Naturelles
Dépt Scientifique Interfacultaire

DEUG MIAS 2e année
Algèbre 3
1er semestre 2005–2006

T.D. série 5 : groupes

Exercice 1. Montrer que tout groupe G tel que $\forall x \in G : x^2 = e$, est abélien.

Exercice 2. Montrer que $\left\{\frac{1+2\,p}{1+2\,q}; p, q \in \mathbb{Z}\right\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$.

Exercice 3. Montrer que si A, B, C sont sous-groupes d'un groupe abélien, alors

$$A \subset C \Rightarrow (A + (B \cap C) = (A + B) \cap C) \ .$$

Exercice 4. (a) Montrer que $\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ est un groupe pour la loi $\cdot$.

(b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{U}_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$ est un groupe cyclique.

(c) Sous quelle condition sur $n, m \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{U}_m$ est-il sous-groupe de $\mathcal{U}_n$?

Exercice 5. (a) Montrer que $n\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(b) Sous quelle condition sur $n, p \in \mathbb{N}^*$, $n\mathbb{Z} \cup p\mathbb{Z}$ est-il un groupe ?

Exercice 6. Soit $f : G \to G'$ morphisme de groupes et $x \in G$ d'ordre fini $|x|$. Montrer que $|f(x)|$ divise $|x|$.
Application : trouver tous les morphismes de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$.

Exercice 7. Soient a, b éléments d'un groupe $(G, \cdot, e)$, d'ordre $p = |a|$ et $q = |b|$ finis et premiers entre eux. Montrer que $\langle a\rangle \cap \langle b\rangle = \{e\}$.

Exercice 8. Soit $(G, \cdot)$ un groupe engendré par deux éléments $\{x_1, x_2\}$ tels que

$$x_1 \neq e \neq x_2 \ , \quad x_1^2 = x_2^2 = e \ ,$$

et que Y, le sous-groupe engendré par $y = x_1\,x_2$, est d'ordre fini $n \geq 2$.

(a) Montrer que : (i) $x_1 \neq x_2$, (ii) $x_1 Y x_1 = Y = x_2 Y x_2$, (iii) $Y \lhd G$.

(b) Soit π la surjection canonique de G sur G/Y.
Montrer que $\pi(x_1) = \pi(x_2) \neq \pi(e)$. Quel est l'ordre de G ?

Exercice 9. Montrer que tout groupe fini d'ordre premier est cyclique.

Exercice 10. Montrer que tout groupe à 4 éléments est isomorphe à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ou à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. (Considérer l'ordre des éléments pour dresser la table de multiplication.)

Exercice 11. Montrer que si $m, n \in \mathbb{N}$ sont premiers entre eux, alors le groupe produit $\mathbb{Z}/mZ \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$.

Exercice 12. Soit G un groupe, $\mathrm{Aut}(G)$ l'ensemble des automorphismes de G.

(a) Montrer que $\mathrm{Int}(G) = \left\{\tau_a : x \mapsto a\,x\,a^{-1} \ ; \ a \in G\right\}$, ensemble des automorphismes intérieurs de G, est un sous-groupe distingué de $\mathrm{Aut}(G)$.

(b) Montrer que $\mathrm{Int}(G) \simeq G/Z(G)$.

Exercice 13. On appelle *sous-groupe dérivé* d'un groupe G le sous-groupe $D(G)$ engendré par les éléments de la forme $x\,y\,x^{-1}\,y^{-1}$, $x, y \in G$.

(a) Montrer que $D(G)$ est un sous-groupe distingué de G : $D(G) \lhd G$.

(b) Pour tout $H \lhd G$, montrer que G/H est abélien ssi $D(G) \subset H$.

Exercice 14. Soit G un groupe d'ordre n.

(a) Montrer que pour tout $g \in G$, l'application $\sigma_g : G \to G, \ x \mapsto g\,x$ est une bijection de G sur G.
En numérotant les éléments de G, σ_g s'identifie donc à un élément de $\mathfrak{S}_n$.

(b) Montrer que $\sigma : G \to \mathfrak{S}_n, \ g \mapsto \sigma_g$, est un morphisme de groupes.

(c) Montrer que σ est injectif. En déduire le **théorème de Cayley** :
tout groupe d'ordre n est isomorphe à un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$.