***Série : TSEco - Énonce.***

## Exercice 1 ........................................................................................ 6 points

**1.** Trois employés ont respectivement 18 ; 12 et 9 années de service. Leurs salaires hebdomadaires respectifs sont 21 600 F ; 14 400 F et 9 600 F. Ils doivent se partager une somme de 14 400 F proportionnellement à leur nombre d'années de service et proportionnellement aux invers de leurs salaires.
Détermine les parts.

**2.** Dans un bus scolaire, 20% des passagers portent un chapeau chacun, 60% des passagers sont des dames et 20% des hommes portent un chapeau chacun..
Calcule le pourcentage de dames qui portent un chapeau chacune.

## Exercice 2 ........................................................................................ 5 points

**1.** **a.** Développe $a=\left(2+\sqrt{2}\right)^3$ et $b=\left(2-\sqrt{2}\right)^3$.

**b.** Déduis-en la valeur exacte de $c=\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}-\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$ .

**2.** Résous, dans $\mathbb{R}$, l'équation $\sqrt[3]{2x-9}=3$.

**3.** Soit $a$ un réel strictement positif. Simplifie : $d=\dfrac{\sqrt[3]{a^5}\times\left(\sqrt[4]{a^7}\right)^2}{\left(a^2\right)^2\times\sqrt[5]{a^5}\times\sqrt[5]{a^3}}$.

**4.** Résous, dans $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, les systèmes suivants : $\begin{cases}\left(2^6\right)^{-x}\times\dfrac{1}{(16)^y}=4\\ \left(13^{-x}\right)\times\dfrac{1}{(169)^y}=4\end{cases}$ et

$$\begin{cases}\left(\dfrac{1}{125}\right)^{-x}=\dfrac{1}{\left(5^{-7}\right)^y}\times 25^{-5}\\ \dfrac{1}{\left(6^{-2}\right)^x}\times 6^y=6^5\end{cases}$$

## Problème ........................................................................................ 9 points

Une entreprise produit et vend un modèle de pièce pour automobiles. Pour des raisons techniques et de stockage, sa production mensuelle est comprise entre 100 et 600 pièces. Elle vend tout ce qui est produit.

On considère la fonction $f$ définie sur l'intervalle $[1\,;6]$ par : $f(x)=-x^2+10x-9-8\ln x$ ;

$f(x)$ représente le bénéfice mensuel, exprimé en dizaine de milliers de francs, obtenu pour la vente de $x$ centaines de pièces. La fonction $f$ est dérivable sur l'intervalle $[1\,;6]$. On note $f'$ la fonction dérivée de la fonction $f$.

**1.** **a.** Calcule $f'(x)$

**b.** Étudie le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[1\ ;6]$.

**c.** Dresse la tableau de variations de $f$.

**d.** Quelle est la quantité de pièces à produire pour obtenir un bénéfice mensuel maximale? Calcule ce bénécifie au franc près.

**2.** On considère la fonction $g$ définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $g : x \longmapsto g(x) - x + x\ln x$.

**a.** Prouve que $g : x \longmapsto g(x) - x + x\ln x$ est une primitive de la fonction $x \longmapsto \ln x$ sur $]0; +\infty[$

**b.** Déduis-en un primitive $F$ de la fonction $f$ sur $[1\ ;6]$.

**c.** Calcule la valeur moyenne de la fonction $f$ sur $[1\ ;6]$. On donnera une valeur décimale arrondie au dixième

.

## Exercice 1 : ........................................................................ 6 points

**1.** Déterminons les trois parts

Soit $A$, $B$, $C$ les trois parts

$$(A\ ;B\ ;C)DP(18\ ;12\ ;9)DP\left(\frac{1}{21\,600}\ ;\ \frac{1}{14\,400}\ ;\ \frac{1}{9\,600}\right) \text{ alors}$$

$$(A\ ;B\ ;C)DP\left(\frac{18}{21\,6\cancel{00}}\ ;\ \frac{12}{14\,4\cancel{00}}\ ;\ \frac{9}{9\,6\cancel{00}}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(A;B;C)DP\left(\frac{18\times144\times96}{216\times144\times96}\ ;\ \frac{12\times216\times96}{216\times144\times96}\ ;\ \frac{9\times216\times144}{216\times144\times96}\right)$$

$$\Rightarrow(A;B;C)DP(248\,832\ ;248\,832\ ;279\,936)$$

$$\Rightarrow\frac{A}{248\,832}=\frac{B}{248\,832}=\frac{C}{279\,936}=\frac{A+B+C}{248\,832+248\,832+279\,936}=\frac{14\,400}{777\,600}$$

$$\Rightarrow A=\frac{248\,832\times14\,400}{777\,600}\ ;B=\frac{248\,832\times14\,400}{777\,600}\ ;C=\frac{279\,936\times14\,400}{777\,600}$$

$$\Rightarrow A=\ 4\,608\ ;B=4\,608\ ;C=5\,184$$

**2.** Calculons le pourcentage de dames qui portent un chapeau chacune

**Méthode 1**

$$t=(20\%)(60\%)=\frac{20\times60}{100}\%=12\%\,.$$

Le pourcentage des dames qui portent un chapeau chacune est 12% des passagers.

**Autre méthode 2**

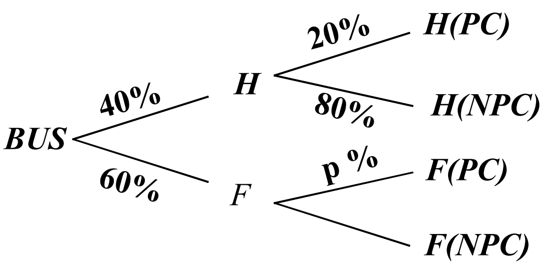
Soient $x$ le nombre de passagers, $y$ le nombre d'hommes qui portent un chapeau et $z$ le nombre de dames qui portent un chapeau chacune.

$y=(\mathbf{40\%x})(\mathbf{20\%})=8\%x$

$8\%x+z=20\%x\Rightarrow z=20\%x-8\%x=12\%x$

Le pourcentage des dames qui portent un chapeau chacune est 12% des passagers.

**Autre méthode 3**




$$(40\%)\ (20\%)\ +(60\%)(p\%)=20\%\Rightarrow8\%+(60\%)(p\%)=20\%\Rightarrow\ (p\%)=\frac{12\%}{60\%}=0.2$$

$p=20\%$

Le pourcentage des dames qui portent un chapeau chacune est 20% des dames..

## Exercice 2 : ........ 5 points

**1.** **a.** Développons $a = \left(2 + \sqrt{2}\right)^3$ et $b = \left(2 - \sqrt{2}\right)^3$

$$a = \left(2+\sqrt{2}\right)^3 = 2^3 + 3(2)^2\left(\sqrt{2}\right) + 3(2)\left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^3 = 8 + 12\sqrt{2} + 12 + 2\sqrt{2}$$

$$\boldsymbol{a = 20 + 14\sqrt{2}}$$

$$b = \left(2-\sqrt{2}\right)^3 = 2^3 - 3(2)^2\left(\sqrt{2}\right) + 3(2)\left(\sqrt{2}\right)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^3 = 8 - 12\sqrt{2} + 12 - 2\sqrt{2}$$

$$\boldsymbol{b = 20 - 14\sqrt{2}}$$

**b.** Déduisons la valeur exacte de c $= \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} - \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$

$$\mathrm{c} = \sqrt[3]{\mathbf{20+14\sqrt{2}}} - \sqrt[3]{\mathbf{20-14\sqrt{2}}} =$$

$$= \sqrt[3]{\left(2+\sqrt{2}\right)^3} - \sqrt[3]{\left(2-\sqrt{2}\right)^3} = 2 + \sqrt{2} - \left(2 - \sqrt{2}\right)$$

$$= 2 + \sqrt{2} - 2 + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} \quad ; \quad \boldsymbol{c = 2\sqrt{2}}$$

**2.** Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\sqrt[3]{2\mathrm{x}-9} = 3$

$$\sqrt[3]{2x-9} = 3 \Rightarrow 2x - 9 = 3^3 \Rightarrow 2x - 9 = 27 \Rightarrow 2x = 27 + 9 \Rightarrow 2x = 36 \Rightarrow x = \frac{36}{2} = 18$$

$S = \{18\}$

**3.** $a \in \mathbb{R}_+^*$, simplifions $d = \dfrac{\sqrt[3]{a^5} \times \left(\sqrt[4]{a^7}\right)^2}{\left(a^2\right)^2 \times \sqrt[5]{a^5} \times \sqrt[5]{a^3}}$

$$d = \frac{\sqrt[3]{a^5} \cdot \left(\sqrt[4]{a^7}\right)^2}{\left(a^2\right)^2 \cdot \sqrt[5]{a^5} \times \sqrt[5]{a^3}} = \frac{a^{\frac{5}{3}} \cdot \left(a^{\frac{7}{4}}\right)^2}{a^4 \cdot a \cdot a^{\frac{3}{5}}} = \frac{a^{\left(\frac{5}{3}+\frac{14}{4}\right)}}{a^{\left(4+1+\frac{3}{5}\right)}} = \frac{a^{\frac{62}{12}}}{a^{\frac{28}{5}}} = a^{\frac{62}{12}-\frac{28}{5}} = a^{\frac{-26}{60}} = a^{-\frac{13}{30}}$$

**4.** Résolvons dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ les systèmes suivants :

$$\begin{cases} \left(2^6\right)^{-x} \times \dfrac{1}{(16)^y} = 4 \\ 13^{-x} \times \dfrac{1}{(169)^y} = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^{-6x} \times 2^{-4y} = 2^2 \\ 13^{-x} \times 13^{-2y} = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6x - 4y = 2 \\ 13^{-x-2y} = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3x - 2y = 1 \\ -x - 2y = \dfrac{\ln 4}{\ln 13} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x - 2y = 1 \\ x + 2y = -\dfrac{\ln 4}{\ln 13} \end{cases}$$

$$\Rightarrow -2x = 1 - \frac{\ln 4}{\ln 13} \Rightarrow x = \frac{-\ln 13 + \ln 4}{2\ln 13} \notin \mathbb{N}$$

$S = \emptyset$

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{125}\right)^{-x} = \frac{1}{\left(5^{-7}\right)^{y}} \times 25^{-5} \\ \frac{1}{\left(6^{-2}\right)^{x}} \times 6^{y} = 6^{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5^{3x} = 5^{7y} \times 5^{-10} \\ 6^{2x} \times 6^{y} = 6^{5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5^{3x} = 5^{7y-10} \\ 2x + y = 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x - 7y = -10 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x - 7y = -10 \\ 14x + 7y = 35 \end{cases}$$

$$17x \quad = 25 \Rightarrow x = \frac{25}{17} \notin \mathbb{N}$$

$S = \emptyset$

## Problème : ........................................................ 9 points

$f : [1\,;6] \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(x) = -x^2 + 10x - 9 - 8\ln x$

$f(x)$ le bénéfice mensuel, exprimé en dizaine de milliers de francs, obtenu pour la vente de $x$ centaines de pièces.

**1.** **a.** Calculons $f'(x)$

$$f(x) = -x^2 + 10x - 9 - 8\ln x \Rightarrow f'(x) = -2x + 10 - \frac{8}{x} = \frac{-2x^2 + 10x - 8}{x}$$

**b.** Etudions le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[1\,;6]$

$f'(x) = \dfrac{-2x^2 + 10x - 8}{x}$ ; $\forall x \in [1\,;6]$ , $x > 0$, $f'(x)$ a même signe que

$\left(-2x^2 + 10x - 8\right)$

$-2x^2 + 10x - 8 = 0$ ; $a = -2$ ; $b = 10$ ; $c = -8$

$\Delta = b^2 - 4ac = 10^2 - 4(-2)(-8) = 36$

$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-10 - \sqrt{36}}{2(-2)} = 4$ ; $\qquad x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-10 + \sqrt{36}}{2(-2)} = 1$

Tableau de signe :

| $x$ | $1$ $\qquad$ $4$ $\qquad$ $6$ |
|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ $\quad$ $0$ $\quad$ $-$ |

$\forall x \in [1\,;4],\ f'(x) \geq 0$

$\forall x \in [4\,;6],\ f'(x) \leq 0$

**c.** Dressons le Tableau de Variation :

| $x$ | $1$ | | $4$ | | $6$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $15-8\ln 4$ | $\searrow$ | $15-8\ln 6$ |

$f(1) = -(1)^2 + 10(1) - 9 - 8\ln(1) = 0$

$f(4) = -(4)^2 + 10(4) - 9 - 8\ln(4) = 15\text{-}8\ln 4 \approx 3{,}9096$

$f(6) = -(6)^2 + 10(6) - 9 - 8\ln(6) = 15\text{-}8\ln 6 \approx 0{,}6659$

**d.** La quantité de pièces à produire pour obtenir un bénéfice mensuel maximal est 400 pièces $(x = 4)$
Ce bénéfice au franc près est 39 096 F $(f(4) = 3{,}9096)$.

**2.** $g: ]0\,;+\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto g(x) = -x + x\ln x$

**a.** Prouvons que $x \longmapsto g(x)$ est une primitive de $x \longmapsto \ln x$ sur $]0\,;+\infty[$.

$g(x) = -x + x.\ln x \Longrightarrow g'(x) = -1 + 1.\ln x + \left(\frac{1}{x}\right).x = -1 + \ln x + 1 = \ln x$ ; d'où

$x \longmapsto g(x)$ est une primitive de $x \longmapsto \ln x$ sur $]0\,;+\infty[$

**b.** Déduisons une primitive $F$ de la fonction $f$

$$f(x) = -x^2 + 10x - 9 - 8\ln x \Longrightarrow F(x) = -\frac{x^3}{3} + 5x^2 - 9x - 8(-x + x.\ln x)$$

$$F(x) = -\frac{x^3}{3} + 5x^2 - 9x + 8x - 8x.\ln x \Longrightarrow F(x) = -\frac{x^3}{3} + 5x^2 - x - 8x.\ln x$$

**c.** Calculons la valeur moyenne de la fonction $f$ sur $[1\,;6]$

$$m=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx=\frac{1}{6-1}\int_1^6 f(x)\,dx=\frac{1}{5}[F(x)]_1^6=\frac{1}{5}[F(6)-F(1)]$$

$$=\frac{1}{5}\left[\left(-\frac{6^3}{3}+5(6)^2-6-8(6).\ln 6\right)-\left(-\frac{1^3}{3}+5(1)^2-1-8(1).\ln 1\right)\right]$$

$$=\frac{1}{5}\left(102-48\ln 6+\frac{1}{3}-4\right)=\frac{1}{5}\left(\frac{295}{3}-48\ln 6\right)\approx 2{,}4658\approx 2.5.$$