# Corrigé

# Généralités sur les fonctions

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O\,;\,\vec{i},\vec{j}\right)$.

C1 La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x^3+x^2+5x+6$

A- Pour $x\neq 0$, $f(x)=2x^3\left(1+\dfrac{1}{2x}+\dfrac{5}{2x^2}+\dfrac{3}{x^3}\right)$, factorisation simple.

B- $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{2x}=0$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5}{2x^2}=0$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3}{x^3}=0$ donc la limite de la parenthèse en $-\infty$ est égale à 1. De plus $\lim\limits_{x\to-\infty}2x^3=-\infty$.

D' après les théorèmes généraux sur la limite d'un produit on obtient : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$.

C- f est une fonction polynôme donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=6x^2+2x+5$.

D- f'(x) est un polynôme du second degré dont le discriminant est strictement négatif ( $\Delta$ = - 116 ) donc f'(x) a le signe du coefficient de $x^2$ sur $\mathbb{R}$. D' où f'(x) > 0 sur $\mathbb{R}$ et f est stictement croissante sur $\mathbb{R}$.

E- f (- 1) = 0 donc – 1 est une racine de f(x) et par suite f(x) est factorisable par $(x+1)$.

C2 f est définie dans $\mathbb{R}-\{5\}$ par $f(x)=\dfrac{3x^2-5x}{x-5}$

A- $\lim\limits_{x\to5}(3x^2-5x)=50$ et $\lim\limits_{x\to5}(x-5)=0$. D'autre part :

| x | $-\infty$ | | 5 | | $+\infty$ |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x - 5 | | $-$ | 0 | $+$ | |

d' où $\lim\limits_{x\to5^-}f(x)=-\infty$

et $\lim\limits_{x\to5^+}f(x)=+\infty$

B- pour $x\neq5$ et $x\neq0$, $f(x)=\dfrac{3x^2(1-\frac{5}{3x})}{x(1-\frac{5}{x})}=\dfrac{3x(1-\frac{5}{3x})}{1-\frac{5}{x}}$ en simplifiant par x.

C- $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-\dfrac{5}{3x}) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-\dfrac{5}{x}) = 1$

On peut donc conclure : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

D- Cherchons trois réels a,b et c tels que : pour tout x de $\mathbb{R}-\{5\}$,

$\dfrac{3x^2-5x}{x-5} = ax+b+\dfrac{c}{x-5}$ soit

$\dfrac{3x^2-5x}{x-5} = \dfrac{(ax+b)(x-5)+c}{x-5} = \dfrac{ax^2+(b-5a)x-5b+c}{x-5}$

En identifiant les deux expresions de f(x) on obtient le système

$\begin{cases} a=3 \\ b-5a=-5 \\ -5b+c=0 \end{cases}$ qui donne a = 3, b = 10 et c = 50

Donc pour tout x de $\mathbb{R}-\{5\}$, $f(x) = 3x+10+\dfrac{50}{x-5}$

E- D' après les résultats du A on peut affirmer que la droite d' équation x = 5 est asymptote à la courbe représentative de f.

De plus : $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-(3x+10)] = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{50}{x-5} = 0$ donc la droite d'équation $y = 3x+10$ est aussi asymptote à la courbe de f.

C3 f est définie dans $\mathbb{R}-\{-1;+1\}$ par $f(x) = 1+\dfrac{3}{x-1}+\dfrac{3}{x+1}$

A- L'ensemble de définition de f est symétrique par rapport au réel 0.

$\dfrac{1}{2}[f(0+x)+f(0-x)] = \dfrac{1}{2}[1+\dfrac{3}{x-1}+\dfrac{3}{x+1}+1-\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{3}{x-1}] = 1.$

Donc le point I (0 ; 1) est un centre de symétrie pour la courbe de f.

B- $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3}{x-1} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3}{x+1} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$

C- $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{3}{x-1} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to1}[1+\dfrac{3}{x+1}] = \dfrac{5}{2}$ donc $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = +\infty$

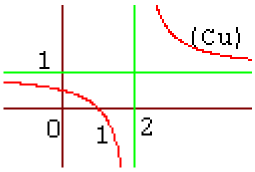
D- $\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{3}{x+1} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-1}[1+\dfrac{3}{x-1}] = -\dfrac{1}{2}$ donc $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = +\infty$

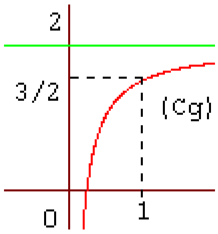
E- f, fonction rationnelle, est dérivable sur tout intervalle de son ensemble de définition soit sur $]-\infty;-1[$, $]-1\,;\,+1[$ et $]1\,;\,+\infty[$.

$f'(x) = \dfrac{-3}{(x-1)^2}+\dfrac{-3}{(x+1)^2}$. Il est évident que $f'(x) < 0$ sur les intervalles précédants. Donc f est strictement décroissante sur chacun des intervalles $]-\infty;-1[$, $]-1\,;\,+1[$ et $]1\,;\,+\infty[$.

C4

u est définie dans $\mathbb{R}-\{2\}$ par $u(x)=\dfrac{x-1}{x-2}$ et g est définie sur $]\,0\,;\ +\infty\,[$. Les courbes (Cu) et (Cg) sont tracées ci dessous. On considère la fonction composée f = g ∘ u.




A- La fonction composée f = g ∘ u est définie si la fonction u est définie et si le réel u(x) appartient à l'ensemble de définition de la fonction g soit si $x\neq 2$ et si $\dfrac{x-1}{x-2}>0$. Le signe de ce quotient est le même que celui du polynôme du 2[ème] degré $(x-1)(x-2)$ pour $x\neq 2$. Donc f est définie sur les intervalles $]-\infty\,;\ +1\,[$ et $]\,2\,;\ +\infty\,[$.

B- $\lim\limits_{x\to 1^-} u(x)=0^+$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-\infty$.

C- $\lim\limits_{x\to +\infty} u(x)=1$ et $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=1{,}5$ donc $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=1{,}5$.

D- $\lim\limits_{x\to 2+} u(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)=2$ donc $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=2$.

E- u est dérivable en tout point $x_0$ de $\mathbb{R}-\{2\}$ et g est dérivable en tout point $u(x_0)$ tel que $u(x_0) > 0$. Donc la composée f = g ∘ u est dérivable sur les intervalles $]-\infty;+1[$ et $]\,2;+\infty[$.

Les fonctions f et g ont des sens de variation opposés donc la composée f = g ∘ u est strictement décroissante sur les intervalles $]-\infty;+1[$ et $]\,2;+\infty[$.

C5

f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x-\sin x$

A- Pour tout x de $\mathbb{R}$, $-1\leq \sin x\leq +1$. Alors $-1\leq -\sin x\leq +1$ puis $x-1\leq x-\sin x\leq x+1$ soit $x-1\leq f(x)\leq x+1$.

Interprétation graphique de cet encadrement: la courbe de f est située entre les droites d' équation $y=x-1$ et $y=x+1$.

B- $f(x)\geq x-1$ et $\lim\limits_{x\to +\infty}(x-1)=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$

$f(x)\leq x+1$ et $\lim\limits_{x\to -\infty}(x+1)=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=-\infty$.

C- Pour $x\neq 0$, $\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{x-\sin x}{x}=1-\dfrac{\sin x}{x}$

Or $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ ( voir cours ) donc $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$.

D- f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme algébrique de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
$f'(x) = 1 - \cos x$. Puisque pour tout x de $\mathbb{R}$ $\cos x \leq 1$ on a $f'(x) \geq 0$ et donc f est croissante sur $\mathbb{R}$.

E- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = 0 \pmod{2\pi}$ donc la courbe de f admet une tangente horizontale en tout point d' abscisse $x = k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

C6 f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x - \sqrt{x^2+1}$

A- $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(-\sqrt{x^2+1}) = -\infty$. On peut donc conclure à l' aide des théorèmes généraux : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

B- En multipliant et divisant f(x) par son expression conjuguée :

$$f(x) = \frac{(2x-\sqrt{x^2+1})(2x+\sqrt{x^2+1})}{2x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{4x^2-(x^2+1)}{2x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{3x^2-1}{2x+\sqrt{x^2+1}}$$

pour $x > 0$, $\sqrt{x^2+1} = \sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})} = x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$. Alors, pour $x > 0$,

$$f(x) = \frac{x(3x-\frac{1}{x})}{x(2+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}})} = \frac{3x-\frac{1}{x}}{2+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}.$$

C- pour tout réel x, $f'(x) = 2 - \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = 2 - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$
et il est évident que pour $x \leq 0$ on a $f'(x) > 0$.

D- pour $x > 0$, le signe de f'(x) n'est pas immédiat.Transformons l' écriture de f'(x) en deux étapes :

- réduction au même dénominateur $f'(x) = \frac{2\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}}$
- utilisation de l'expression conjuguée du numérateur

$$f'(x) = \frac{(2\sqrt{x^2+1}-x)(2\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}(2\sqrt{x^2+1}+x)} = \frac{4(x^2+1)-x^2}{\sqrt{x^2+1}(2\sqrt{x^2+1}+x)}$$

soit $f'(x) = \frac{3x^2+4}{\sqrt{x^2+1}\,(2\sqrt{x^2+1}+x)}$

E- Il est clair que pour $x > 0$ on a également $f'(x) > 0$. Finalement pour tout x de $\mathbb{R}$ on a $f'(x) > 0$. On en déduit que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

C7 f est définie sur $[0\ ;+\infty[$ par $f(x)=x\sqrt{x}$

A- Sur $]0\ ;+\infty[$ f est dérivable comme produit de deux fonctions dérivables sur cet intervalle.

B- La fonction $x\mapsto\sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0. Les théorèmes généraux ne permettent pas de conclure quant à la dérivabilité de f en 0. Aussi revenons à la définition du nombre dérivé:

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\sqrt{x}}{x}=\lim\limits_{x\to0}\sqrt{x}=0$ , limite finie, donc f est dérivable en 0 et f'(0)= 0.

C- la courbe (C) de f admet à l'origine du repère une demi-tangente de coefficient directeur f' (0) = 0 donc horizontale.

D- la position de (C) par rapport à la droite (D) d'équation y = x est donnée par le signe de la différence

$d(x)=f(x)-x=x\sqrt{x}-x=x(\sqrt{x}-1)=\dfrac{x(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}+1}=\dfrac{x(x-1)}{\sqrt{x}+1}$.

d(x) étant du signe du polynôme du second degré x ( x + 1 ),

on en déduit :

| $x$ | 0 | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)-x$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |
| (C) / (D) | | $\dfrac{(D)}{(C)}$ | | $\dfrac{(C)}{(D)}$ | |

E- une équation de la tangente à ( C ) au point d' abscisse 1 est

$y-f(1)=f'(1)(x-1)$ . Or, pour $x>0$, $f'(x)=\sqrt{x}+x\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ soit

$f'(x)=\sqrt{x}+\dfrac{\sqrt{x}}{2}=\dfrac{3\sqrt{x}}{2}$ donc $f'(1)=\dfrac{3}{2}$. Par suite une

équation de la tangente est $y-1=\dfrac{3}{2}(x-1)$ ou $y=\dfrac{3}{2}x-\dfrac{1}{2}$.

C8 f est définie dans $\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$ par $f(x)=\dfrac{\sin x}{1+\sin x}$

A- Pour tout x de l'ensemble de définition D de f, $(x+2\pi)\in D$

et $f(x+2\pi)=\dfrac{\sin(x+2\pi)}{1+\sin(x+2\pi)}=\dfrac{\sin x}{1+\sin x}=f(x)$ car $2\pi$ est une période de la fonction sinus. Donc $2\pi$ est une période de f.

B- D n'est pas symétrique par rapport au réel 0 donc f n'est ni paire ni impaire.

C- $f(\pi-x)=\dfrac{\sin(\pi-x)}{1+\sin(\pi-x)}=\dfrac{\sin x}{1+\sin x}=f(x)$.

D- D est symétrique par rapport au réel $\dfrac{\pi}{2}$ et $f(\pi-x)=f(x)$.

Donc la droite d'équation $x=\dfrac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie pour la courbe de f.

E- $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} \sin x = -1^+$ donc $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} (1+\sin x) = 0^+$. Alors $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} f(x) = -\infty$.

C9 f est définie sur [ -2 ; + ∞ [ par $f(x)=\sqrt{x+2}$

A- Par inégalités successives on obtient :
si $x\in$ [0 ;2] alors $(x+2)\in[2;4]$ puis $\sqrt{x+2}\in[\sqrt{2};2]$.
Or $\sqrt{2}>0$ et $2\le 2$ donc $f(x)\in[0;2]$.

B- Pour $x\ge 0$, $f(x)-x=\sqrt{x+2}-x=\dfrac{(\sqrt{x+2}-x)(\sqrt{x+2}+x)}{\sqrt{x+2}+x}$ soit
$f(x)-x=\dfrac{x+2-x^2}{\sqrt{x+2}+x}=\dfrac{(x+1)(-x+2)}{\sqrt{x+2}+x}$. On en déduit facilement que pour tout x de $[0;2]$, $f(x)-x\ge 0$ donc que $f(x)\ge x$.

C- Pour $x\ge -2$, $f(x)-2=\sqrt{x+2}-2=\dfrac{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)}{\sqrt{x+2}+2}$ ou
$f(x)-2=\dfrac{x+2-4}{\sqrt{x+2}+2}=\dfrac{x-2}{\sqrt{x+2}+2}$ donc $|f(x)-2|=\dfrac{|x-2|}{\sqrt{x+2}+2}$.

D- Pour $x\ge -2$, on a $\sqrt{x+2}\ge 0$ puis $\sqrt{x+2}+2\ge 2$ et
$\dfrac{1}{\sqrt{x+2}+2}\le\dfrac{1}{2}$ donc $|f(x)-2|\le\dfrac{1}{2}|x-2|$

E- $\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}=\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{\sqrt{x+2}}{x+2}=\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{1}{\sqrt{x+2}}=+\infty$
En effet pour $x>-2$ on a $x+2>0$ et $x+2=(\sqrt{x+2})^2$
f n' est donc pas dérivable en $-2$ et la courbe de f admet au point A( -2 ; 0 ) une demi-tangente vertiale.

C10 f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$

A- $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+x^2)=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{1+x^2}=0$.On en déduit que l'axe des abscisses est asymptote à la courbe de f en $+\infty$

B- Pour tout x de $\mathbb{R}$, $-x\in\mathbb{R}$ et $f(-x)=f(x)$. Donc la courbe de f admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.

C- f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=\dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$.

D- f est continue (car dérivable) et strictement décroissante sur[ 0 ; 1 ].
Donc f ([0 ; 1]) = [f (1) ; f (0)] = $[\frac{1}{2}; 1]$.

E- $\frac{3}{4}\in[\ \frac{1}{2}$ ; 1 ] donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x) = \frac{3}{4}$ admet une solution unique dans[ 0 ; 1 ].